

Limite du continu pour des systèmes classiques d'interactions répétées

Julien Deschamps (ICJ, Lyon)

Journées Jeunes Probabilistes 2012

17 Avril 2012

Introduction

- Contexte : Système + Environnement
Exemple : Objet en contact bain thermique, particule...
- Environnement supposé trop compliqué à décrire, inaccessible aux mesures ou inconnu
- Approche hamiltonienne/markovienne
- Mécanique quantique (Attal, Pautrat) \Rightarrow Interactions répétées

Plan de l'exposé

- 1 Interactions répétées classiques
- 2 Un exemple hamiltonien
- 3 Convergence de la dynamique
 - Convergence du processus
 - Retour à l'exemple

- 1 Interactions répétées classiques
- 2 Un exemple hamiltonien
- 3 Convergence de la dynamique
 - Convergence du processus
 - Retour à l'exemple

Interactions répétées classiques

- Espace des phases du système : $x = (q, p) \in \mathbb{R}^{2d}$
Etat initial $x_0 = (q_0, p_0)$
- Pas de temps $h > 0$
- Etat de l'environnement $y = (y_{nh})_{n \in \mathbb{N}}$ (iid $y_{nh} \sim \mu$)
Espace des phases pour l'environnement : $y = (Q, P) \in \mathbb{R}^{2k}$
- Interaction :

$$\begin{aligned} U^{(h)} : \mathbb{R}^{2d} \times \mathbb{R}^{2k} &\longrightarrow \mathbb{R}^{2d} \\ (x, y) &\longmapsto U^{(h)}(x, y) \end{aligned}$$

Schéma d'interactions répétées

- Evolution du système

$$X_{(n+1)h}^h(y) = U^{(h)}(X_{nh}^h(y), y_{nh})$$

La suite $(X_{nh}^h)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov

- Question : Limite quand $h \rightarrow 0$?
- Convergence vers la solution d'une EDS

Schéma d'interactions répétées

- Evolution du système

$$X_{(n+1)h}^h(y) = U^{(h)}(X_{nh}^h(y), y_{nh})$$

La suite $(X_{nh}^h)_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov

- Question : Limite quand $h \rightarrow 0$?
- Convergence vers la solution d'une EDS

- 1 Interactions répétées classiques
- 2 Un exemple hamiltonien
- 3 Convergence de la dynamique
 - Convergence du processus
 - Retour à l'exemple

Cas Hamiltonien : Interaction harmonique sans friction

- Système (masse 1) relié par un ressort à une partie de l'environnement (masse 1)
- Hamiltonien pour une interaction

$$\begin{aligned} H[q, p, Q, P] &= \frac{p^2}{2} + \frac{P^2}{2} + \frac{1}{2}(q - Q)^2 \\ &= \frac{p^2}{2} + \frac{q^2}{2} + \frac{P^2}{2} + \frac{Q^2}{2} - qQ \end{aligned}$$

- Evolution du système

$$\begin{cases} \dot{q} = \frac{\partial H}{\partial p} = p \\ \dot{p} = -\frac{\partial H}{\partial q} = Q - q \end{cases}$$

Détermination de $U^{(h)}$

- Pas de temps $h > 0$ (supposé petit)
- Développement limité à l'ordre 1 des équations de Hamilton

$$\begin{cases} q(h) = q(0) + hp(0) + O(h^2) \\ p(h) = p(0) + h(Q(0) - q(0)) + O(h^2) \end{cases}$$

Interactions répétées

- Environnement : $(Q(nh), P(nh)) \sim \mu = \frac{e^{-Q^2/2 - P^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$
- Evolution du système

$$\begin{cases} q((n+1)h) = q(nh) + hp(nh) + O(h^2) \\ p((n+1)h) = p(nh) + h(Q(nh) - q(nh)) + O(h^2) \end{cases}$$

- Renforcement des interactions

$$Q(nh) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{h}}Q(nh) \quad \text{et} \quad P(nh) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{h}}P(nh)$$

- Evolution du système

$$\begin{cases} q((n+1)h) = q(nh) + hp(nh) + O(h^{3/2}) \\ p((n+1)h) = p(nh) + \sqrt{h}Q(nh) - hq(nh) + O(h^{3/2}) \end{cases}$$

Interactions répétées

- Environnement : $(Q(nh), P(nh)) \sim \mu = \frac{e^{-Q^2/2 - P^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$
- Evolution du système

$$\begin{cases} q((n+1)h) = q(nh) + hp(nh) + O(h^2) \\ p((n+1)h) = p(nh) + h(Q(nh) - q(nh)) + O(h^2) \end{cases}$$

- Renforcement des interactions

$$Q(nh) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{h}}Q(nh) \quad \text{et} \quad P(nh) \longrightarrow \frac{1}{\sqrt{h}}P(nh)$$

- Evolution du système

$$\begin{cases} q((n+1)h) = q(nh) + hp(nh) + O(h^{3/2}) \\ p((n+1)h) = p(nh) + \sqrt{h}Q(nh) - hq(nh) + O(h^{3/2}) \end{cases}$$

Evolution du système

Sous forme vectorielle

$$x((n+1)h) = U^{(h)}(x(nh), y(nh))$$

où

$$U^{(h)}(x, y) = x + \sqrt{h}\sigma(x)y + hb(x) + h\eta^{(h)}(x, y)$$

avec

$$b \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}, \quad \sigma \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $\eta^{(h)}$ peut être déterminée grâce au système

- 1 Interactions répétées classiques
- 2 Un exemple hamiltonien
- 3 Convergence de la dynamique
 - Convergence du processus
 - Retour à l'exemple

Convergence du processus

- Interpolation linéaire : pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$X_t^h = X_{\lfloor t/h \rfloor h}^h + \frac{t - \lfloor t/h \rfloor h}{h} \{X_{(\lfloor t/h \rfloor + 1)h}^h - X_{\lfloor t/h \rfloor h}^h\}$$

- Cas gaussien
- Cas bruit général pour un potentiel confinant

Convergence du processus

- Interpolation linéaire : pour tout $t \in \mathbb{R}_+$,

$$X_t^h = X_{\lfloor t/h \rfloor h}^h + \frac{t - \lfloor t/h \rfloor h}{h} \{X_{(\lfloor t/h \rfloor + 1)h}^h - X_{\lfloor t/h \rfloor h}^h\}$$

- Cas gaussien
- Cas bruit général pour un potentiel confinant

Cas Gaussien

- $(W_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ un mouvement brownien $2k$ -dimensionnel

$$y_{nh} = \frac{1}{\sqrt{h}}(W_{(n+1)h} - W_{nh})$$

- Interaction $U^{(h)}(x, y) = x + \sqrt{h}\sigma(x)y + hb(x) + h\eta^{(h)}(x, y)$

avec $\eta^{(h)}$ satisfaisant $|\eta^{(h)}(x, y)| \leq K(h|x| + |y|)$

- Soit $(X_t^{x_0})$ la solution partant de x_0 de

$$dX_t^{x_0} = b(X_t^{x_0}) dt + \sigma(X_t^{x_0}) dW_t$$

Cas Gaussien

- $(W_t)_{t \in \mathbb{R}_+}$ un mouvement brownien $2k$ -dimensionnel

$$y_{nh} = \frac{1}{\sqrt{h}}(W_{(n+1)h} - W_{nh})$$

- Interaction $U^{(h)}(x, y) = x + \sqrt{h}\sigma(x)y + hb(x) + h\eta^{(h)}(x, y)$

avec $\eta^{(h)}$ satisfaisant $|\eta^{(h)}(x, y)| \leq K(h|x| + |y|)$

- Soit $(X_t^{x_0})$ la solution partant de x_0 de

$$dX_t^{x_0} = b(X_t^{x_0}) dt + \sigma(X_t^{x_0}) dW_t$$

Cas gaussien - Convergence L^p et p.s.

Théorème (J. D.)

Alors, pour tout état initial x_0 et pour tout $\tau > 0$

- b et σ globalement Lipschitz,

$$X_t^h \xrightarrow{h \rightarrow 0} X_t^{x_0} \quad \text{p.s. et dans } L^p \text{ pour tout } p \geq 1 \text{ sur } [0, \tau]$$

- b et σ localement Lipschitz et linéairement bornées

$$X_t^h \xrightarrow{h \rightarrow 0} X_t^{x_0} \quad \text{dans } L^p \text{ pour tout } p \geq 1 \text{ sur } [0, \tau]$$

Interaction harmonique sans friction

Sous forme vectorielle

$$x((n+1)h) = U^{(h)}(x(nh), y(nh))$$

où

$$U^{(h)}(x, y) = x + \sqrt{h}\sigma(x)y + hb(x) + h\eta^{(h)}(x, y)$$

avec

$$b \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 \end{pmatrix}, \quad \sigma \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et $\eta^{(h)} \dots$

Interaction harmonique sans friction

- Pour tout q_0, p_0 et $\tau > 0$, l'évolution du système tend dans L^p et *p.s.* sur $[0, \tau]$ vers la solution de

$$\begin{cases} dq_t &= p_t dt \\ dp_t &= -q_t dt + dW_t \end{cases}$$

Cas général - Convergence en loi

Théorème (J. D.)

Soit $H(p, q, P, Q) = \frac{\|p\|^2}{2} + V(q) + H_E(P, Q) + \alpha(q)\beta(Q)$,

l'hamiltonien pour une interaction Système-Environnement.

Soient m et σ respectivement la moyenne et la variance de $\beta(Q)$ selon μ .

Alors, (sous certaines conditions sur V et α), pour toute condition initiale (q_0, p_0) de \mathbb{R}^{2d} , le processus $(X_t^h)_{t \in \mathbb{R}_+}$ converge en loi quand h tend vers 0 vers la solution de

$$\begin{cases} dq_t = p_t dt \\ dp_t = -\nabla V(q_t) - m \nabla \alpha(q_t) dt - \sigma \nabla \alpha(q_t) dW_t, \end{cases}$$

où W_t est un mouvement brownien 1-dimensionnel.