Marches aléatoires sur des graphes quasi-périodiques

Basile de Loynes

16 avril 2012

Graphes

Définition (Graphes)

Un graphe $\mathbb{G}$ est la donnée d'un quadruplet $\mathbb{G} = (\mathbb{G}^0, \mathbb{G}^1, r, s)$ où

1. *$\mathbb{G}^0$ est un ensemble dénombrable de points,*
2. *$\mathbb{G}^1$ est un ensemble dénombrable d'arêtes dirigées,*
3. *r, s sont des applications $\mathbb{G}^1 \to \mathbb{G}^0$ appelées image et source respectivement.*

On considère des graphes simples, i.e. on proscrit

1. les boucles, i.e. les arêtes $\alpha \in \mathbb{G}^1$ telle que $s(\alpha) = r(\alpha)$;
2. les arêtes multiples, i.e. l'application $(s, r) : \mathbb{G}^1 \to \mathbb{G}^0 \times \mathbb{G}^0$ est injective.

Graphe sans arête multiple $\Longrightarrow \mathbb{G}^1 \subset \mathbb{G}^0 \times \mathbb{G}^0 \Longrightarrow r, s$ superflues.

Graphes libres et contraints

La notion de graphe libre correspond à la notion de graphe de Cayley.

Définition (Graphe de Cayley)

Soit Γ *un groupe de type fini et* $\mathcal{S}_\Gamma$ *un ensemble fini symétrique de générateurs de* Γ*. Le graphe de Cayley,* $\mathrm{Cayley}(\Gamma, \mathcal{S}_\Gamma)$*, est le graphe* $\mathbb{G} = (\mathbb{G}^0, \mathbb{G}^1, r, s)$ *où*

- $\mathbb{G}^0 = \Gamma$,
- $(u, v) \in \mathbb{G}^1 \iff u^{-1}v \in \mathcal{S}_\Gamma$.

Définition (Graphe contraint)

Une contrainte est une application $F : \Gamma \times \mathcal{S}_\Gamma \to \{0, 1\}$*. Un graphe* F*-contraint est un sous-graphe du graphe de Cayley,* $\mathrm{Cayley}(\Gamma, \mathcal{S}_\Gamma)$*, tel que* $\mathbb{G}^1 = \{(u, v) \in \Gamma^2 : F(u, u^{-1}v) = 1\}$.

Exemples

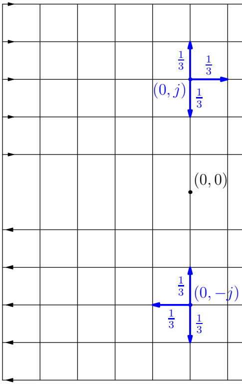
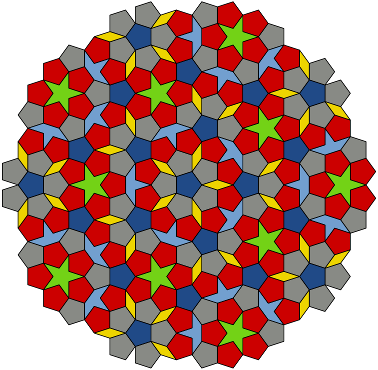
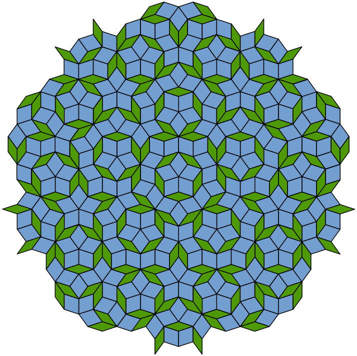


FIGURE: Exemple de sous-graphe contraint du graphe de Cayley de $\mathbb{Z}^2$

Pavages de Penrose



(a) 1er pavage de Penrose



(b) 3ème pavage de Penrose

Méthode de coupe et projection

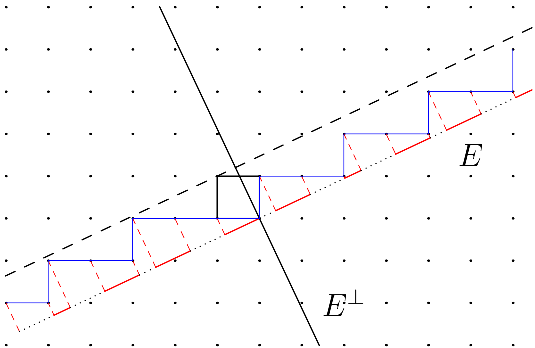


FIGURE: Pavage de coupe et projection, un autre example de graphe contraint

Hypothèses techniques

On cherche à paver un espace E de dimension $d < N$.

1. $\mathbb{Z}^N \subset \mathbb{R}^N$, $\mathcal{S} = \{\pm\varepsilon_i : 1 \leq i \leq N\}$,
2. $\mathbb{R}^N = E \oplus E^\perp$ avec dim $E = d$, π et $\pi^\perp$ les projections associées,
3. $\gamma_N = \{\sum_{i=1}^N \lambda_i \varepsilon_i : \lambda_i \in [0,1], 1 \leq i \leq N\}$,
4. $I = \{i_1, \cdots, i_d\} \subset \{1, \cdots, N\}$
5. $\gamma_I = \{\sum_{l=1}^d \lambda_l \varepsilon_l, \lambda_l \in [0,1], i_l \in I\}$,
6. $D_I = \pi(\gamma_I)$ et $D_I' = \pi^\perp(\gamma_I)$,
7. Une hypothèse de non-dégénérescence de sorte que les faces d-dimensionelles du cube unité soit isomorphe à leurs projections D_I et D_I'.

Théorème d'Oguey, Duneau et Katz

Posons pour $t \in E^{\perp}$,

$$\mathcal{P}_t = \{x + D_I : x = \pi(\xi), I = \{i_1, \cdots, i_d\}, \xi \in \mathbb{Z}^N : \pi^{\perp}(\xi) \in D'_{I^{\complement}} + t\}$$

Théorème (ODK, 1988)

L'ensemble $\mathcal{P}_t$ est un pavage de $E \cong \mathbb{R}^d$ pour tout $t \in E^{\perp}$ générique.

Remarques :

1. Il existe un ensemble exceptionnel T_0 de translations t telles que la projection est ambigue : on ne sait pas quelle face projetter ;
2. T_0 est dénombrable $\Longleftrightarrow$ $t \notin T_0$ est générique ;
3. le théorème affirme qu'il existe une unique variété à facettes d-dimensionel entièrement contenu dans la bande ;
4. $E \cap \mathbb{Z}^N$ est le groupe de translation du pavage.

Exemple 1, le 3ème pavage de Penrose :
Dans $\mathbb{R}^5$, $E = \mathrm{Vect}(v_1, v_2)$ avec

$$v_1 = (1, \cos(2\pi/5), -\cos(\pi/5), -\cos(\pi/5), \cos(2\pi/5))$$
$$v_2 = (0, \sin(2\pi/5), \sin(\pi/5), -\sin(\pi/5), -\sin(2\pi/5))$$

Exemple 2, le pavage icosahedral de $\mathbb{R}^3$:
Dans $\mathbb{R}^6$, $E = \mathrm{Im}\ \pi$ de dimension 3 avec

$$\pi = \frac{1}{2\sqrt{5}} \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & \sqrt{5} & 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & \sqrt{5} & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & \sqrt{5} & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 & \sqrt{5} & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \sqrt{5} \end{bmatrix}.$$

Théorème, L, 2012

La méthode de coupe et projection définit un sous-graphe contraint de $\mathbb{Z}^N$ dont la contrainte est fonction de l'indicatrice de la bande.

Théorème

Soit $N \geq d \geq 0$ des entiers. Supposons que $E^\perp \cap \mathbb{Z}^N = \{0\}$ et $t \in E^\perp$ générique. Alors, la marche aléatoire simple sur le graphe contraint est

- *récurrente si* $\dim E \leq 2$,
- *transiente si* $\dim E \geq 3$.

Remarques :

1. L'hypothèse $E^\perp \cap \mathbb{Z}^N = \{0\}$ est générique ;
2. cela généralise l'alternative de Polỳa ;
3. cela se généralise aux marches aléatoires réversibles sous certaines conditions.

Merci ![1]

1. Docment sous licence lrab.