

La triangulation brownienne :
une limite universelle de configurations non-croisées
aléatoires
(travail avec Nicolas Curien)

Igor Kortchemski (Université Paris-Sud, Orsay)

Colloque JPS 2012, CIRM, 17 avril 2012

Philosophie générale

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite d'objets « discrets » convergeant vers un objet « continu » X :

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X.$$

Philosophie générale

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite d'objets « discrets » convergeant vers un objet « continu » X :

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X.$$

Plusieurs intérêts :

- *Du discret au continu* : si une certaine propriété \mathcal{P} est vérifiée par tous les X_n et passe à la limite, X vérifie \mathcal{P} .

Philosophie générale

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite d'objets « discrets » convergeant vers un objet « continu » X :

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X.$$

Plusieurs intérêts :

- *Du discret au continu* : si une certaine propriété \mathcal{P} est vérifiée par tous les X_n et passe à la limite, X vérifie \mathcal{P} .
- *Du continu au discret* : si une certaine propriété \mathcal{P} est vérifiée par X et passe à la limite, X_n vérifie « à peu près » \mathcal{P} pour n grand.

Philosophie générale

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite d'objets « discrets » convergeant vers un objet « continu » X :

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X.$$

Plusieurs intérêts :

- *Du discret au continu* : si une certaine propriété \mathcal{P} est vérifiée par tous les X_n et passe à la limite, X vérifie \mathcal{P} .
- *Du continu au discret* : si une certaine propriété \mathcal{P} est vérifiée par X et passe à la limite, X_n vérifie « à peu près » \mathcal{P} pour n grand.
- *Universalité* : si $(Y_n)_{n \geq 1}$ est une autre suite d'objets qui converge vers X , alors X_n et Y_n ont à peu près les mêmes propriétés pour n grand.

Philosophie générale

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite d'objets « discrets » convergeant vers un objet « continu » X :

$$X_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} X.$$

Plusieurs intérêts :

- *Du discret au continu* : si une certaine propriété \mathcal{P} est vérifiée par tous les X_n et passe à la limite, X vérifie \mathcal{P} .
- *Du continu au discret* : si une certaine propriété \mathcal{P} est vérifiée par X et passe à la limite, X_n vérifie « à peu près » \mathcal{P} pour n grand.
- *Universalité* : si $(Y_n)_{n \geq 1}$ est une autre suite d'objets qui converge vers X , alors X_n et Y_n ont à peu près les mêmes propriétés pour n grand.

Quel est le sens de la convergence lorsque les objets sont **aléatoires** ?
 → **Convergence en distribution**

Plan

I. PRÉSENTATION DES OBJETS DISCRETS

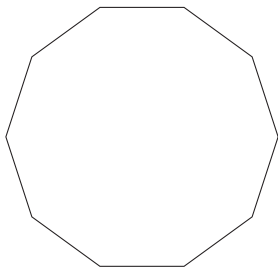
II. CONSTRUCTION DE L'OBJET LIMITE

III. IDÉE DE LA PREUVE DE LA CONVERGENCE

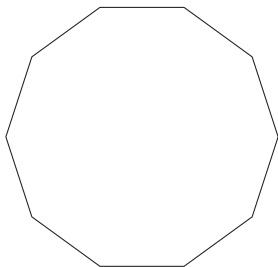
**IV. APPLICATION À L'ÉTUDE DES PROPRIÉTÉS COMBINATOIRES
DES DISSECTIONS**

I. PRÉSENTATION DES OBJETS DISCRETS

Soit P_n le polygône dont les sommets sont $e^{\frac{2i\pi j}{n}}$ ($j = 0, 1, \dots, n - 1$).

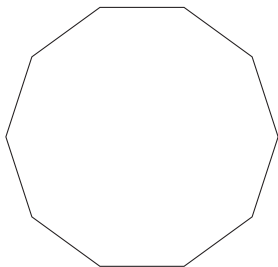


Soit P_n le polygône dont les sommets sont $e^{\frac{2i\pi j}{n}}$ ($j = 0, 1, \dots, n - 1$).



Philosophie générale: on choisit au hasard une configuration **non-croisée** obtenue à partir des sommets de P_n , c'est-à-dire un ensemble de diagonales qui ne se coupent pas.

Soit P_n le polygône dont les sommets sont $e^{\frac{2i\pi j}{n}}$ ($j = 0, 1, \dots, n - 1$).



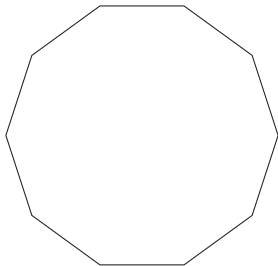
Philosophie générale: on choisit au hasard une configuration **non-croisée** obtenue à partir des sommets de P_n , c'est-à-dire un ensemble de diagonales qui ne se coupent pas.

Que se passe-t-il pour n grand ?

Cas des dissections de P_n .

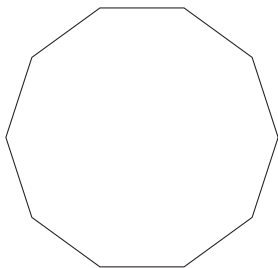
Dissections

Soit P_n le polygône dont les sommets sont $e^{\frac{2i\pi j}{n}}$ ($j = 0, 1, \dots, n - 1$).



Dissections

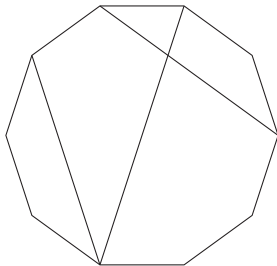
Soit P_n le polygône dont les sommets sont $e^{\frac{2i\pi j}{n}}$ ($j = 0, 1, \dots, n - 1$).



Une **dissection** de P_n est l'union des côtés de P_n et d'une collection de diagonales qui ne peuvent s'intersecter qu'en leurs extrémités (c-à-d **non croisées**).

Dissections

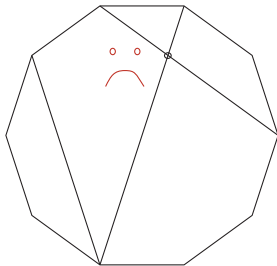
Soit P_n le polygône dont les sommets sont $e^{\frac{2i\pi j}{n}}$ ($j = 0, 1, \dots, n - 1$).



Une **dissection** de P_n est l'union des côtés de P_n et d'une collection de diagonales qui ne peuvent s'intersecter qu'en leurs extrémités (c-à-d **non croisées**).

Dissections

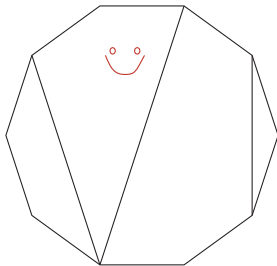
Soit P_n le polygône dont les sommets sont $e^{\frac{2i\pi j}{n}}$ ($j = 0, 1, \dots, n - 1$).



Une **dissection** de P_n est l'union des côtés de P_n et d'une collection de diagonales qui ne peuvent s'intersecter qu'en leurs extrémités (c-à-d **non croisées**).

Dissections

Soit P_n le polygône dont les sommets sont $e^{\frac{2i\pi j}{n}}$ ($j = 0, 1, \dots, n - 1$).



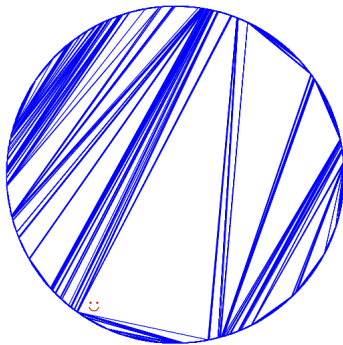
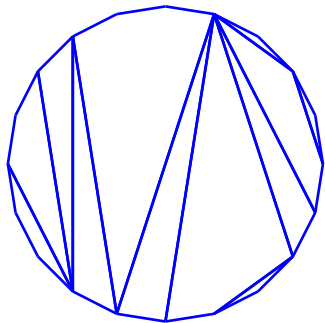
Une **dissection** de P_n est l'union des côtés de P_n et d'une collection de diagonales qui ne peuvent s'intersecter qu'en leurs extrémités (c-à-d **non croisées**).

Dissections

Soit \mathcal{D}_n une dissection aléatoire, **uniformément** distribuée parmi toutes les dissections de P_n . À quoi ressemble \mathcal{D}_n lorsque n est très grand ?

Dissections

Soit \mathcal{D}_n une dissection aléatoire, **uniformément** distribuée parmi toutes les dissections de P_n . À quoi ressemble \mathcal{D}_n lorsque n est très grand ?

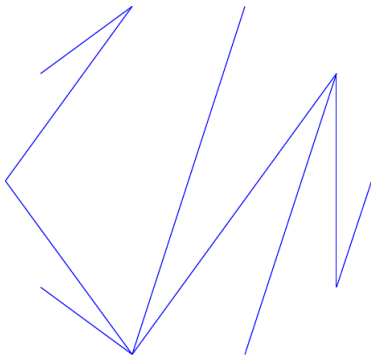


Exemple de réalisations de \mathcal{D}_{18} et \mathcal{D}_{15000} .

Cas des arbres **non croisés** de \mathcal{P}_n .

Arbres non croisés

Exemple d'arbre **non croisé** de P_{10} :

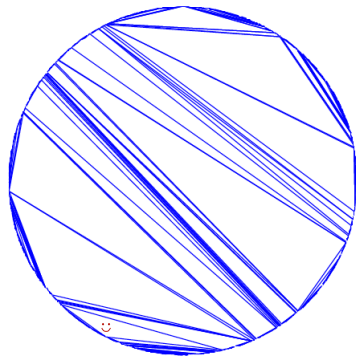
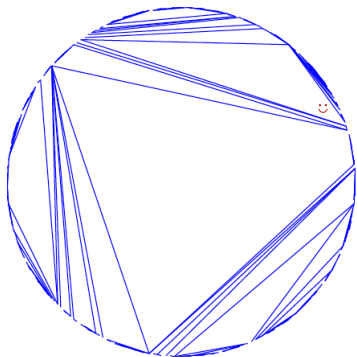


Arbres non croisés

On choisit aléatoirement \mathcal{T}_n un arbre **non croisé**, **uniformément** parmi tous ceux de \mathcal{P}_n . À quoi ressemble \mathcal{T}_n pour n grand ?

Arbres non croisés

On choisit aléatoirement \mathcal{T}_n un arbre **non croisé**, **uniformément** parmi tous ceux de \mathcal{P}_n . À quoi ressemble \mathcal{T}_n pour n grand ?

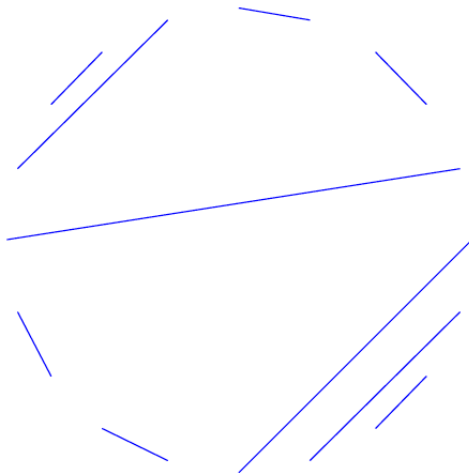


Exemple de réalisations de \mathcal{T}_{500} et \mathcal{T}_{1000} .

Cas des transpositions **non croisées** de P_{2n} .

Transpositions non croisées

Exemple de transposition **non croisée** de P_{20} :

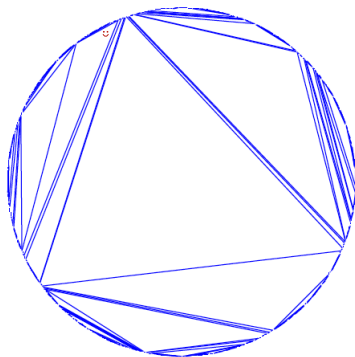
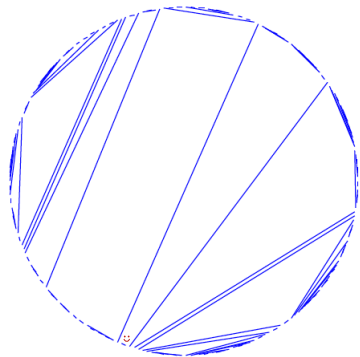


Transpositions non croisées

On choisit aléatoirement Q_n une transposition **non croisée** de P_{2n} ,
uniformément parmi tous ceux de P_{2n} . À quoi ressemble Q_n pour n grand ?

Transpositions non croisées

On choisit aléatoirement \mathcal{Q}_n une transposition **non croisée** de P_{2n} ,
uniformément parmi tous ceux de P_{2n} . À quoi ressemble \mathcal{Q}_n pour n grand ?



Exemple de réalisations de \mathcal{Q}_{250} et \mathcal{Q}_{1000} .

Petit historique

Point de vue combinatoire :

- ▶ Comptage et bijections d'arbres non croisés : Dulucq & Penaud (1993), Noy (1998), ...
- ▶ Comptage de diverses configurations non croisées : Flajolet & Noy (1999)

Petit historique

Point de vue combinatoire :

- ▶ Comptage et bijections d'arbres non croisés : Dulucq & Penaud (1993), Noy (1998), ...
- ▶ Comptage de diverses configurations non croisées : Flajolet & Noy (1999)

Point de vue combinatoire probabiliste :

- ▶ Triangulations uniformes (degré maximal) : Devroye, Flajolet, Hurtado, Noy & Steiger (1999) et Gao & Wormald (2000)
- ▶ Arbres non croisés uniformes (somme des longueurs, degré maximal) : Deutsch & Noy (2002), Marckert & Panholzer (2002)
- ▶ Dissections uniformes (degrés, degré maximal) : Bernasconi, Panagiotou & Steger (2010)

Petit historique

Point de vue combinatoire :

- ▶ Comptage et bijections d'arbres non croisés : Dulucq & Penaud (1993), Noy (1998), ...
- ▶ Comptage de diverses configurations non croisées : Flajolet & Noy (1999)

Point de vue combinatoire probabiliste :

- ▶ Triangulations uniformes (degré maximal) : Devroye, Flajolet, Hurtado, Noy & Steiger (1999) et Gao & Wormald (2000)
- ▶ Arbres non croisés uniformes (somme des longueurs, degré maximal) : Deutsch & Noy (2002), Marckert & Panholzer (2002)
- ▶ Dissections uniformes (degrés, degré maximal) : Bernasconi, Panagiotou & Steger (2010)

Point de vue géométrique :

- ▶ Aldous (1994) : grandes triangulations uniformes
- ▶ K' (2011) : dissections favorisant les grandes faces (non uniformes)

II. CONSTRUCTION DE L'OBJET LIMITE :

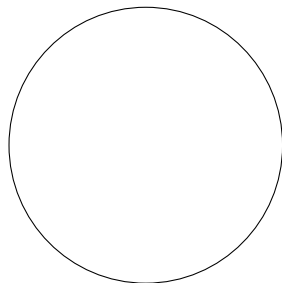
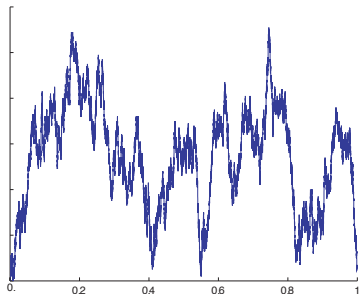
la **triangulation brownienne** (Aldous, '94)

Construction de l'objet limite

On part de l'excursion brownienne e :

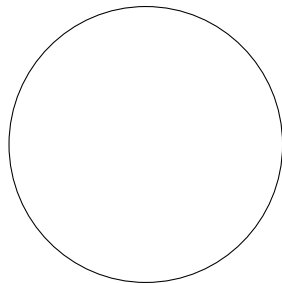
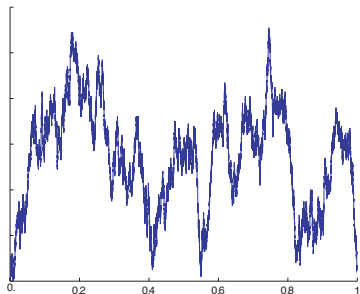
Construction de l'objet limite

On part de l'excursion brownienne e :



Construction de l'objet limite

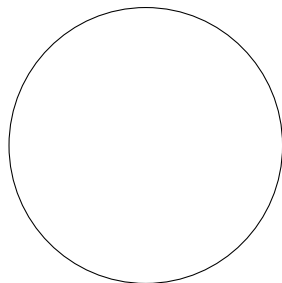
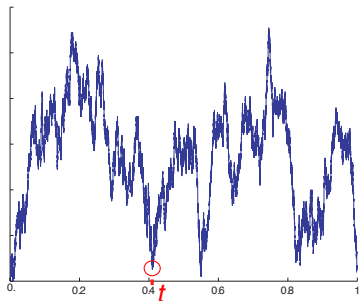
On part de l'excursion brownienne e :



Soit t un instant de minimum local.

Construction de l'objet limite

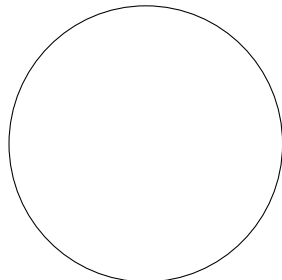
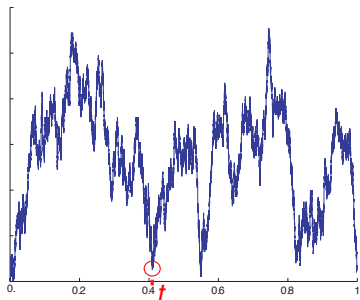
On part de l'excursion brownienne e :



Soit t un instant de minimum local.

Construction de l'objet limite

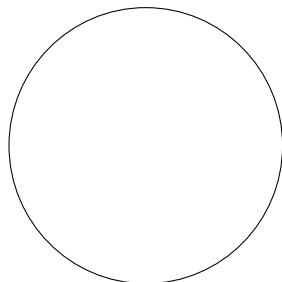
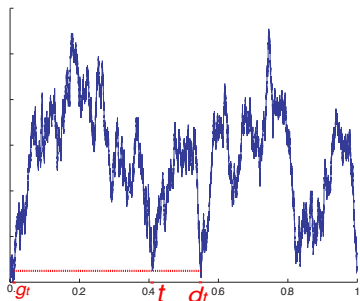
On part de l'excursion brownienne e :



Soit t un instant de minimum local. On note $g_t = \sup\{s < t; e_s = e_t\}$ et $d_t = \inf\{s > t; e_s = e_t\}$.

Construction de l'objet limite

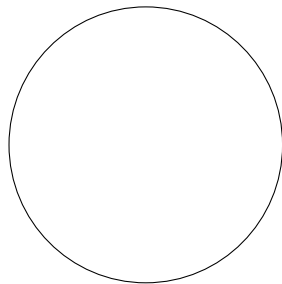
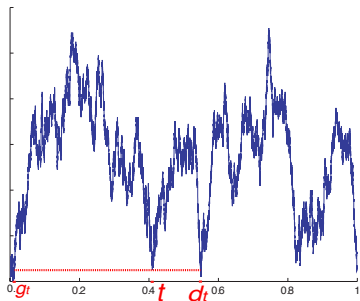
On part de l'excursion brownienne e :



Soit t un instant de minimum local. On note $g_t = \sup\{s < t; e_s = e_t\}$ et $d_t = \inf\{s > t; e_s = e_t\}$.

Construction de l'objet limite

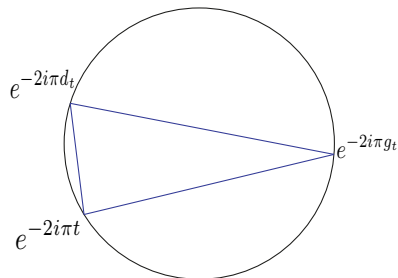
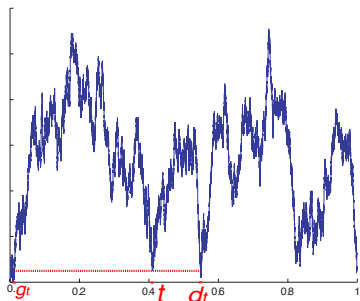
On part de l'excursion brownienne e :



Soit t un instant de minimum local. On note $g_t = \sup\{s < t; e_s = e_t\}$ et $d_t = \inf\{s > t; e_s = e_t\}$. On trace alors les cordes $[e^{-2i\pi g_t}, e^{-2i\pi t}]$, $[e^{-2i\pi t}, e^{-2i\pi d_t}]$ et $[e^{-2i\pi g_t}, e^{-2i\pi d_t}]$.

Construction de l'objet limite

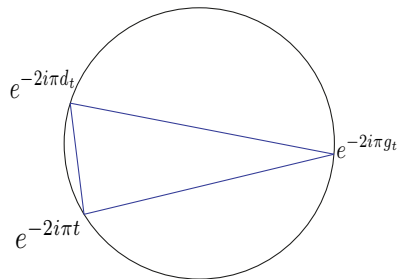
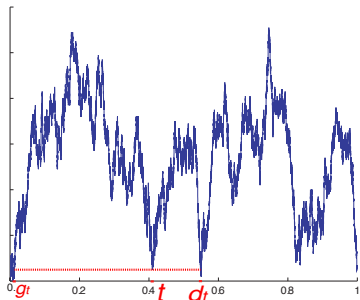
On part de l'excursion brownienne e :



Soit t un instant de minimum local. On note $g_t = \sup\{s < t; e_s = e_t\}$ et $d_t = \inf\{s > t; e_s = e_t\}$. On trace alors les cordes $[e^{-2i\pi g_t}, e^{-2i\pi t}]$, $[e^{-2i\pi t}, e^{-2i\pi d_t}]$ et $[e^{-2i\pi g_t}, e^{-2i\pi d_t}]$.

Construction de l'objet limite

On part de l'excursion brownienne e :

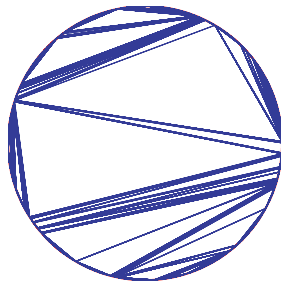
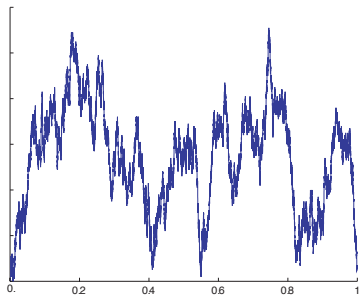


Soit t un instant de minimum local. On note $g_t = \sup\{s < t; e_s = e_t\}$ et $d_t = \inf\{s > t; e_s = e_t\}$. On trace alors les cordes $[e^{-2i\pi g_t}, e^{-2i\pi t}]$, $[e^{-2i\pi t}, e^{-2i\pi d_t}]$ et $[e^{-2i\pi g_t}, e^{-2i\pi d_t}]$.

On fait cela pour tous les instants de minimum local.

Construction de l'objet limite

On part de l'excursion brownienne e :

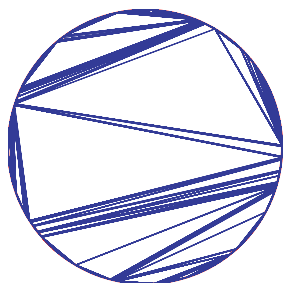
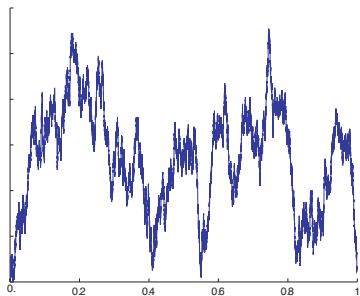


Soit t un instant de minimum local. On note $g_t = \sup\{s < t; e_s = e_t\}$ et $d_t = \inf\{s > t; e_s = e_t\}$. On trace alors les cordes $[e^{-2i\pi g_t}, e^{-2i\pi t}]$, $[e^{-2i\pi t}, e^{-2i\pi d_t}]$ et $[e^{-2i\pi g_t}, e^{-2i\pi d_t}]$.

On fait cela pour tous les instants de minimum local.

Construction de l'objet limite

On part de l'excursion brownienne e :



Soit t un instant de minimum local. On note $g_t = \sup\{s < t; e_s = e_t\}$ et $d_t = \inf\{s > t; e_s = e_t\}$. On trace alors les cordes $[e^{-2i\pi g_t}, e^{-2i\pi t}]$, $[e^{-2i\pi t}, e^{-2i\pi d_t}]$ et $[e^{-2i\pi g_t}, e^{-2i\pi d_t}]$.

On fait cela pour tous les instants de minimum local.

L'adhérence de l'objet obtenu, notée $L(e)$, est appelée **triangulation brownienne**.

Théorème (Curien & K. '12)

Pour $n \geq 3$, soit χ_n une dissection *uniforme* de P_n , ou un arbre *non croisé uniforme* de P_n ou encore une transposition *non croisée uniforme* de P_{2n} .

Théorème (Curien & K. '12)

Pour $n \geq 3$, soit χ_n une dissection *uniforme* de P_n , ou un arbre *non croisé uniforme* de P_n ou encore une transposition *non croisée uniforme* de P_{2n} . Alors :

$$\chi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} L(e),$$

Théorème (Curien & K. '12)

Pour $n \geq 3$, soit χ_n une dissection *uniforme* de P_n , ou un arbre *non croisé uniforme* de P_n ou encore une transposition *non croisée uniforme* de P_{2n} . Alors :

$$\chi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} L(e),$$

où la convergence a lieu en loi au sens de la distance de Hausdorff parmi les sous-ensembles compacts du disque.

Théorème (Curien & K. '12)

Pour $n \geq 3$, soit χ_n une dissection *uniforme* de P_n , ou un arbre *non croisé uniforme* de P_n ou encore une transposition *non croisée uniforme* de P_{2n} . Alors :

$$\chi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} L(\mathbb{D}),$$

où la convergence a lieu en loi au sens de la distance de Hausdorff parmi les sous-ensembles compacts du disque.

Remarques :

- ▶ Aldous '94 : cette convergence a lieu lorsque χ_n est une triangulation *uniforme* de P_n .

Théorème (Curien & K. '12)

Pour $n \geq 3$, soit χ_n une dissection *uniforme* de P_n , ou un arbre *non croisé uniforme* de P_n ou encore une transposition *non croisée uniforme* de P_{2n} . Alors :

$$\chi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} L(e),$$

où la convergence a lieu en loi au sens de la distance de Hausdorff parmi les sous-ensembles compacts du disque.

Remarques :

- ▶ Aldous '94 : cette convergence a lieu lorsque χ_n est une triangulation *uniforme* de P_n .
- ▶ Il existe un équivalent « stable » de $L(e)$ avec de gros trous (K. '11).

Théorème (Curien & K. '12)

Pour $n \geq 3$, soit χ_n une dissection *uniforme* de P_n , ou un arbre *non croisé uniforme* de P_n ou encore une transposition *non croisée uniforme* de P_{2n} . Alors :

$$\chi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} L(\mathfrak{e}),$$

où la convergence a lieu en loi au sens de la distance de Hausdorff parmi les sous-ensembles compacts du disque.

Conséquences :

- ▶ La longueur de la plus longue diagonale de χ_n converge en loi vers la mesure de probabilité de densité :

Théorème (Curien & K. '12)

Pour $n \geq 3$, soit χ_n une dissection *uniforme* de P_n , ou un arbre *non croisé uniforme* de P_n ou encore une transposition *non croisée uniforme* de P_{2n} . Alors :

$$\chi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} L(\mathfrak{e}),$$

où la convergence a lieu en loi au sens de la distance de Hausdorff parmi les sous-ensembles compacts du disque.

Conséquences :

- ▶ La longueur de la plus longue diagonale de χ_n converge en loi vers la mesure de probabilité de densité :

$$\frac{1}{\pi} \frac{3x - 1}{x^2(1-x)^2\sqrt{1-2x}} \mathbf{1}_{\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}} dx.$$

Théorème (Curien & K. '12)

Pour $n \geq 3$, soit χ_n une dissection *uniforme* de P_n , ou un arbre *non croisé uniforme* de P_n ou encore une transposition *non croisée uniforme* de P_{2n} . Alors :

$$\chi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} L(e),$$

où la convergence a lieu en loi au sens de la distance de Hausdorff parmi les sous-ensembles compacts du disque.

Conséquences :

- ▶ La longueur de la plus longue diagonale de χ_n converge en loi vers la mesure de probabilité de densité :

$$\frac{1}{\pi} \frac{3x - 1}{x^2(1-x)^2\sqrt{1-2x}} \mathbf{1}_{\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}} dx.$$

Ceci provient d'un petit calcul dans le cas des triangulations uniformes (Aldous '94) !

Théorème (Curien & K. '12)

Pour $n \geq 3$, soit χ_n une dissection *uniforme* de P_n , ou un arbre *non croisé uniforme* de P_n ou encore une transposition *non croisée uniforme* de P_{2n} . Alors :

$$\chi_n \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{(d)} L(e),$$

où la convergence a lieu en loi au sens de la distance de Hausdorff parmi les sous-ensembles compacts du disque.

Conséquences :

- ▶ La longueur de la plus longue diagonale de χ_n converge en loi vers la mesure de probabilité de densité :

$$\frac{1}{\pi} \frac{3x - 1}{x^2(1-x)^2\sqrt{1-2x}} \mathbf{1}_{\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2}} dx.$$

Ceci provient d'un petit calcul dans le cas des triangulations uniformes (Aldous '94) !

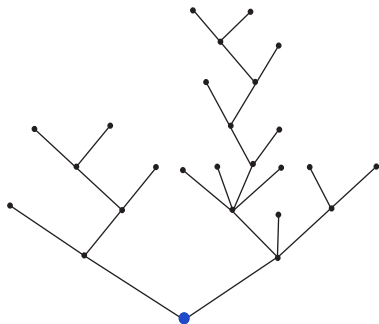
- ▶ L'aire de la plus grande face de χ_n converge en loi vers l'aire de la plus grande face de $L(e)$.

**III. COMMENT PROUVER LA CONVERGENCE DE TOUS CES
MODÈLES NON CROISÉS UNIFORMES VERS LA TRIANGULATION
BROWNIENNE ?**

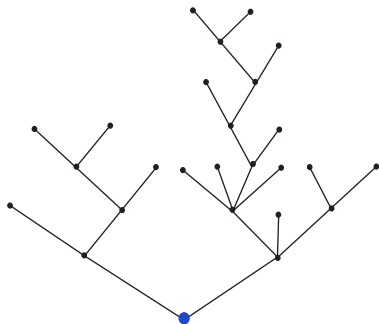
III. COMMENT PROUVER LA CONVERGENCE DE TOUS CES MODÈLES **NON CROISÉS UNIFORMES** VERS LA **TRIANGULATION BROWNIENNE ?**

Point clé : chacun de ces modèles peut-être codé par un arbre de Galton-Watson **conditionné**.

Codage des arbres



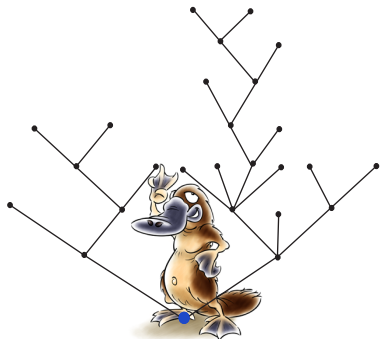
Codage des arbres



Définition (de la fonction de contour)

Un ornithorynque explore l'arbre à une vitesse unité. Pour $0 \leq t \leq 2(\zeta(\tau) - 1)$, $C_t(\tau)$ est défini comme étant la distance entre la racine et la position de l'animal à l'instant t .

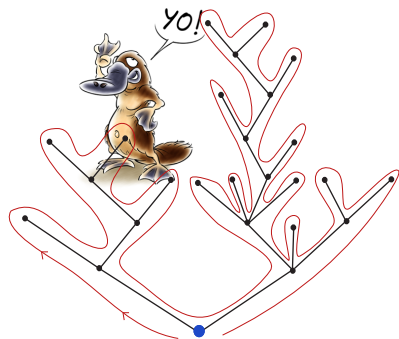
Codage des arbres



Définition (de la fonction de contour)

Un ornithorynque explore l'arbre à une vitesse unité. Pour $0 \leq t \leq 2(\zeta(\tau) - 1)$, $C_t(\tau)$ est défini comme étant la distance entre la racine et la position de l'animal à l'instant t .

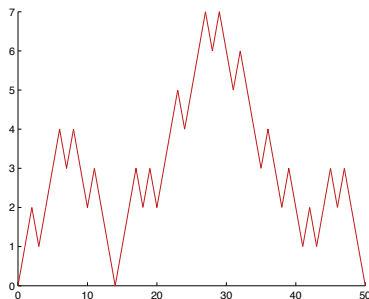
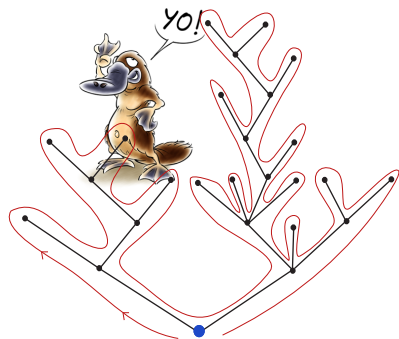
Codage des arbres



Définition (de la fonction de contour)

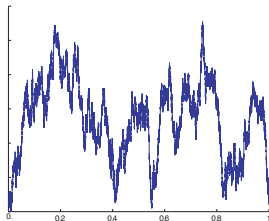
Un ornithorynque explore l'arbre à une vitesse unité. Pour $0 \leq t \leq 2(\zeta(\tau) - 1)$, $C_t(\tau)$ est défini comme étant la distance entre la racine et la position de l'animal à l'instant t .

Codage des arbres

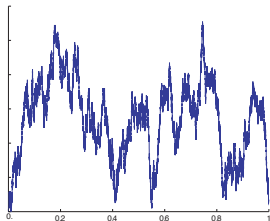


Définition (de la fonction de contour)

Un ornithorynque explore l'arbre à une vitesse unité. Pour $0 \leq t \leq 2(\zeta(\tau) - 1)$, $C_t(\tau)$ est défini comme étant la distance entre la racine et la position de l'animal à l'instant t .

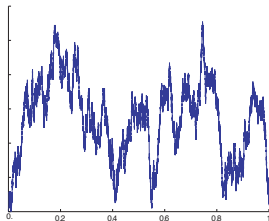


Fonction de contour renormalisée d'un grand arbre de Galton-Watson conditionné.



Fonction de contour renormalisée d'un grand arbre de Galton-Watson conditionné.

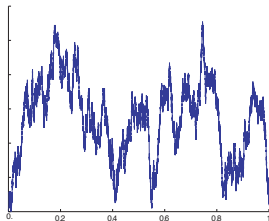
Stratégie de preuve de la convergence vers la triangulation brownienne :



Fonction de contour renormalisée d'un grand arbre de Galton-Watson conditionné.

Stratégie de preuve de la convergence vers la triangulation brownienne :

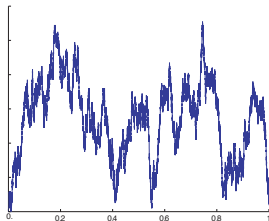
- ▶ Chacun des modèles **non croisés uniformes** peut-être codé par un arbre de Galton-Watson **conditionné**.



Fonction de contour renormalisée d'un grand arbre de Galton-Watson conditionné.

Stratégie de preuve de la convergence vers la triangulation brownienne :

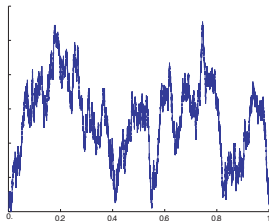
- ▶ Chacun des modèles **non croisés uniformes** peut-être codé par un arbre de **Galton-Watson conditionné**.
- ▶ Les fonctions de contour renormalisées de ces arbres de **Galton-Watson conditionnés** convergent vers **l'excursion brownienne**.



Fonction de contour renormalisée d'un grand arbre de Galton-Watson conditionné.

Stratégie de preuve de la convergence vers la triangulation brownienne :

- ▶ Chacun des modèles **non croisés uniformes** peut-être codé par un arbre de **Galton-Watson conditionné**.
- ▶ Les fonctions de contour renormalisées de ces arbres de **Galton-Watson conditionnés** convergent vers **l'excursion brownienne**.
- ▶ **L'excursion brownienne** code la triangulation brownienne $L(e)$.



Fonction de contour renormalisée d'un grand arbre de Galton-Watson conditionné.

Stratégie de preuve de la convergence vers la triangulation brownienne :

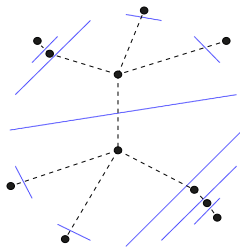
- ▶ Chacun des modèles **non croisés uniformes** peut-être codé par un arbre de **Galton-Watson conditionné**.
- ▶ Les fonctions de contour renormalisées de ces arbres de **Galton-Watson conditionnés** convergent vers **l'excursion brownienne**.
- ▶ **L'excursion brownienne** code la triangulation brownienne $L(e)$.

On en déduit la convergence des modèles **non croisés uniformes** vers $L(e)$.

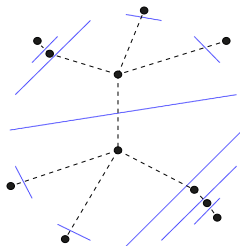
Mais comment coder les modèles **uniformes non croisés** par des arbres de Galton-Watson **conditionnés** ?

Lien entre transpositions **non croisées** **uniformes** et arbres de **Galton-Watson**.

On considère le dual d'une transposition **non-croisée uniforme** de P_{2n} :

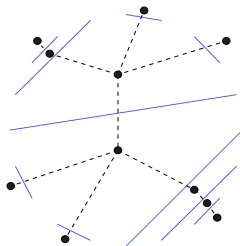


On considère le dual d'une transposition **non-croisée uniforme** de P_{2n} :



Il s'agit d'un arbre **uniforme** avec $n+1$ sommets.

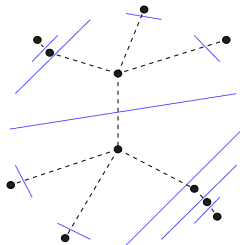
On considère le dual d'une transposition **non-croisée uniforme** de P_{2n} :



Il s'agit d'un arbre **uniforme** avec $n+1$ sommets.

... qui a la même loi qu'un arbre de **Galton-Watson** de loi de reproduction $\nu = \text{Geom}(1/2)$, **conditionné** à avoir $n+1$ sommets.

On considère le dual d'une transposition **non-croisée uniforme** de P_{2n} :

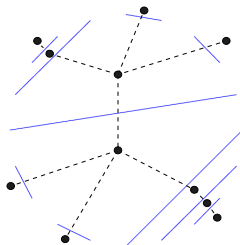


Il s'agit d'un arbre **uniforme** avec $n+1$ sommets.

... qui a la même loi qu'un arbre de **Galton-Watson** de loi de reproduction $\nu = \text{Geom}(1/2)$, **conditionné** à avoir $n+1$ sommets.

La fonction de contour renormalisée de ces arbres converge vers l'**excursion brownienne** (Aldous '93).

On considère le dual d'une transposition **non-croisée uniforme** de P_{2n} :



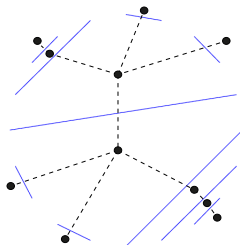
Il s'agit d'un arbre **uniforme** avec $n+1$ sommets.

... qui a la même loi qu'un arbre de **Galton-Watson** de loi de reproduction $\nu = \text{Geom}(1/2)$, **conditionné** à avoir $n+1$ sommets.

La fonction de contour renormalisée de ces arbres converge vers l'**excursion brownienne** (Aldous '93).

Idée : la fonction de contour d'un arbre de **Galton-Watson** se comporte comme une marche aléatoire.

On considère le dual d'une transposition **non-croisée uniforme** de P_{2n} :



Il s'agit d'un arbre **uniforme** avec $n+1$ sommets.

... qui a la même loi qu'un arbre de **Galton-Watson** de loi de reproduction $\nu = \text{Geom}(1/2)$, **conditionné** à avoir $n + 1$ sommets.

La fonction de contour renormalisée de ces arbres converge vers l'**excursion brownienne** (Aldous '93).

Idée : la fonction de contour d'un arbre de **Galton-Watson** se comporte comme une marche aléatoire.

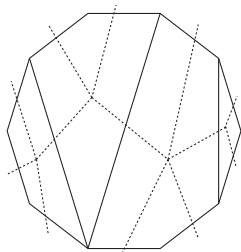
Il s'ensuit que les transpositions **non croisées uniformes** de P_{2n} convergent vers la **triangulation brownienne**.

Codage des dissections **uniformes** par des arbres de **Galton-Watson** conditionnés.

Dissections uniformes et arbres de Galton-Watson

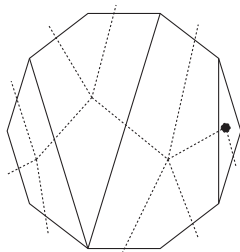
On considère le dual d'une dissection **uniforme** de P_n

:



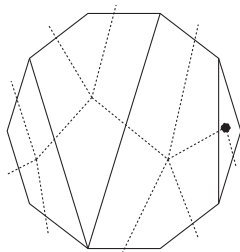
Dissections uniformes et arbres de Galton-Watson

On considère le dual d'une dissection **uniforme** de P_n , convenablement enraciné :



Dissections uniformes et arbres de Galton-Watson

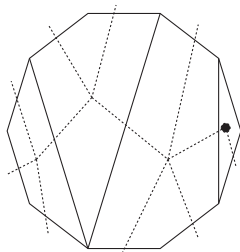
On considère le dual d'une dissection **uniforme** de P_n , convenablement enraciné :



Il s'agit d'un arbre **uniforme** sur l'ensemble des arbres avec $n - 1$ feuilles tels qu'aucun sommet n'a qu'un seul enfant.

Dissections uniformes et arbres de Galton-Watson

On considère le dual d'une dissection **uniforme** de P_n , convenablement enraciné :



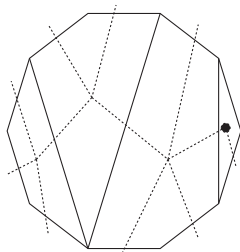
Il s'agit d'un arbre **uniforme** sur l'ensemble des arbres avec $n - 1$ feuilles tels qu'aucun sommet n'a qu'un seul enfant.

Proposition (Curien & K. '12, Pitman & Rizzolo '11)

La loi d'un arbre **uniforme** sur l'ensemble des arbres avec $n - 1$ feuilles tels qu'aucun sommet n'a qu'un seul enfant est la loi d'un GW_{μ_0} arbre de loi de reproduction μ_0 **conditionné** à avoir $n - 1$ feuilles, où :

Dissections uniformes et arbres de Galton-Watson

On considère le dual d'une dissection **uniforme** de P_n , convenablement enraciné :



Il s'agit d'un arbre **uniforme** sur l'ensemble des arbres avec $n - 1$ feuilles tels qu'aucun sommet n'a qu'un seul enfant.

Proposition (Curien & K. '12, Pitman & Rizzolo '11)

La loi d'un arbre **uniforme** sur l'ensemble des arbres avec $n - 1$ feuilles tels qu'aucun sommet n'a qu'un seul enfant est la loi d'un GW_{μ_0} arbre de loi de reproduction μ_0 **conditionné** à avoir $n - 1$ feuilles, où :

$$\mu_0(0) = 2 - \sqrt{2}, \quad \mu_0(1) = 0, \quad \mu_0(i) = \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right)^{i-1} \quad \text{pour } i \geq 2.$$

Dissections uniformes et arbres de Galton-Watson

La fonction de contour renormalisée de GW_{μ_0} arbres conditionnés à avoir beaucoup de feuilles converge vers l'excursion brownienne (K. '11).

Dissections uniformes et arbres de Galton-Watson

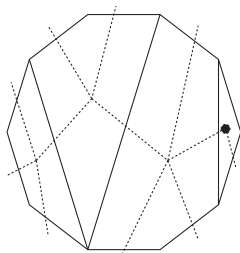
La fonction de contour renormalisée de GW_{μ_0} arbres conditionnés à avoir beaucoup de feuilles converge vers l'excursion brownienne (K. '11).

Il s'ensuit que les dissections uniformes de P_n convergent vers la triangulation brownienne.

Conclusion : Dans tous ces modèles **uniformes**, de l'**indépendance** est cachée.

IV. APPLICATION À L'ÉTUDE DES DISSECTIONS UNIFORMES

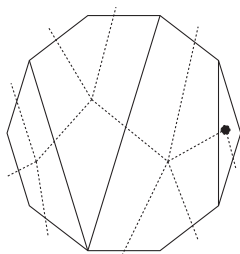
Application à l'étude des dissections uniformes



Soit \mathcal{D}_n une dissection **uniforme** de P_n . Rappel : Le dual enraciné de \mathcal{D}_n est un arbre de loi $\mathbb{P}_{\mu_0}[\cdot | \lambda(\tau) = n - 1]$, où $(i \geq 2)$:

$$\mu_0(0) = 2 - \sqrt{2}, \quad \mu_0(1) = 0, \quad \mu_0(i) = \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right)^{i-1}.$$

Application à l'étude des dissections uniformes



Soit \mathcal{D}_n une dissection **uniforme** de P_n . Rappel : Le dual enraciné de \mathcal{D}_n est un arbre de loi $\mathbb{P}_{\mu_0}[\cdot | \lambda(\tau) = n - 1]$, où ($i \geq 2$) :

$$\mu_0(0) = 2 - \sqrt{2}, \quad \mu_0(1) = 0, \quad \mu_0(i) = \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right)^{i-1}.$$

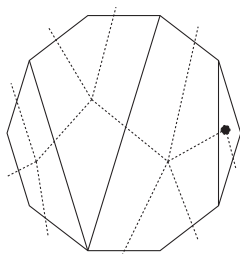
Application 1 (Compter les dissections). Preuve probabiliste du résultat suivant :

Théorème (Flajolet & Noy '99)

Soit a_n le nombre de dissections de P_n . Alors :

$$a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim}$$

Application à l'étude des dissections uniformes



Soit \mathcal{D}_n une dissection **uniforme** de P_n . Rappel : Le dual enraciné de \mathcal{D}_n est un arbre de loi $\mathbb{P}_{\mu_0}[\cdot | \lambda(\tau) = n - 1]$, où ($i \geq 2$) :

$$\mu_0(0) = 2 - \sqrt{2}, \quad \mu_0(1) = 0, \quad \mu_0(i) = \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right)^{i-1}.$$

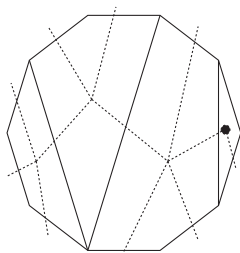
Application 1 (Compter les dissections). Preuve probabiliste du résultat suivant :

Théorème (Flajolet & Noy '99)

Soit a_n le nombre de dissections de P_n . Alors :

$$a_n \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{4} \sqrt{\frac{99\sqrt{2} - 140}{\pi}} n^{-3/2} (3 + 2\sqrt{2})^n.$$

Application à l'étude des dissections uniformes

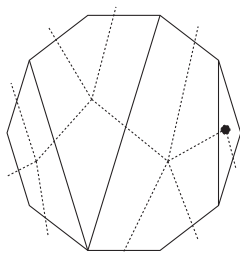


Soit \mathcal{D}_n une dissection **uniforme** de P_n . Rappel : Le dual enraciné de \mathcal{D}_n est un arbre de loi $\mathbb{P}_{\mu_0} [\cdot | \lambda(\tau) = n - 1]$, où $(i \geq 2)$:

$$\mu_0(0) = 2 - \sqrt{2}, \quad \mu_0(1) = 0, \quad \mu_0(i) = \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right)^{i-1}.$$

Application 2 (Étude du degré maximal d'une face). On note $D^{(n)}$ le degré maximal d'une face de \mathcal{D}_n .

Application à l'étude des dissections uniformes



Soit \mathcal{D}_n une dissection **uniforme** de P_n . Rappel : Le dual enraciné de \mathcal{D}_n est un arbre de loi $\mathbb{P}_{\mu_0}[\cdot | \lambda(\tau) = n - 1]$, où ($i \geq 2$) :

$$\mu_0(0) = 2 - \sqrt{2}, \quad \mu_0(1) = 0, \quad \mu_0(i) = \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right)^{i-1}.$$

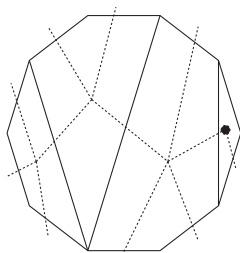
Application 2 (Étude du degré maximal d'une face). On note $D^{(n)}$ le degré maximal d'une face de \mathcal{D}_n .

Théorème (Curien & K. '12)

Soit $\beta = 2 + \sqrt{2}$. Pour tout $c > 0$, on a :

$$\mathbb{P}(\log_{\beta}(n) - c \log_{\beta} \log_{\beta}(n) \leq D^{(n)} \leq \log_{\beta}(n) + c \log_{\beta} \log_{\beta}(n)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 1.$$

Application à l'étude des dissections uniformes



Soit \mathcal{D}_n une dissection **uniforme** de P_n . Rappel : Le dual enraciné de \mathcal{D}_n est un arbre de loi $\mathbb{P}_{\mu_0}[\cdot | \lambda(\tau) = n - 1]$, où ($i \geq 2$) :

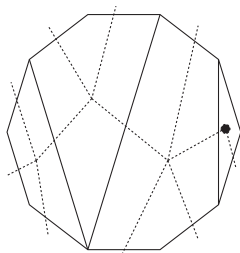
$$\mu_0(0) = 2 - \sqrt{2}, \quad \mu_0(1) = 0, \quad \mu_0(i) = \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right)^{i-1}.$$

Application 3 (Étude du degré d'un sommet).

Théorème (Curien & K. '12)

Soit $\partial^{(n)}$ le nombre de diagonales adjacentes au sommet d'affixe 1 dans \mathcal{D}_n .

Application à l'étude des dissections uniformes



Soit \mathcal{D}_n une dissection **uniforme** de P_n . Rappel : Le dual enraciné de \mathcal{D}_n est un arbre de loi $\mathbb{P}_{\mu_0}[\cdot | \lambda(\tau) = n - 1]$, où $(i \geq 2)$:

$$\mu_0(0) = 2 - \sqrt{2}, \quad \mu_0(1) = 0, \quad \mu_0(i) = \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right)^{i-1}.$$

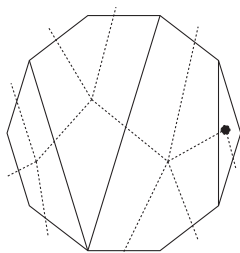
Application 3 (Étude du degré d'un sommet).

Théorème (Curien & K. '12)

Soit $\partial^{(n)}$ le nombre de diagonales adjacentes au sommet d'affixe 1 dans \mathcal{D}_n . Alors $\partial^{(n)}$ converge en loi vers la somme de deux variables aléatoires indépendantes géométriques de paramètre $\sqrt{2} - 1$, c-à-d pour $k \geq 0$ on a :

$$\mathbb{P}(\partial^{(n)} = k) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} (k + 1)\mu_0^2(1 - \mu_0)^k.$$

Application à l'étude des dissections uniformes



Soit \mathcal{D}_n une dissection **uniforme** de P_n . Rappel : Le dual enraciné de \mathcal{D}_n est un arbre de loi $\mathbb{P}_{\mu_0}[\cdot | \lambda(\tau) = n - 1]$, où $(i \geq 2)$:

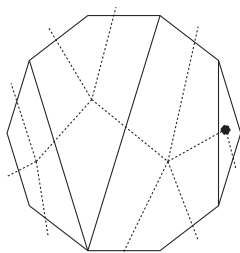
$$\mu_0(0) = 2 - \sqrt{2}, \quad \mu_0(1) = 0, \quad \mu_0(i) = \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right)^{i-1}.$$

Application 4 (Étude du degré maximal d'un sommet). Preuve d'une conjecture de Bernasconi, Panagiotou & Steger :

Théorème (Curien & K. '12)

Soit $\Delta^{(n)}$ le nombre maximal de diagonales issues d'un sommet quelconque de \mathcal{D}_n .

Application à l'étude des dissections uniformes



Soit \mathcal{D}_n une dissection **uniforme** de P_n . Rappel : Le dual enraciné de \mathcal{D}_n est un arbre de loi $\mathbb{P}_{\mu_0}[\cdot | \lambda(\tau) = n - 1]$, où $(i \geq 2)$:

$$\mu_0(0) = 2 - \sqrt{2}, \quad \mu_0(1) = 0, \quad \mu_0(i) = \left(\frac{2 - \sqrt{2}}{2} \right)^{i-1}.$$

Application 4 (Étude du degré maximal d'un sommet). Preuve d'une conjecture de Bernasconi, Panagiotou & Steger :

Théorème (Curien & K. '12)

Soit $\Delta^{(n)}$ le nombre maximal de diagonales issues d'un sommet quelconque de \mathcal{D}_n . Soit $b = \sqrt{2} + 1$. Alors pour tout $c > 0$, on a

$$\mathbb{P}(\Delta^{(n)} \geq \log_b(n) + (1 + c) \log_b \log_b(n)) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

Conjecture

Soit $\Delta^{(n)}$ le nombre maximal de diagonales issues d'un sommet quelconque de \mathcal{D}_n . Soit $b = \sqrt{2} + 1$. Pour tout $c > 0$:

$$\mathbb{P} \left(\left| \Delta^{(n)} - (\log_b(n) + \log_b \log_b(n)) \right| > c \log_b \log_b(n) \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

(vérifiée pour une autre valeur de b dans le cas des triangulations par Devroye, Flajolet, Hurtado, Noy & Steiger '99 et Gao & Wormald '00)

Conjecture

Soit $\Delta^{(n)}$ le nombre maximal de diagonales issues d'un sommet quelconque de \mathcal{D}_n . Soit $b = \sqrt{2} + 1$. Pour tout $c > 0$:

$$\mathbb{P} \left(\left| \Delta^{(n)} - (\log_b(n) + \log_b \log_b(n)) \right| > c \log_b \log_b(n) \right) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{} 0.$$

(vérifiée pour une autre valeur de b dans le cas des triangulations par Devroye, Flajolet, Hurtado, Noy & Steiger '99 et Gao & Wormald '00)

Merci pour votre attention!

