

La mesure de Shearer et domination stochastique des loi produits Bernoulli

Christoph Temmel

Institut für Mathematische Strukturtheorie / TU Graz
Laboratoire d'Analyse, Topologie et Probabilité / Aix-Marseille Université

20120419 @ JPS 12 @ CIRM



Champs de Bernoulli

Soit $G := (V, E)$ un graphe localement fini. Un **champ de Bernoulli** (CdB) $Y := (Y_v)_{v \in V}$ est une collection des variables aléatoires à valeurs dans $\{0, 1\}^V$ indexées par V et avec **paramètre marginal** $p \in [0, 1]$, càd $\mathbb{P}(Y_v = 1) = p$.

Cas spécial: $X \sim \prod_c^V$ **champ produit de Bernoulli** avec paramètre marginal $\mathbb{P}(X_v = 1) = c \in [0, 1]$.

Dépendance locale

G est un **graphe de dépendance (forte)** du CdB $Y := (Y_v)_{v \in V}$ ssi

$\forall A, B \subset V : d(A, B) > 1 \Rightarrow Y_A$ indépendant de $Y_B := (Y_v)_{v \in B}$

La **classe de dépendance (forte)** est

$$\mathcal{C}_G(p) := \left\{ \text{BRF } Y : \begin{array}{l} \forall v \in V : \mathbb{P}(Y_v = 1) = p \\ G \text{ est un graphe de dépendance (forte) de } Y \end{array} \right\}.$$

Le lemme local du Lovász

Question de la méthode probabiliste locale

Quelles sont les conditions sur p et G , tq $\mathbb{P}(Y_W = \vec{1}) > 0$, pour tout $W \in V$?

Theorem (Erdős & Lovász 73)

Si G a pour degré maximal D , alors

$$\forall p \geq 1 - \frac{D^D}{(D+1)^{(D+1)}, Y \in \mathcal{C}_G(p), W \in V : \\ \mathbb{P}(Y_W = \vec{1}) \geq \frac{1}{D^{|W|}} > 0.$$

La mesure de Shearer

Theorem (Shearer 85, Mathieu & T 11)

Il existe $p_{sh}^G \in [0, 1]$, tq:

Si $p \geq p_{sh}^G$, alors

$\exists! Z \in \mathcal{C}_G(p) : \forall Y \in \mathcal{C}_G(p), U \subsetneq W \in V :$

$$\mathbb{P}(Y_W = \vec{1} | Y_U = \vec{1}) \geq \mathbb{P}(Z_W = \vec{1} | Z_U = \vec{1}) > 0$$

sauf pour $(U, W) = (\{v\}, V \setminus \{v\})$ et $p = p_{sh}^G$.

Si $p < p_{sh}^G$, alors

$$\exists Z \in \mathcal{C}_G(p), \exists W \in V : \mathbb{P}(Z_W = \vec{1}) = 0.$$

Domination stochastique et paramètre dominé

Un CdB Y domine stochastiquement un CdB Z ssi $\mathbb{P}(Y \geq Z) = 1$.

Le paramètre dominé d'un CdB Y est

$$\sigma(Y) := \max \{c : Y \geq \Pi_c^V\}^{st}.$$

Pour une classe C de CdB on a

$$\sigma(C) := \inf \{\sigma(Y) : Y \in C\}$$

Les valeurs critiques sont

$$p_{dom}^G := \inf \{p : \forall Y \in \mathcal{C}_G : \sigma(Y) > 0\}$$

$$p_{udom}^G := \inf \{p : \sigma(\mathcal{C}_G(p)) > 0\}.$$

Résultats classiques

Theorem (Liggett, Schonmann & Stacey 97)

Si G a pour degré maximal D , alors

$$p_{\text{udom}}^G \leq 1 - \frac{(D-1)^{(D-1)}}{D^D}.$$

En particulier

$$\sigma(\mathcal{C}_G(1 - \frac{(D-1)^{(D-1)}}{D^D})) \geq \frac{1}{(D+1)^2}$$

et la limite monotone suivante existe

$$\lim_{p \rightarrow 1} \sigma(\mathcal{C}_G(p)) = 1.$$

Identification

Theorem (T 12)

On a

$$p_{udom}^G = p_{dom}^G = p_{sh}^G$$

et

$$\sigma(\mathcal{C}_G(p_{udom}^G)) \begin{cases} \geq (1 - p_{udom}^G)^2 & \text{si } G \text{ est infini} \\ = 0 & \text{si } G \text{ est fini.} \end{cases}$$

Sur un graphe de degré uniformément borné ça implique une transition discontinue de $\sigma(\mathcal{C}_G(p))$ à p_{udom}^G .

Quoi d'autre

- Transfert des bornes via le lien avec un gaz de réseau à noyau dur
- Aussi avec paramètres inhomogènes \vec{p} .
- Sous des conditions de dépendance plus faibles.
- Comportement asymptotique pour certaines classes (e.g. \mathbb{Z}^d)
- Bornes sur $\sigma(C(\rho))$.

Le gaz de réseau à noyau dur

Pour une **fugacité** $r > 0$ et dans une volume fini $W \in V$ la fonction de répartition d'un **gaz de réseau à noyau dur/modèle de polymères abstraits** est donnée par:

$$\lambda_{W,r}(A) := \begin{cases} \frac{\prod_{v \in A} r_v}{\Xi_{G(W)}(r)} & \text{si } A \text{ est indépendant} \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

avec **fonction de partition**

$$\Xi_{G(W)}(r) := \sum_{\text{indép } A \subseteq W} r^{|A|}.$$

Le lien avec la mesure de Shearer est:

$$\mathbb{P}(Z_W = \vec{1}) = \sum_{\substack{T \subseteq W \\ T \text{ indépendant}}} (p-1)^{|T|} =: \Xi_{G(W)}(p-1).$$

Transfert des bornes

La condition classique est **Dobrushin 96**: si G a pour degré maximal D , alors

$$p_{sh}^G \leq 1 - \max_{\mu > 0} \frac{\mu}{(1 + \mu)^{D+1}} = 1 - \frac{D^D}{(D + 1)^{(D+1)}}.$$

C'est justement le lemme local du Lovász.

Via des techniques d'expansion d'amas **Fernández & Procacci 07**

$$p_{sh}^G \leq 1 - \inf_{v \in V} \max_{\mu > 0} \frac{\mu}{\Xi_{G(\mathcal{N}_1(v))}(\mu)}$$

et **T 12**

$$p_{sh}^G \leq 1 - \inf_{v \in V, w \in \mathcal{N}(v)} \max_{\mu > 0} \frac{\mu}{(1 + \mu) \Xi_{G(\mathcal{N}(v) \setminus \{w\})}(\mu)}.$$

Bibliographie

- “Problems and results on 3-chromatic hypergraphs and some related questions” Erdős & Lovász 73
- “On a problem of Spencer” Shearer 85
- “The probabilistic method” Alon & Spencer 92
- “Domination by product measures” Liggett, Schonmann & Stacey 97
- “The repulsive lattice gas, the independent-set polynomial, and the Lovász local lemma” Scott & Sokal 05
- “Cluster expansion for abstract polymer models. New bounds from an old approach” Fernández & Procacci 07
- “K-independent percolation on trees” Mathieu & T 11
- “Shearer’s measure and stochastic domination of product measures” T 12