Mouvement brownien branchant avec sélection

PASCAL MAILLARD, directeur de thèse: ZHAN SHI

LPMA – Université Pierre et Marie Curie (Paris VI)

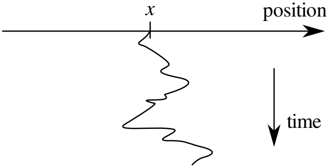
CIRM (Luminy) – 17 avril 2012

pascal.maillard upmc fr

Mouvement brownien branchant (BBM)

Définition

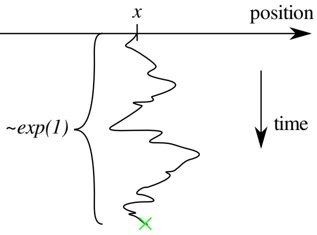
- Une particule diffuse selon un mouvement brownien issu de $x \in \mathbb{R}$.



Mouvement brownien branchant (BBM)

Définition

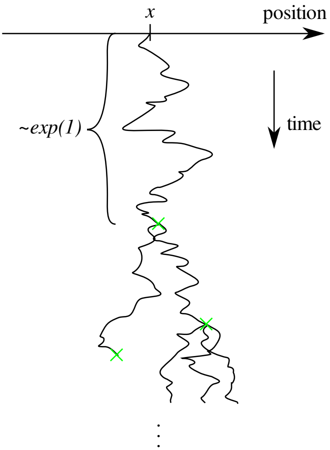
- Une particule diffuse selon un mouvement brownien issu de $x \in \mathbb{R}$.
- A taux 1, elle **branche**, *i.e.* elle meurt et donne naissance à L enfants (Var $L < \infty$).



Mouvement brownien branchant (BBM)

Définition

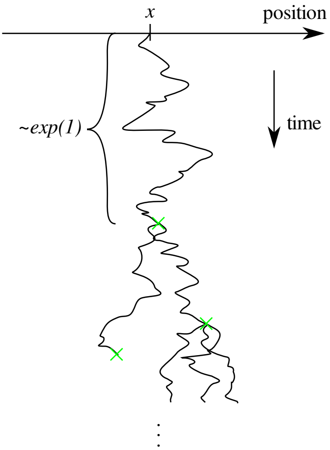
- Une particule diffuse selon un mouvement brownien issu de $x \in \mathbb{R}$.
- A taux 1, elle **branche**, *i.e.* elle meurt et donne naissance à L enfants ($\mathrm{Var}\, L < \infty$).
- Chaque enfant répète ce processus indépendamment des autres.



Mouvement brownien branchant (BBM) (2)

Context

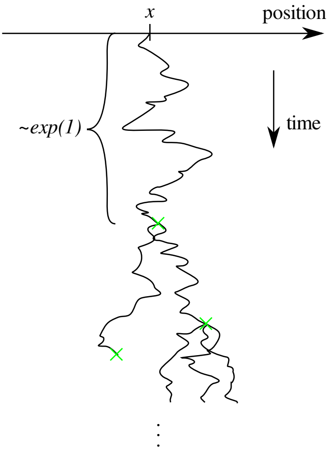
- Un exemple d'un processus de branchement multitype (espace des types: $\mathbb{R}$)



Mouvement brownien branchant (BBM) (2)

Context

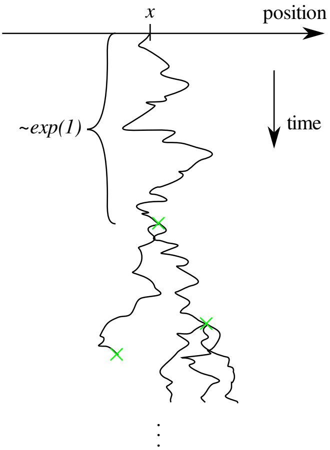
- Un exemple d'un processus de branchement multitype (espace des types: $\mathbb{R}$)
- Analogue discret : Marche aléatoire branchante



Mouvement brownien branchant (BBM) (2)

Context

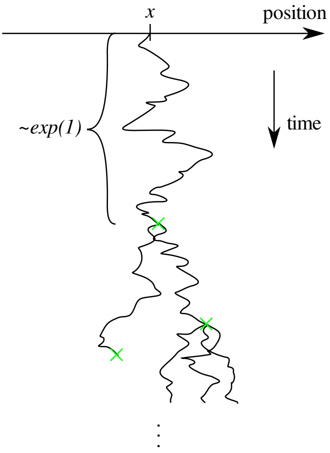
- Un exemple d'un processus de branchement multitype (espace des types: $\mathbb{R}$)
- Analogue discret : Marche aléatoire branchante
- Modèle d'une population asexuée avec mutations. Type/position = *fitness*.



Mouvement brownien branchant (BBM) (2)

Context

- Un exemple d'un processus de branchement multitype (espace des types: $\mathbb{R}$)
- Analogue discret : Marche aléatoire branchante
- Modèle d'une population asexuée avec mutations. Type/position = *fitness*.
- Autres interprétations : verre de spin (avec hiérarchie ∞); polymère dirigé sur un arbre; prototype de *travelling wave* (après)



Mouvement brownien branchant (BBM) (3)

Particule la plus à droite

On suppose que $m := E[L] - 1 > 0$. Soit R_t la position de la particule la plus à droite. Alors, quand $t \to \infty$, presque surement,

$$\frac{R_t}{t} \to \sqrt{2m} =: v_0.$$

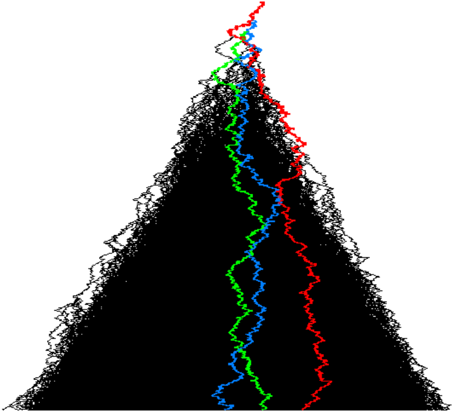


Image par Éric Brunet

La sélection entre en jeu...

Définition (Wikipédia)

En biologie, la sélection naturelle est l'un des mécanismes qui causent l'évolution des espèces. [...] la sélection naturelle est le fait que les traits qui favorisent la survie et la reproduction voient leur fréquence s'accroître d'une génération à l'autre.

La sélection entre en jeu...

Définition (Wikipédia)

En biologie, la sélection naturelle est l'un des mécanismes qui causent l'évolution des espèces. [...] la sélection naturelle est le fait que les traits qui favorisent la survie et la reproduction voient leur fréquence s'accroître d'une génération à l'autre.

Pour nous : Nous tuons les individus de la population de basse fitness, pour éviter que la population croisse trop vite (ressources limitées, espace....)

La sélection entre en jeu...

Définition (Wikipédia)

En biologie, la sélection naturelle est l'un des mécanismes qui causent l'évolution des espèces. [...] la sélection naturelle est le fait que les traits qui favorisent la survie et la reproduction voient leur fréquence s'accroître d'une génération à l'autre.

Pour nous : Nous tuons les individus de la population de basse fitness, pour éviter que la population croisse trop vite (ressources limitées, espace....)

Deux modèles fondamentaux

1. **BBM avec absorption** : $f(t)$ une fonction continue. On tue un individu quand sa position/fitness $X(t)$ devient plus petite que $f(t)$.

La sélection entre en jeu...

Définition (Wikipédia)

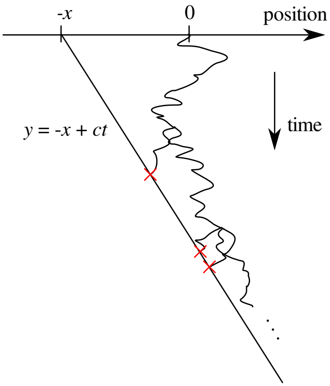
En biologie, la sélection naturelle est l'un des mécanismes qui causent l'évolution des espèces. [...] la sélection naturelle est le fait que les traits qui favorisent la survie et la reproduction voient leur fréquence s'accroître d'une génération à l'autre.

Pour nous : Nous tuons les individus de la population de basse fitness, pour éviter que la population croisse trop vite (ressources limitées, espace....)

Deux modèles fondamentaux

1. **BBM avec absorption** : $f(t)$ une fonction continue. On tue un individu quand sa position/fitness $X(t)$ devient plus petite que $f(t)$.
2. **BBM avec taille de population constante (*N*-BBM)** : On fixe $N \in \mathbb{N}$. Dès que le nombre d'individus dépasse N, on tue les individus les plus à gauche, afin de réduire la taille de la population à N.

Branching Brownian motion with absorption



Normalement on prend $f(t) = -x + ct$ (barrière linéaire). A été étudié en détail, entre autre par Kesten(78), Neveu(87), Biggins–Kyprianou(04), Kyprianou(04), Harris–Harris–Kyprianou(06), Gantert–Hu–Shi(11), 2×Berestycki–Schweinsberg(10,10), Addario-Berry–Broutin(10), Aïdékon(10), M.(10), Aïdékon–Hu–Zindy(11)... et dans la littérature physique...

BBM avec taille de population constante (N-BBM)

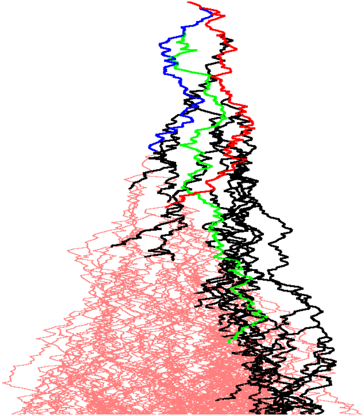


Image par Éric Brunet

Beaucoup plus dur que BBM avec absorption:

- forte interaction entre les particules
- pas de description exacte par des équations différentielles

BBM avec taille de population constante (N-BBM)

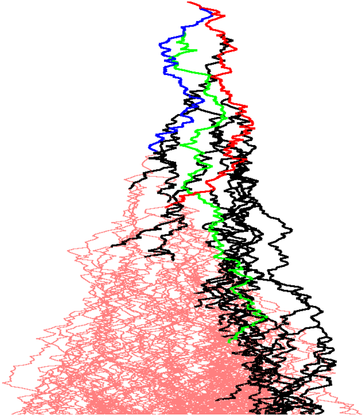


Image par Éric Brunet

Beaucoup plus dur que BBM avec absorption:

- forte interaction entre les particules
- pas de description exacte par des équations différentielles

A présent seulement deux études rigoureuses : Bérard–Gouéré(10), Durrett–Remenik(09)

BBM avec taille de population constante (N-BBM)

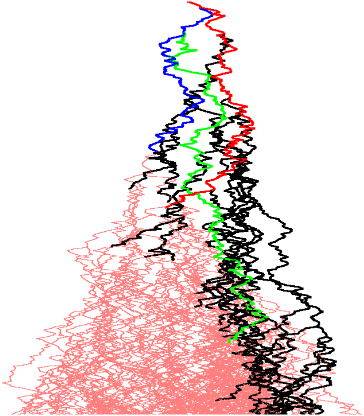


Image par Éric Brunet

Beaucoup plus dur que BBM avec absorption:

- forte interaction entre les particules
- pas de description exacte par des équations différentielles

A présent seulement deux études rigoureuses : Bérard–Gouéré(10), Durrett–Remenik(09)

MAIS : Heuristique détaillée grâce aux travaux de physiciens : Brunet–Derrida(97,99,01,04), Brunet–Derrida–Mueller–Munier(06,06,07)

Heuristique du N-BBM (BDMM 06)

- La plupart du temps, le nuage de particule se déplace à vitesse constante $v_N^{\mathrm{det}} = v_0\sqrt{1 - \frac{\pi^2}{\log^2 N}}$, ayant un profil “stationnaire”.

Heuristique du N-BBM (BDMM 06)

- La plupart du temps, le nuage de particule se déplace à vitesse constante $v_N^{\mathrm{det}} = v_0\sqrt{1 - \frac{\pi^2}{\log^2 N}}$, ayant un profil “stationnaire”.
- Après un temps d’ordre $\log^3 N$, une particule “s’évade” vers la droite

Heuristique du N-BBM (BDMM 06)

- La plupart du temps, le nuage de particule se déplace à vitesse constante $v_N^{\mathrm{det}} = v_0\sqrt{1 - \frac{\pi^2}{\log^2 N}}$, ayant un profil “stationnaire”.
- Après un temps d’ordre $\log^3 N$, une particule “s’évade” vers la droite
- Cette particule génère un grand nombre de descendants (d’ordre N), ce qui entraîne un saut (d’ordre 1) du système vers la droite.

Heuristique du N-BBM (BDMM 06)

- La plupart du temps, le nuage de particule se déplace à vitesse constante $v_N^{\mathrm{det}} = v_0\sqrt{1 - \frac{\pi^2}{\log^2 N}}$, ayant un profil “stationnaire”.
- Après un temps d’ordre $\log^3 N$, une particule “s’évade” vers la droite
- Cette particule génère un grand nombre de descendants (d’ordre N), ce qui entraîne un saut (d’ordre 1) du système vers la droite.
- Le système retrouve sa forme stationnaire au bout d’un temps d’ordre $\log^2 N$, puis répète ce processus.

Heuristique du N-BBM (BDMM 06)

- La plupart du temps, le nuage de particule se déplace à vitesse constante $v_N^{\text{det}} = v_0\sqrt{1 - \frac{\pi^2}{\log^2 N}}$, ayant un profil “stationnaire”.
- Après un temps d’ordre $\log^3 N$, une particule “s’évade” vers la droite
- Cette particule génère un grand nombre de descendants (d’ordre N), ce qui entraîne un saut (d’ordre 1) du système vers la droite.
- Le système retrouve sa forme stationnaire au bout d’un temps d’ordre $\log^2 N$, puis répète ce processus.

Heuristique du N-BBM (BDMM 06)

- La plupart du temps, le nuage de particule se déplace à vitesse constante $v_N^{\mathrm{det}} = v_0\sqrt{1 - \frac{\pi^2}{\log^2 N}}$, ayant un profil “stationnaire”.
- Après un temps d’ordre $\log^3 N$, une particule “s’évade” vers la droite
- Cette particule génère un grand nombre de descendants (d’ordre N), ce qui entraîne un saut (d’ordre 1) du système vers la droite.
- Le système retrouve sa forme stationnaire au bout d’un temps d’ordre $\log^2 N$, puis répète ce processus.

Heuristique du N-BBM (BDMM 06)

- La plupart du temps, le nuage de particule se déplace à vitesse constante $v_N^{\text{det}} = v_0\sqrt{1 - \frac{\pi^2}{\log^2 N}}$, ayant un profil “stationnaire”.
- Après un temps d'ordre $\log^3 N$, une particule “s'évade” vers la droite
- Cette particule génère un grand nombre de descendants (d'ordre N), ce qui entraîne un saut (d'ordre 1) du système vers la droite.
- Le système retrouve sa forme stationnaire au bout d'un temps d'ordre $\log^2 N$, puis répète ce processus.

En total, la vitesse du système est $v_N + O(1)$, où

$$v_N = v_0\sqrt{1 - \frac{\pi^2}{(\log N + 3\log\log N)^2}} = v_N^{\text{det}} + v_0\frac{3\pi^2\log\log N}{\log^3 N} + o(1),$$

avec des fluctuations d'ordre $1/\log^3 N$.

Résultat principal

$L_N(t)$: position de la particule la plus à gauche (barycentre, médian...) au temps t.

Résultat principal

$L_N(t)$: position de la particule la plus à gauche (barycentre, médian...) au temps t.

Theorem (M. (en préparation))

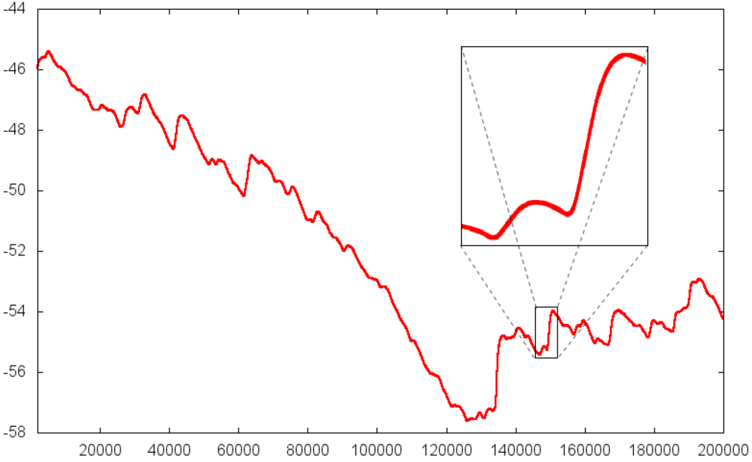
On suppose qu'au temps 0 *les* N *particules se trouvent en "phase stationnaire". Alors,*

$$\left(L_N(t\log^3 N) - v_N t\log^3 N\right)_{t\geq 0} \xrightarrow{\text{fidis}} (L_t)_{t\geq 0}.$$

où $(L_t)_{t\geq 0}$ *est un processus de Lévy avec une certaine dérive* $c \in \mathbb{R}$*, sans composant brownien et de mesure de Lévy* ν*, où*

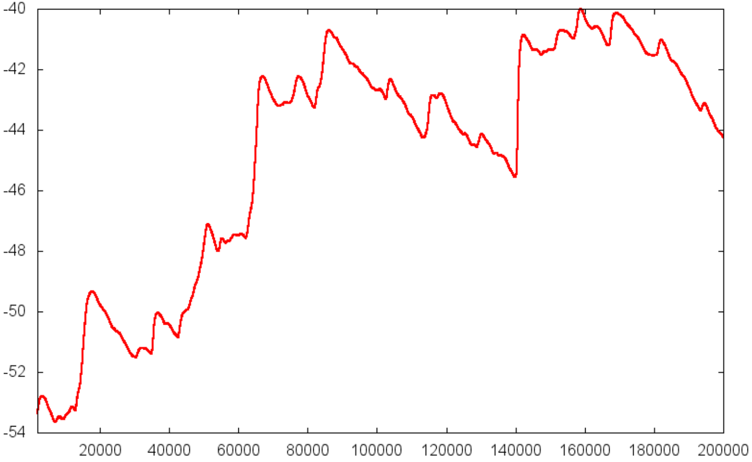
$$\nu([x,\infty)) = v_0^2\pi^2 \frac{1}{e^{v_0 x}-1} \quad \text{and} \quad \operatorname{supp}\nu = (0,\infty).$$

Simulation – position (recentrée) du barycentre



10^{10} particles

Simulation – position (recentrée) du barycentre (2)



10^{10} particles

Idée de la preuve

Approcher le N-BBM par le BBM avec une barrière absorbante bien choisie ; on note sa position X_t.

Idée de la preuve

Approcher le N-BBM par le BBM avec une barrière absorbante bien choisie ; on note sa position X_t.

1. Tant qu'aucune particule ne s'évade, $X_t = (v_N - A)t$, pour A grand $\longrightarrow$ régime étudié par BBS (10)

Idée de la preuve

Approcher le N-BBM par le BBM avec une barrière absorbante bien choisie ; on note sa position X_t.

1. Tant qu'aucune particule ne s'évade, $X_t = (v_N - A)t$, pour A grand $\longrightarrow$ régime étudié par BBS (10)
2. Quant une particule s'évade, on pose

$$X_t = (v_N - A)t + f_\Delta(t \log^2 N),$$

pour une certaine variable aléatoire Δ et une certaine famille de fonctions croissantes $(f_x)_{x \geq 0}$ données explicitement (par la fonction theta de Jacobi), et satisfaisant $f_x(0) = 0$, $f_x(\infty) = x$.

Idée de la preuve

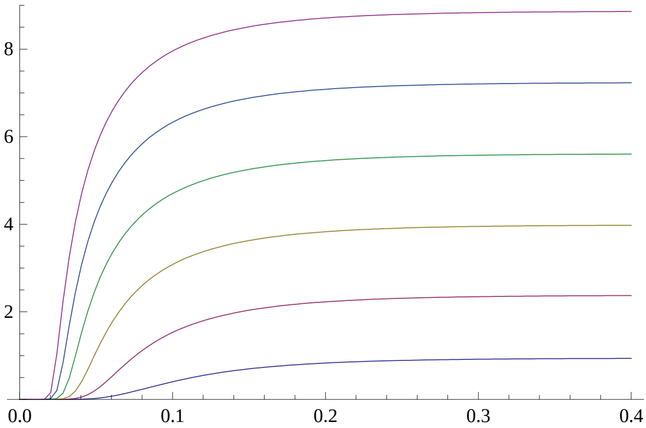
Approcher le N-BBM par le BBM avec une barrière absorbante bien choisie ; on note sa position X_t.

1. Tant qu'aucune particule ne s'évade, $X_t = (v_N - A)t$, pour A grand $\longrightarrow$ régime étudié par BBS (10)
2. Quant une particule s'évade, on pose

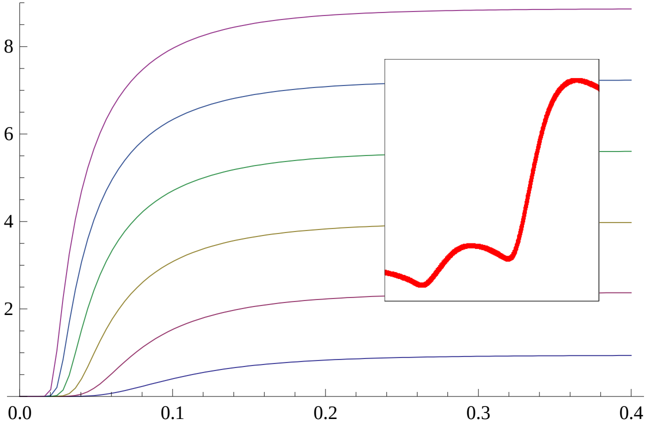
$$X_t = (v_N - A)t + f_\Delta(t \log^2 N),$$

   pour une certaine variable aléatoire Δ et une certaine famille de fonctions croissantes $(f_x)_{x \geq 0}$ données explicitement (par la fonction theta de Jacobi), et satisfaisant $f_x(0) = 0$, $f_x(\infty) = x$.
3. Après relaxation: répéter.

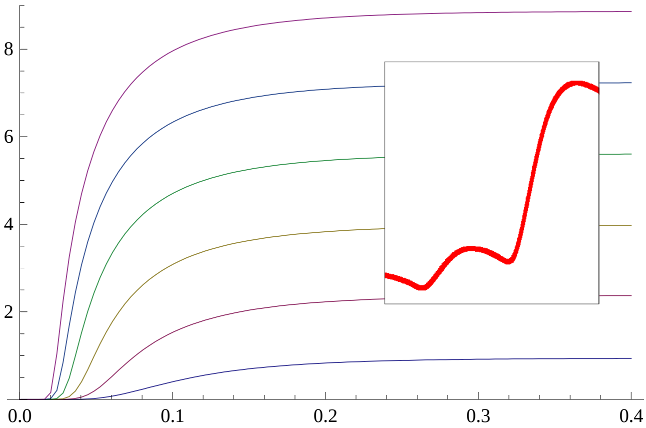
Les fonctions f_x



Les fonctions f_x



Les fonctions f_x



NB : Preuve simple que cette fonction est monotone $\longrightarrow$ question sur MathOverflow.

Relation avec équation FKPP bruitée

Équation FKPP bruitée

$$\begin{cases} u(t,x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to [0,1] \\ \partial_t u = \partial_{xx}^2 u + u(1-u) + \varepsilon\sqrt{u(1-u)}\dot{W} \\ u(0,x) = \mathbf{1}_{(x<0)} \qquad \text{(IC)} \end{cases}$$

Relation avec équation FKPP bruitée

Équation FKPP bruitée

$$\begin{cases} u(t,x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to [0,1] \\ \partial_t u = \partial_{xx}^2 u + u(1-u) + \varepsilon\sqrt{u(1-u)}\dot{W} \\ u(0,x) = \mathbf{1}_{(x<0)} \qquad \text{(IC)} \end{cases}$$

- Admet des solutions “travelling wave” de phénoménologie identique à celle du N-BBM ($N \sim \varepsilon^{-2}$)

Relation avec équation FKPP bruitée

Équation FKPP bruitée

$$\begin{cases} u(t,x) : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to [0,1] \\ \partial_t u = \partial_{xx}^2 u + u(1-u) + \varepsilon\sqrt{u(1-u)}\dot{W} \\ u(0,x) = \mathbf{1}_{(x<0)} \qquad \text{(IC)} \end{cases}$$

- Admet des solutions “travelling wave” de phénoménologie identique à celle du N-BBM ($N \sim \varepsilon^{-2}$)
- Duale au BBM avec coalescence de particules à taux ε^2.

TODO

- Généalogie (coalescent de Bolthausen–Sznitman)
- Vitesse
- Lien avec processus de Fleming–Viot
- Processus de Lévy branchants, marches aléatoires branchantes
- Milieux inhomogènes/aléatoires
- ...

TODO

- Généalogie (coalescent de Bolthausen–Sznitman)
- Vitesse
- Lien avec processus de Fleming–Viot
- Processus de Lévy branchants, marches aléatoires branchantes
- Milieux inhomogènes/aléatoires
- ...

Merci pour votre attention !

(et bon ap')