Théorème du Moment Quatrième pour le q-Mouvement Brownien

A.Deya, S.Noreddine, I.Nourdin

Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires, Université Paris 6.

19 avril 2012

Théorème de Nualart et Peccati

Soit W un mouvement brownien. On peut construire une intégrale multiple par rapport à W. Pour toute fonction de $L^2(\mathbb{R}^p)$, on notera

$$I_p(f) = \int f(t_1, \ldots, t_p) dW_{t_1} \ldots dW_{t_p}.$$

Théorème (Nualart, Peccati)

Considérons une famille $F_n = I_p(f_n)$ d'intégrales multiples d'ordre p, où f_n est une suite de fonctions symétriques de $L^2(\mathbb{R}^p)$. On suppose en outre que la suite F_n est de variance unitaire. On a alors équivalence entre :

- La suite F_n converge en loi vers $\mathcal{N}(0, 1)$.
- le moment quatrième $E(F_n^4)$ converge vers 3.

Théorème de Peccati et Tudor

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ un espace probabilisé et W un brownien dans cet espace tel que $\mathcal{F}$ soit la tribu engendrée par W. Alors toute variable $X \in L^2(\Omega)$ est décomposable sous la forme $X = \sum_{p=0}^{\infty} I_p(f_p)$, où chaque $f_p \in L^2(\mathbb{R}^p)$ est symétrique.

Théorème (Peccati, Tudor)

Soit $(F_{1,n}, \dots, F_{r,n}) = (I_{p_1}(f_{1,n}), \dots, I_{p_r}(f_{r,n}))$ une famille de vecteurs d'intégrales multiples, avec $f_{i,n} \in L^2(\mathbb{R}^{p_i})$ symétrique. On suppose que $E(F_{i,n}F_{j,n}) \longrightarrow C_{i,j}$. On a alors équivalence entre :

- Le vecteur $(F_{i,n}, \dots, F_{r,n})$ converge en loi vers $\mathcal{N}_r(0, C)$.
- Chaque composante $F_{i,n}$ converge en loi vers $\mathcal{N}(0, C_{i,i})$.

Espace de probabilité non-commutatif

- Un espace de probabilité non-commutatif est la donnée d'une $\mathbb{C}$-algèbre $\mathcal{A}$ munie d'un opérateur adjoint et d'une forme linéaire $\phi : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{C}$ unitaire (i.e $\phi(1_{\mathcal{A}}) = 1$), positive (i.e $\phi(XX^*) \geq 0$) et traciale (i.e $\phi(XY) = \phi(YX)$).
  Par exemple :
  $\mathcal{A} = L^{\infty}(\omega, \mathcal{F}, P)$ avec $X^* = X$ et $\phi(X) = E(X)$
  $\mathcal{A} = L^{\infty}(\omega, \mathcal{F}, P, M_n(\mathbb{C}))$ avec $X^* =^t \overline{X}$ et $\phi(X) = \frac{1}{n} E(tr(X))$
- On dit que X est une variable aléatoire si X est autoadjoint.
  On dit que X a pour loi μ_X si

$$\phi(X^k) = \int_{\mathbb{R}} t^k \mu_X(dt), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Espace de Probabilité non-commutatif

- On dit que les sous-algèbres $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ sont libres si, pour tous $X_1, \ldots, X_m$ appartenant à $\mathcal{A}_1, \ldots, \mathcal{A}_n$ et tels que, pour $1 \leq j \leq m-1$, X_j et X_{j+1} n'appartiennent pas au même $\mathcal{A}_i$,

$$\forall i \quad \phi(X_i) = 0 \Rightarrow \phi(X_1 \ldots X_m) = 0.$$

- Deux variables aléatoires X, Y sont libres si les algèbres unitaires engendrées par X et Y sont libres.
- Dans la suite, on supposera que $\mathcal{A}$ est une algèbre de von Neumann (i.e une algèbre d'opérateurs bornés sur un espace de Hilbert qui est fermée pour l'opération adjoint et la convergence faible des opérateurs). On dit qu'on a convergence faible d'une suite vers un élément de cet espace si on a la convergence de tous les moments.

Mouvement Brownien Libre

On définit la loi semicirculaire de variance t (notée $\mathcal{S}(0,t)$) comme la loi de probabilité à support dans $[-2\sqrt{t}, 2\sqrt{t}]$ et de densité

$$\mathcal{S}(0,t)(dx) = \frac{1}{2\pi t}\sqrt{4t - x^2}\,dx.$$

Définition

Un mouvement brownien libre est un processus stochastique sur un espace de probabilité non-commutatif vérifiant :

- $S_0 = 0$;
- pour $t_1 < t_2$, $S_{t_2} - S_{t_1}$ suit la loi semicirculaire $\mathcal{S}(0, t_2 - t_1)$;
- pour $t_1 < \ldots < t_n$, $S_{t_1}, S_{t_2} - S_{t_1}, \ldots, S_{t_n} - S_{t_{n-1}}$ sont libres.

Mouvement brownien libre

Si on considère $X_t = \frac{1}{\sqrt{n}}(B_{i,j}(t))_{1\leq i,j\leq n}$, où $(B_{i,j}(t))_{1\leq i\leq j\leq n}$ est une famille de mouvements browniens indépendants et si on suppose de plus que la matrice X_t est symétrique, alors X converge en loi (comme processus) vers un mouvement brownien libre.

Le q-mouvement brownien

Définition

- Soit r un nombre pair. Un couplage de $\{1, \ldots, r\}$ est une partition de $\{1, \ldots, r\}$ en $\frac{r}{2}$ ensemble disjoints de cardinal 2. On note $\mathcal{P}_2\{1, \ldots, r\}$ l'ensemble des couplages de $\{1, \ldots, r\}$.
- Un croisement de $\pi \in \mathcal{P}_2\{1, \ldots, r\}$ est un ensemble $\{(x_1, y_1), (x_2, y_2)\}$ avec $(x_i, y_i) \in \pi$ et $x_1 < x_2 < y_1 < y_2$. On notera $Cr(\pi)$ le nombre de croisements de π.
- L'ensemble des couplages qui n'ont pas de croisement est noté $NC_2\{1 \ldots r\}$.

Le q-mouvement brownien

Une définition équivalente du mouvement brownien W et du mouvement brownien libre S est comme suit. Pour tout $t_1, \ldots, t_r$,

$$E(W_{t_1} \ldots W_{t_r}) = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_2\{1,\ldots,r\}} \prod_{(i,j)\in\pi} t_i \wedge t_j;$$

$$E(S_{t_1} \ldots S_{t_r}) = \sum_{\pi \in NC_2\{1,\ldots,r\}} \prod_{(i,j)\in\pi} t_i \wedge t_j.$$

Définition (Bozejko, Speicher)

Soit $q \in (-1,1)$ et $X^{(q)}$ un processus stochastique dans un espace de probabilité non-commutatif. On dit que $X^{(q)}$ est un q-mouvement brownien si ses moments joints vérifient

$$E(X^q_{t_1} \ldots X^q_{t_r}) = \sum_{\pi \in \mathcal{P}_2\{1,\ldots,r\}} q^{Cr(\pi)} \prod_{(i,j)\in\pi} t_i \wedge t_j.$$

Théorèmes du moment quatrième

Théorème (Nualart, Peccati)

Soit $I_p^{(W)}(f_n)$ une suite d'intégrales multiples par rapport au mouvement brownien W, de variance unitaire et telle que les f_n sont des fonctions symétriques de $L^2(\mathbb{R}^p)$. Alors :

$$I_p^{(W)}(f_n) \stackrel{\text{loi}}{\to} W_1 \sim \mathcal{N}(0,1) \quad \Leftrightarrow \quad E[I_p^{(W)}(f_n)^4] \longrightarrow 3.$$

Théorème (Kemp, Nourdin, Peccati et Speicher)

Soit $I_p^{(S)}(f_n)$ une suite d'intégrales multiples par rapport au mouvement brownien libre S, de variance unitaire et telle que les f_n soient des fonctions miroir-symétriques de $L^2(\mathbb{R}^p)$. Alors :

$$I_p^{(S)}(f_n) \stackrel{\text{loi}}{\to} S_1 \sim \mathcal{S}(0,1) \quad \Leftrightarrow \quad E[I_p^{(S)}(f_n)^4] \longrightarrow 2.$$

Théorème du moment 4ème pour le q-mouvement brownien

- Note $\mathcal{G}_q(0,1)$ la loi de $X_1^{(q)}$
- On peut définir (Donati-Martin) une intégrale stochastique par rapport au q-mouvement brownien, qu'on notera

$$I_p^{(q)}(f) = \int f(t_1, \dots, t_p) dX_{t_1}^{(q)} \dots dX_{t_p}^{(q)}.$$

Conjecture

Soit $q \in (-1,1]$ et $I_p^{(q)}(f_n)$ une suite d'intégrales multiples de variance unitaire et telle que les f_n sont des fonctions symétriques de $L^2(\mathbb{R}^p)$. Alors on a équivalence entre :

- $I_p^{(q)}(f_n)$ converge en loi vers $X_1^{(q)} \sim \mathcal{G}_q(0,1)$;
- $E[I_p^{(q)}(f_n)^4] \longrightarrow 2 + q$.

Théorème du moment 4ème pour le q-mouvement brownien

- Note $\mathcal{G}_q(0,1)$ la loi de $X_1^{(q)}$
- On peut définir (Donati-Martin) une intégrale stochastique par rapport au q-mouvement brownien, qu'on notera

$$I_p^{(q)}(f) = \int f(t_1, \ldots, t_p) dX_{t_1}^{(q)} \ldots dX_{t_p}^{(q)}.$$

Théorème (Deya, Noreddine, Nourdin)

Soit $q \in [0,1]$ et $I_p^{(q)}(f_n)$ une suite d'intégrales multiples de variance unitaire et telle que les f_n sont des fonctions symétriques de $L^2(\mathbb{R}^p)$. Alors on a équivalence entre :

- $I_p^{(q)}(f_n)$ converge en loi vers $\mathcal{G}_{q^{p^2}}(0,1)$;
- $E[I_p^{(q)}(f_n)^4] \longrightarrow 2 + q^{p^2}$.

Théorème de Breuer et Major

Notons H_n le n^{ime} polynôme d'Hermite, i.e. $H_0(x) = 1$, $H_1(x) = x$, $H_2(x) = x^2 - 1$ et $H_{n+1}(x) = xH_n(x) - nH_{n-1}(x)$. Posons $f(x) = \sum_{s \geq q} a_s H_s(x) \in L^2((2\pi)^{-1} e^{-x^2/2} dx)$.

Théorème (Breuer, Major)

Soit $(X_k)_{k \geq 0}$ une famille stationnaire de gaussiennes standard, de covariance ρ. Si $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\rho(k)|^q < \infty$ alors

$$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{k=0}^{\lfloor nt \rfloor - 1} f(X_k) \xrightarrow{f.d.d} \sqrt{\sum_{s \geq q} s! a_s^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \rho(k)^s}\ W_t,$$

où W est un mouvement brownien standard.