Ergodicité du profil pour un modèle de croissance de cristal

F. Ezanno

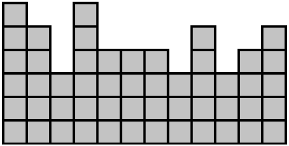
Laboratoire d'Analyse, Topologie et Probabilités (Marseille)

17 Avril 2012

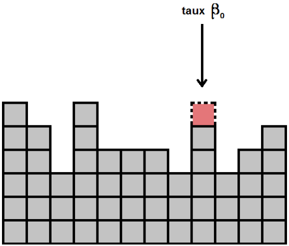
Aix*Marseille université

La configuration d'un cristal 2D à réseau carré est décrit par $x \in \mathbb{N}^n$.

La configuration d'un cristal 2D à réseau carré est décrit par $x \in \mathbb{N}^n$.
Soient $\beta_0,\ \beta_1$ et $\beta_2 \geq 0$. On considère la dynamique suivante :

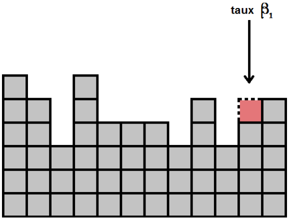


La configuration d'un cristal 2D à réseau carré est décrit par $x \in \mathbb{N}^n$.
Soient β_0, β_1 et $\beta_2 \geq 0$. On considère la dynamique suivante :



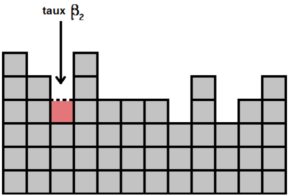
Les particules s'agrègent sur chacun des sites à un taux dépendant du nombre d'interfaces à créer avec les sites voisins.

La configuration d'un cristal 2D à réseau carré est décrit par $x \in \mathbb{N}^n$.
Soient $\beta_0,\ \beta_1$ et $\beta_2 \geq 0$. On considère la dynamique suivante :



Les particules s'agrègent sur chacun des sites à un taux dépendant du nombre d'interfaces à créer avec les sites voisins.

La configuration d'un cristal 2D à réseau carré est décrit par $x \in \mathbb{N}^n$.
Soient $\beta_0,\ \beta_1$ et $\beta_2 \geq 0$. On considère la dynamique suivante :



Les particules s'agrègent sur chacun des sites à un taux dépendant du nombre d'interfaces à créer avec les sites voisins.

Définition

$(X_t^n,\ t \geq 0)$ *est un processus de Markov dans* $\mathbb{N}^n$ *dont les taux de transition non nuls sont donnés par*

$$q(x,\ x+e_j) = \beta_{V_j(x)},\ j = 1, \ldots,\ n,$$

où $V_j(x) = \mathbb{1}_{x(j-1)>x(j)} + \mathbb{1}_{x(j+1)>x(j)} \in \{0,\ 1,\ 2\}.$

Définition

$(X_t^n,\ t \geq 0)$ est un processus de Markov dans $\mathbb{N}^n$ dont les taux de transition non nuls sont donnés par

$$q(x,\ x+e_j) = \beta_{V_j(x)},\ j = 1, \dots,\ n,$$

où $V_j(x) = \mathbb{1}_{x(j-1)>x(j)} + \mathbb{1}_{x(j+1)>x(j)} \in \{0,\ 1,\ 2\}$.
Par convention, $x(0) = x(n+1) = 0$.

Définition

$(X_t^n,\ t \geq 0)$ est un processus de Markov dans $\mathbb{N}^n$ dont les taux de transition non nuls sont donnés par

$$q(x,\ x+e_j) = \beta_{V_j(x)},\ j = 1, \ldots,\ n,$$

où $V_j(x) = \mathbb{1}_{x(j-1)>x(j)} + \mathbb{1}_{x(j+1)>x(j)} \in \{0,\ 1,\ 2\}$.
Par convention, $x(0) = x(n+1) = 0$.

On note $\mathbb{P}_x$ la loi du processus partant de x.

Définition

$(X_t^n,\ t \geq 0)$ est un processus de Markov dans $\mathbb{N}^n$ dont les taux de transition non nuls sont donnés par

$$q(x,\ x+e_j) = \beta_{V_j(x)},\ j = 1, \ldots,\ n,$$

où $V_j(x) = \mathbb{1}_{x(j-1)>x(j)} + \mathbb{1}_{x(j+1)>x(j)} \in \{0,\ 1,\ 2\}$.
Par convention, $x(0) = x(n+1) = 0$.

On note $\mathbb{P}_x$ la loi du processus partant de x.
Intuition :

- β_0 augmente l'irrégularité de la surface,
- β_2 diminue l'irrégularité de la surface.

Définition (Profil)

Soit $\Delta_j X_t^n = X_t^n(j) - X_t^n(j+1)$. On définit le profil H_t^n de X_t^n par

$$H_t^n = (\Delta_1 X_t^n, \ldots, \ \Delta_{n-1} X_t^n).$$

Définition (Profil)

Soit $\Delta_j X_t^n = X_t^n(j) - X_t^n(j+1)$. *On définit le profil* H_t^n *de* X_t^n *par*

$$H_t^n = (\Delta_1 X_t^n, \ldots, \Delta_{n-1} X_t^n).$$

$(H_t^n,\ t \geq 0)$ est un processus de Markov dans $\mathbb{Z}^{n-1}$. Est-il

- ergodique ?
- récurrent nul ?
- transitoire ?

Autrement dit, la surface est-elle lisse ou rugueuse ?

FIGURE: $\beta_0 = 1,\ \beta_1 = 2,\ \beta_2 = 3,\ t = 500$

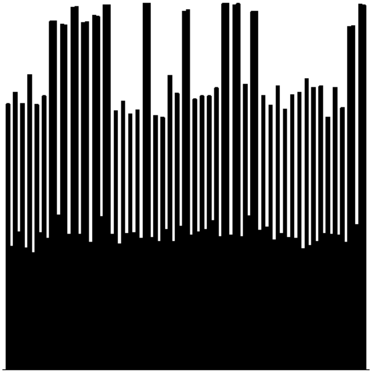


FIGURE: $\beta_0 = 1,\ \beta_1 = 2,\ \beta_2 = 0.5,\ t = 500$

FIGURE: $\beta_0 = 1,\ \beta_1 = 6,\ \beta_2 = 2,\ t = 500$

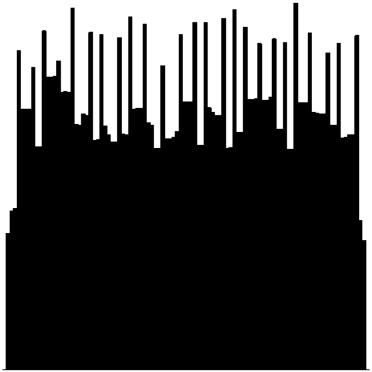


FIGURE: $\beta_0 = 1,\ \beta_1 = 0.4,\ \beta_2 = 3,\ t = 500$

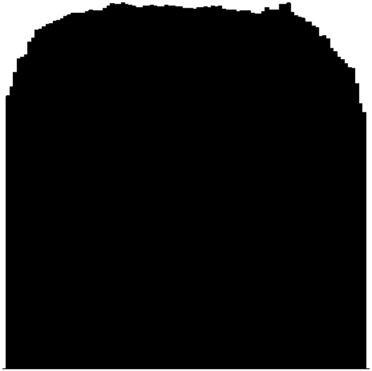


FIGURE: $\beta_0 = 1,\ \beta_1 = 1,\ \beta_2 = 10,\ t = 500$

1. Présentation du modèle
2. Généralités
   - Tension exponentielle
   - Monotonie
   - Vitesse de croissance
3. Le régime $\beta_2 < \beta_0$
4. Le régime $\beta_0 < \beta_1 \leq \beta_2$
5. Résultats et conjectures pour le régime $\beta_0 \leq \beta_2 \leq \beta_1$

Proposition (Rappel chaînes de Markov)

$$\begin{aligned} H^n \textit{ est ergodique} \quad &\Leftrightarrow \quad \textit{la famille } \left(\mathscr{L}(H_t^n),\ t \geq 0\right) \textit{ est tendue.} \\ &\Leftrightarrow \quad \textit{pour tout } j, \textit{ la famille} \\ &\qquad \left(\mathscr{L}(\Delta_j X_t^n),\ t \geq 0\right) \textit{ est tendue.} \end{aligned}$$

Proposition (Rappel chaînes de Markov)

$$\begin{aligned} H^n \text{ est ergodique} \quad &\Leftrightarrow \quad \text{la famille } \left(\mathscr{L}(H_t^n),\ t \geq 0\right) \text{ est tendue.} \\ &\Leftrightarrow \quad \text{pour tout } j,\ \text{la famille} \\ &\qquad \left(\mathscr{L}(\Delta_j X_t^n),\ t \geq 0\right) \text{ est tendue.} \end{aligned}$$

Ainsi une condition suffisante d'ergodicité est que, pour tout j,

$$\exists C_j,\ \alpha_j > 0 : \forall t \geq 0,\ \mathbb{P}_0(\Delta_j X_t^n \geq k) \leq C_j e^{-\alpha_j k}. \qquad (1)$$

Proposition (Rappel chaînes de Markov)

$$\begin{aligned} H^n \textit{ est ergodique} \quad &\Leftrightarrow \quad \textit{la famille } (\mathscr{L}(H^n_t),\ t \geq 0) \textit{ est tendue.} \\ &\Leftrightarrow \quad \textit{pour tout } j, \textit{ la famille} \\ &\qquad (\mathscr{L}(\Delta_j X^n_t),\ t \geq 0) \textit{ est tendue.} \end{aligned}$$

Ainsi une condition suffisante d'ergodicité est que, pour tout j,

$$\exists C_j,\ \alpha_j > 0 : \forall t \geq 0,\ \mathbb{P}_0(\Delta_j X^n_t \geq k) \leq C_j e^{-\alpha_j k}. \qquad (1)$$

Lemme

Soit $\tau^j_t = \sup\{s \leq t : \Delta_j X^n_s = 0\}$*. Une condition suffisante pour (1) est qu'il existe* $c_j,\ a_j > 0$ *tels que pour* $t \geq 0$*, et* $\ell \in \mathbb{N} \cap [0, t]$*,*

$$\mathbb{P}_0(\Delta_j X^n_t > 0,\ \tau^j_t \in [\ell - 1,\ \ell[) \leq c_j e^{-a_j(t-\ell)}.$$

On définit la relation $x \leq x' \Leftrightarrow x(i) \leq x'(i),\ i = 1, \ldots, n$.

On définit la relation $x \leq x' \Leftrightarrow x(i) \leq x'(i),\ i = 1, \ldots, n$.

Proposition (Monotonie)

(i) *Si $\beta_0 \leq \beta_1 \leq \beta_2$, X^n est monotone vis-à-vis de la condition initiale.*

(ii) *Si $X_0^n = \check{X}_0^n$ et si $k \leq \ell \Rightarrow \beta_k \leq \check{\beta}_\ell$, alors $\forall t \geq 0,\ X_t^n \leq \check{X}_t^n$.*

On définit la relation $x \leq x' \Leftrightarrow x(i) \leq x'(i),\ i = 1, \ldots, n$.

Proposition (Monotonie)

(i) *Si* $\beta_0 \leq \beta_1 \leq \beta_2$, X^n *est monotone vis-à-vis de la condition initiale.*

(ii) *Si* $X_0^n = \check{X}_0^n$ *et si* $k \leq \ell \Rightarrow \beta_k \leq \check{\beta}_\ell$, *alors* $\forall t \geq 0,\ X_t^n \leq \check{X}_t^n$.

Démonstration.

Couplage des processus en les construisant à partir des mêmes processus de Poisson. □

Proposition (Vitesse asymptotique)

On suppose H^n ergodique, de mesure invariante π^n. Alors il existe v^n tel que

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \lim_{t \to \infty} \frac{X_t^n(i)}{t} = v^n.$$

Proposition (Vitesse asymptotique)

On suppose H^n ergodique, de mesure invariante π^n. Alors il existe v^n tel que

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \lim_{t\to\infty} \frac{X_t^n(i)}{t} = v^n.$$

De plus, $v^n = \sum_{h\in\mathbb{Z}^{n-1}} q(x, x+e_i)\pi^n(x)$.

Proposition (Vitesse asymptotique)

On suppose H^n ergodique, de mesure invariante π^n. Alors il existe v^n tel que

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \lim_{t\to\infty} \frac{X_t^n(i)}{t} = v^n.$$

De plus, $v^n = \sum_{h\in\mathbb{Z}^{n-1}} q(x, x+e_i)\pi^n(x)$.

Démonstration.

$M_t = X_t^n(i) - \int_0^t q(X_s^n, X_s^n + e_i)\mathrm{d}s$ est une martingale. $\lim \frac{M_t}{t} = 0$.

Proposition (Vitesse asymptotique)

On suppose H^n ergodique, de mesure invariante π^n. Alors il existe v^n tel que

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, \lim_{t \to \infty} \frac{X_t^n(i)}{t} = v^n.$$

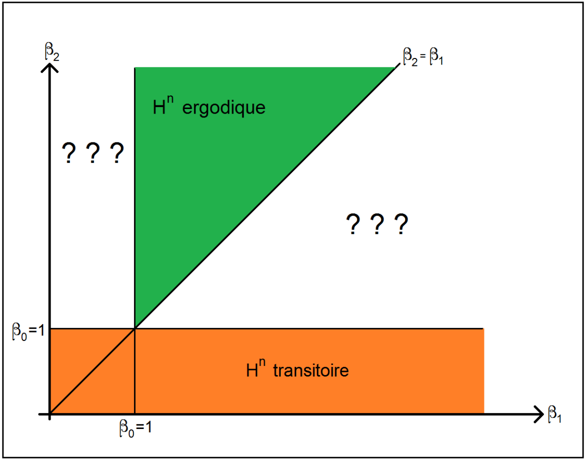
De plus, $v^n = \sum_{h \in \mathbb{Z}^{n-1}} q(x, x + e_i)\pi^n(x)$.

Démonstration.

$M_t = X_t^n(i) - \int_0^t q(X_s^n, X_s^n + e_i)\mathrm{d}s$ est une martingale. $\lim \frac{M_t}{t} = 0$.
Or $\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \int_0^t q(X_s^n, X_s^n + e_i)\mathrm{d}s = \int_0^t q(x, x + e_i)\mathrm{d}\pi^n(x)$ (théorème ergodique). □

Quitte à changer l'échelle de temps, on peut supposer $\beta_0 = 1$. Il reste deux degrés de liberté.

Quitte à changer l'échelle de temps, on peut supposer $\beta_0 = 1$. Il reste deux degrés de liberté.



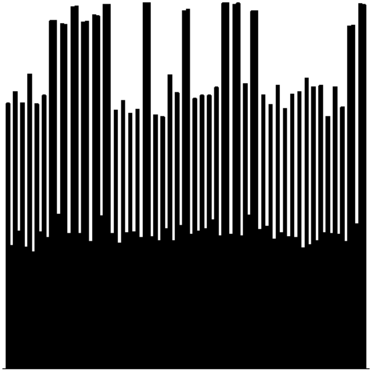


FIGURE: $\beta_0 = 1,\ \beta_1 = 2,\ \beta_2 = 0.5,\ t = 500$

Supposons par exemple $\beta_2 < \beta_0 < \beta_1$. Il est facile de voir que H^n est transitoire. En effet, H^2 est ergodique et $\beta_2 < \beta_0 \wedge v^2$, donc un peigne avec des pics de largeur 1 ou 2 a une probabilité > 0 de perdurer indéfiniment.

Supposons par exemple $\beta_2 < \beta_0 < \beta_1$. Il est facile de voir que H^n est transitoire. En effet, H^2 est ergodique et $\beta_2 < \beta_0 \wedge v^2$, donc un peigne avec des pics de largeur 1 ou 2 a une probabilité > 0 de perdurer indéfiniment.

On a un résultat qui décrit plus précisément le comportement de H^n : en fait, un tel peigne se forme presque sûrement.

Supposons par exemple $\beta_2 < \beta_0 < \beta_1$. Il est facile de voir que H^n est transitoire. En effet, H^2 est ergodique et $\beta_2 < \beta_0 \wedge v^2$, donc un peigne avec des pics de largeur 1 ou 2 a une probabilité > 0 de perdurer indéfiniment.

On a un résultat qui décrit plus précisément le comportement de H^n : en fait, un tel peigne se forme presque sûrement.

Théorème (E, 2011)

Supposons $\beta_2 < \beta_0 < \beta_1$. Alors pour $x \in \mathbb{N}^n$, $\frac{X_t^n}{t}$ converge $\mathbb{P}_x$-ps vers une variable aléatoire G. De plus G est presque sûrement de la forme

$$(a_1, \beta_2, a_2, \beta_2, a_3, \ldots, a_{k-1}, \beta_2, a_k), \tag{1}$$

avec pour $j = 1 \ldots k$, $a_j = \beta_0$ ou $a_j = (v^2, v^2)$.

On a des résultats équivalents si $\beta_2 < \beta_1 < \beta_0$ ou si $\beta_1 < \beta_0 < \beta_2$. Les preuves utilisent a peu près les mêmes idées.

On a des résultats équivalents si $\beta_2 < \beta_1 < \beta_0$ ou si $\beta_1 < \beta_0 < \beta_2$. Les preuves utilisent a peu près les mêmes idées.

Théorème

Supposons $\beta_2 < \beta_1 < \beta_0$. Alors pour $x \in \mathbb{N}^n$, $\frac{X_t^n}{t}$ converge $\mathbb{P}_x$-ps vers une variable aléatoire G. De plus G est presque sûrement de la forme

$$(\beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_N}),$$

avec $i_j \neq i_{j+1}$ pour $j = 1, \ldots, N-1$, et $i_1, i_N \neq 2$.

Théorème

Supposons $\beta_1 < \beta_2 < \beta_0$. Alors pour $x \in \mathbb{N}^n$, $\frac{X_t^n}{t}$ converge $\mathbb{P}_x$-ps vers une variable aléatoire G. De plus G est presque sûrement de la forme

$$(b_\ell, \beta_0, a_1, \beta_0, a_3, \dots, a_{k-1}, \beta_0, a_k, \beta_0, b_r),$$

avec pour $j = 1 \dots k$, $a_j = \beta_2$ ou $a_j = (v^{2,\infty}, v^{2,\infty})$, et $b_\ell, b_r = (\beta_1)$ ou $()$.

Théorème (Andjel, Menshikov, Sisko, 2006)

Soit $n \geq 2$. On suppose que $\beta_0 < \beta_1 \leq \beta_2$. Alors H^n est ergodique.

Théorème (Andjel, Menshikov, Sisko, 2006)

Soit $n \geq 2$. On suppose que $\beta_0 < \beta_1 \leq \beta_2$. Alors H^n est ergodique.

Démonstration.

On montre (1) par récurrence sur j.

Théorème (Andjel, Menshikov, Sisko, 2006)

Soit $n \geq 2$. On suppose que $\beta_0 < \beta_1 \leq \beta_2$. Alors H^n est ergodique.

Démonstration.

On montre (1) par récurrence sur j. On commence par montrer par récurrence sur n qu'il existe $d_n < \beta_1$ et $\gamma_n,\ b_n > 0$ telles que

$$\forall t \geq 0,\ \mathbb{P}_0\left(X_t^n(n) \geq d_n t\right) \leq b_n e^{-\gamma_n t}. \qquad (2)$$

Théorème (Andjel, Menshikov, Sisko, 2006)

Soit $n \geq 2$. On suppose que $\beta_0 < \beta_1 \leq \beta_2$. Alors H^n est ergodique.

Démonstration.

On montre (1) par récurrence sur j. On commence par montrer par récurrence sur n qu'il existe $d_n < \beta_1$ et $\gamma_n,\ b_n > 0$ telles que

$$\forall t \geq 0,\ \mathbb{P}_0\left(X_t^n(n) \geq d_n t\right) \leq b_n e^{-\gamma_n t}. \tag{2}$$

Ainsi, tant que $\Delta_j X^n(t) > 0$,

- le site j va strictement moins vite que β_1.
- le site $j+1$ va au moins aussi vite que β_1.

$\square$

Démonstration.

Ces deux remarques permettent de montrer que

$$\mathbb{P}_0(\Delta_j X_t^n > 0,\ \tau_t^j \in [\ell - 1,\ \ell[) \leq c_j e^{-a_j(t-\ell)}.$$

Démonstration.

Ces deux remarques permettent de montrer que

$$\mathbb{P}_0(\Delta_j X_t^n > 0,\ \tau_t^j \in [\ell - 1,\ \ell[) \leq c_j e^{-a_j(t-\ell)}.$$

Il y a une subtilité pour montrer ça :

Démonstration.

Ces deux remarques permettent de montrer que

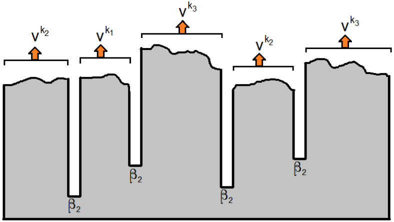
$$\mathbb{P}_0(\Delta_j X_t^n > 0,\ \tau_t^j \in [\ell - 1,\ \ell[) \leq c_j e^{-a_j(t-\ell)}.$$

Il y a une subtilité pour montrer ça : à l'instant τ_t^j, les sites 1 à j ne sont pas tous au même niveau. D'ou la nécéssité de l'hypothèse de récurrence et de la monotonie.

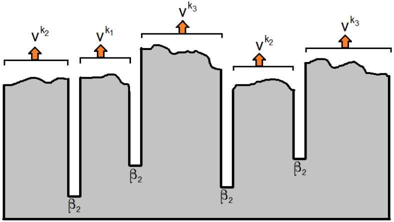
$\square$

Idée pour montrer la transience de H^n : si on trouve des entiers $k_1, \dots k_r < n$ tels que H^{k_i} soit ergodique, que $\beta_2 < v^{k_i}$, et qu'on peut fractionner les n sites en blocs dont les longueurs sont des k_i, et séparés par des trous, alors H^n est transitoire.

Idée pour montrer la transience de H^n : si on trouve des entiers $k_1, \ldots k_r < n$ tels que H^{k_i} soit ergodique, que $\beta_2 < v^{k_i}$, et qu'on peut fractionner les n sites en blocs dont les longueurs sont des k_i, et séparés par des trous, alors H^n est transitoire.



Idée pour montrer la transience de H^n : si on trouve des entiers $k_1, \ldots k_r < n$ tels que H^{k_i} soit ergodique, que $\beta_2 < v^{k_i}$, et qu'on peut fractionner les n sites en blocs dont les longueurs sont des k_i, et séparés par des trous, alors H^n est transitoire.



Cas particulier $k_i = 2$: la vitesse v^2 ne dépend pas de β_2, et on peut la calculer :

$$v^2 = \frac{2\beta_0\beta_1}{\beta_0 + \beta_1}.$$

Par conséquent, si $n = 3m+2$, et $\beta_2 < \frac{2\beta_0\beta_1}{\beta_0+\beta_1}$, alors H^n est transitoire. Peut-on se passer de $n = 3m+2$?

Par conséquent, si $n = 3m + 2$, et $\beta_2 < \frac{2\beta_0\beta_1}{\beta_0+\beta_1}$, alors H^n est transitoire. Peut-on se passer de $n = 3m + 2$?

Il faut considérer les blocs de 3 sites.

Par conséquent, si $n = 3m+2$, et $\beta_2 < \frac{2\beta_0\beta_1}{\beta_0+\beta_1}$, alors H^n est transitoire. Peut-on se passer de $n = 3m+2$?
Il faut considérer les blocs de 3 sites.

Proposition

Si $\beta_1, \ \beta_2 > \beta_0$, alors H^3 est ergodique. De plus, si $\beta_2 < 3\beta_0$ et $\beta_1 \geq \frac{(3\beta_0)^3}{(3\beta_0-\beta_2)(\beta_2-\beta_0)}$, alors $\beta_2 < v^3$.

Par conséquent, si $n = 3m+2$, et $\beta_2 < \frac{2\beta_0\beta_1}{\beta_0+\beta_1}$, alors H^n est transitoire. Peut-on se passer de $n = 3m+2$?
Il faut considérer les blocs de 3 sites.

Proposition

Si $\beta_1, \; \beta_2 > \beta_0$, alors H^3 est ergodique. De plus, si $\beta_2 < 3\beta_0$ et $\beta_1 \geq \frac{(3\beta_0)^3}{(3\beta_0-\beta_2)(\beta_2-\beta_0)}$, alors $\beta_2 < v^3$.

Conséquence : sous la même hypothèse, H^n est transitoire pour tout $n \geq 5$.

Problèmes pour étendre la zone de récurrence :

- X^n n'est plus monotone,
- le site $j+1$ va au moins aussi vite que β_2, et non plus β_1.

Problèmes pour étendre la zone de récurrence :

- X^n n'est plus monotone,
- le site $j+1$ va au moins aussi vite que β_2, et non plus β_1.

On peut majorer X^n par $\tilde{X}^n$, le processus avec paramètres

$$\begin{cases} \tilde{\beta}_0 = \beta_0, \\ \tilde{\beta}_1 = \beta_1, \\ \tilde{\beta}_2 = \beta_1. \end{cases}$$

Problèmes pour étendre la zone de récurrence :

- X^n n'est plus monotone,
- le site $j+1$ va au moins aussi vite que β_2, et non plus β_1.

On peut majorer X^n par $\tilde{X}^n$, le processus avec paramètres

$$\begin{cases} \tilde{\beta}_0 = \beta_0, \\ \tilde{\beta}_1 = \beta_1, \\ \tilde{\beta}_2 = \beta_1. \end{cases}$$

De plus, il faut une nouvelle hypothèse sur les paramètres : on demande que $\beta_2 > \tilde{d}_n(\beta_1)$, où

$$\tilde{d}_n(\beta_1) = \inf\left\{d > 0 : \exists b, \gamma > 0, \mathbb{P}_0(\tilde{X}_t^n(n) \geq dt) \leq be^{-\gamma t}\right\}.$$

Théorème (E, 2012)

Si $\beta_2 > \tilde{d}_n(\beta_1)$, alors H^k est ergodique pour $k = 2, \ldots, n+2$.

Théorème (E, 2012)

Si $\beta_2 > \tilde{d}_n(\beta_1)$, alors H^k est ergodique pour $k = 2, \ldots, n+2$.

But : estimer $\tilde{d}_n(\beta_1)$, qui est croissante en n et en β_1 (couplage).

Théorème (E, 2012)

Si $\beta_2 > \tilde{d}_n(\beta_1)$, alors H^k est ergodique pour $k = 2, \ldots, n+2$.

But : estimer $\tilde{d}_n(\beta_1)$, qui est croissante en n et en β_1 (couplage).

Corollaire

Soit $\beta_1 > \beta_0$. H^k est ergodique, pour $k = 2, \ldots, n+2$, si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- $\beta_2 > n\beta_0$,
- $\beta_2 > \frac{(n-1)\beta_1 + \beta_0}{n}$.

Théorème (E, 2012)

Si $\beta_2 > \tilde{d}_n(\beta_1)$, alors H^k est ergodique pour $k = 2, \ldots, n+2$.

But : estimer $\tilde{d}_n(\beta_1)$, qui est croissante en n et en β_1 (couplage).

Corollaire

Soit $\beta_1 > \beta_0$. H^k est ergodique, pour $k = 2, \ldots, n+2$, si l'une des deux conditions suivantes est vérifiée :

- $\beta_2 > n\beta_0$,
- $\beta_2 > \frac{(n-1)\beta_1+\beta_0}{n}$.

Démonstration.

L'inégalité $\mathbb{P}_0(\tilde{X}_t^n(n) \geq dt) \leq be^{-\gamma t}$ est facile à obtenir pour $d = n\beta_0$ et pour $d = \frac{(n-1)\beta_1+\beta_0}{n}$. $\square$

- trouver une zone de paramètres pour lesquels : pour tout n, H^n est ergodique.

Théorème (E., Gaudillière, 2012)

Il existe $C > 0$ et $B > 0$ tels que pour $\beta_1 > B$,

$$\forall n \geq 2,\ \tilde{d}_n(\beta_1) \leq C\sqrt{\beta_0\beta_1}.$$

- trouver une zone de paramètres pour lesquels : pour tout n, H^n est ergodique.

Théorème (E., Gaudillière, 2012)

Il existe $C > 0$ et $B > 0$ tels que pour $\beta_1 > B$,

$$\forall n \geq 2,\ \tilde{d}_n(\beta_1) \leq C\sqrt{\beta_0\beta_1}.$$

- Montrer qu'en fait $\beta_2 > \tilde{d}_{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil}$ est suffisant pour l'ergodicité.

- trouver une zone de paramètres pour lesquels : pour tout n, H^n est ergodique.

Théorème (E., Gaudillière, 2012)

Il existe $C > 0$ et $B > 0$ tels que pour $\beta_1 > B$,

$$\forall n \geq 2,\ \tilde{d}_n(\beta_1) \leq C\sqrt{\beta_0\beta_1}.$$

- Montrer qu'en fait $\beta_2 > \tilde{d}_{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil}$ est suffisant pour l'ergodicité.
- Si $\beta_2 > (n-1)\beta_0$, alors $\lim_{\beta_1 \to \infty} v^n = n\beta_0$.

- trouver une zone de paramètres pour lesquels : pour tout n, H^n est ergodique.

Théorème (E., Gaudillière, 2012)

Il existe $C > 0$ et $B > 0$ tels que pour $\beta_1 > B$,

$$\forall n \geq 2,\ \tilde{d}_n(\beta_1) \leq C\sqrt{\beta_0\beta_1}.$$

- Montrer qu'en fait $\beta_2 > \tilde{d}_{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil}$ est suffisant pour l'ergodicité.
- Si $\beta_2 > (n-1)\beta_0$, alors $\lim_{\beta_1 \to \infty} v^n = n\beta_0$.
- Etudier le domaine $\beta_1 \leq \beta_0 < \beta_2$.

- trouver une zone de paramètres pour lesquels : pour tout n, H^n est ergodique.

Théorème (E., Gaudillière, 2012)

Il existe $C > 0$ et $B > 0$ tels que pour $\beta_1 > B$,

$$\forall n \geq 2,\ \tilde{d}_n(\beta_1) \leq C\sqrt{\beta_0\beta_1}.$$

- Montrer qu'en fait $\beta_2 > \tilde{d}_{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil}$ est suffisant pour l'ergodicité.
- Si $\beta_2 > (n-1)\beta_0$, alors $\lim_{\beta_1 \to \infty} v^n = n\beta_0$.
- Etudier le domaine $\beta_1 \leq \beta_0 < \beta_2$.
- Soit $\beta_1 > \beta_0$. Montrer que si H^n est ergodique pour β_2, alors pour $\beta_2' > \beta_2$ il l'est aussi.

- trouver une zone de paramètres pour lesquels : pour tout n, H^n est ergodique.

Théorème (E., Gaudillière, 2012)

Il existe $C > 0$ et $B > 0$ tels que pour $\beta_1 > B$,

$$\forall n \geq 2, \; \tilde{d}_n(\beta_1) \leq C\sqrt{\beta_0\beta_1}.$$

- Montrer qu'en fait $\beta_2 > \tilde{d}_{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil}$ est suffisant pour l'ergodicité.
- Si $\beta_2 > (n-1)\beta_0$, alors $\lim_{\beta_1 \to \infty} v^n = n\beta_0$.
- Etudier le domaine $\beta_1 \leq \beta_0 < \beta_2$.
- Soit $\beta_1 > \beta_0$. Montrer que si H^n est ergodique pour β_2, alors pour $\beta_2' > \beta_2$ il l'est aussi.
- Montrer que $\frac{1}{t}(X_t^n(1), \dots, X_t^n(n))$ converge, $\forall \beta_0, \beta_1, \beta_2$.

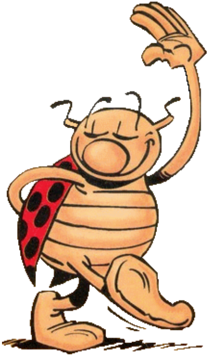
- trouver une zone de paramètres pour lesquels : pour tout n, H^n est ergodique.

Théorème (E., Gaudillière, 2012)

Il existe $C > 0$ et $B > 0$ tels que pour $\beta_1 > B$,

$$\forall n \geq 2,\ \tilde{d}_n(\beta_1) \leq C\sqrt{\beta_0\beta_1}.$$

- Montrer qu'en fait $\beta_2 > \tilde{d}_{\lceil \frac{n-1}{2} \rceil}$ est suffisant pour l'ergodicité.
- Si $\beta_2 > (n-1)\beta_0$, alors $\lim_{\beta_1 \to \infty} v^n = n\beta_0$.
- Etudier le domaine $\beta_1 \leq \beta_0 < \beta_2$.
- Soit $\beta_1 > \beta_0$. Montrer que si H^n est ergodique pour β_2, alors pour $\beta_2' > \beta_2$ il l'est aussi.
- Montrer que $\frac{1}{t}(X_t^n(1), \ldots, X_t^n(n))$ converge, $\forall \beta_0, \beta_1, \beta_2$.
- Limite d'échelle : convergence vers la solution d'une EDPS ? (travail en cours)



MERCI

DE

VOTRE

ATTENTION !