Limites de grandes matrices aléatoires : distributions de trafics

Camille Male

École Normale Supérieure de Lyon

April 19, 2012

Contexte et motivations

Qu'est ce qu'une matrice aléatoire

Matrice dont les entrées sont des variables aléatoires: $M_{N,N'}$ à entrées i.i.d. $\mathcal{N}(0, \frac{1}{\sqrt{N'}})$

- $H_N = \frac{1}{\sqrt{2}}(M_{N,N} + M_{N,N}^*)$

- $H_N = U_N \Delta_N U_N^*$

- $W_{N,N'} = \big(\Sigma_N^{\frac{1}{2}} \times M_{N,N'}\big)\big(\Sigma_N^{\frac{1}{2}} \times M_{N,N'}\big)^*$

Qu'est ce qu'une matrice aléatoire

Matrice dont les entrées sont des variables aléatoires: $M_{N,N'}$ à entrées i.i.d. $\mathcal{N}(0, \frac{1}{\sqrt{N'}})$

- $H_N = \frac{1}{\sqrt{2}}(M_{N,N} + M_{N,N}^*)$: densité

$$\exp\big(-\frac{N}{2}\mathrm{Tr}(X^2)\big)\prod_{i\leqslant j}\mathrm{d}\ \mathrm{Re}X_{i,j}\prod_{i<j}\mathrm{d}\ \mathrm{Im}X_{i,j}$$

- $H_N = U_N\Delta_N U_N^*$: mesure de Haar sur $\mathcal{O}_N$

- $W_{N,N'} = \big(\Sigma_N^{\frac{1}{2}} \times M_{N,N'}\big)\big(\Sigma_N^{\frac{1}{2}} \times M_{N,N'}\big)^*$: matrice de covariance empirique de N' vecteurs $\mathcal{N}(0,\Sigma_N)$.

Autres modèles

Matrice de Wigner X_N:

- $X_N = X_N^*$,
- à entrées sous diagonales indépendantes
- entrées diagonales de $\sqrt{N} X_N \sim \nu$ sur $\mathbb{R}$
- entrées extra-diagonales de $\sqrt{N} X_N \sim \mu$ sur $\mathbb{R}$

Matrice de permutation uniforme U_N:

σ_N permutation aléatoire uniforme,

$$U_N(i,j) = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma_N(i) = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Spectre de grandes matrices aléatoires

Objectif: calculer le spectre le grandes matrices aléatoires, i.e. caractériser la limite éventuelle de

$$\mathcal{L}_{H_N} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \delta_{\lambda_i}$$

Contexte à plusieurs matrices

1. $H_N = A_N + X_N$
2. $H_N = A_N + U_N B_N U_N^*$
3. $H_{N,N'} = \left(\Sigma_N^{\frac{1}{2}} \times M_{N,N'}\right)\left(\Sigma_N^{\frac{1}{2}} \times M_{N,N'}\right)^*$

où X_N Wigner, U_N Haar ou permutation uniforme, A_N, B_N déterministes

Plus généralement, $H_N = P(\mathbf{X}_N, \mathbf{U}_N, \mathbf{A}_N)$ hermitienne, où $\mathbf{X}_N = (X_1, \dots, X_p)$, $\mathbf{U}_N = (U_1, \dots, U_q)$, $\mathbf{A}_N = (A_1, \dots, A_r)$

Probabilités libres

Voiculescu (90's): isomorphisme des facteurs du groupe libre

Cadre abstrait d'espace de probabilités non commutatif

*-Distributions et *-liberté

La *-distribution de $\mathbf{A}_N = (A_1, \dots, A_p)$ matrices aléatoires

$$\begin{array}{rccc} \Phi_{\mathbf{A}_N}: & \mathbb{C}\langle x, x^* \rangle & \to & \mathbb{C} \\ & P & \mapsto & \mathbb{E}\Big[\frac{1}{N}\mathrm{Tr}\big[P(\mathbf{A}_N, \mathbf{A}_N^*)\big]\Big] \end{array}$$

Convergence = convergence ponctuelle de $\Phi_{\mathbf{A}_N}$ (= CV en moments)

*-espace de probabilité $(\mathcal{A}, .^*, \Phi)$

Algèbre unitaire $\mathcal{A}$ sur $\mathbb{C}$ + involution antilinéaire $\cdot^*$ + forme linéaire $\Phi : \mathcal{A} \to \mathbb{C}$ t.q. $\Phi(\mathbf{1}) = 1$, $\Phi(a^*a) \geq 0$ et $\Phi(ab) = \Phi(ba)$

*-freeness

Les sous algèbres $\mathcal{A}_1, \dots, \mathcal{A}_p$ d'un *-espace de probabilité $(\mathcal{A}, .^*, \Phi)$ sont libres ssi $\Phi(a_j) = 0, a_j \in \mathcal{A}_{i_j}$ et $i_j \neq i_{j+1}$ pour tout $j \geq 1$ implique $\Phi(a_1 \dots a_n) = 0$ pour tout $n \geq 1$

*-liberté asymptotique

Théorème de Voiculescu

1) $\mathbf{X}_N$ matrices de Wigner indépendantes
2) $\mathbf{U}_N$ matrices unitaires de Haar indépendantes
3) $\mathbf{A}_N$ ayant une *-distribution limite, uniformément bornées

$\mathbf{X}_N, \mathbf{U}_N, \mathbf{A}_N$ indépendantes $\Rightarrow$ $(\mathbf{X}_N, \mathbf{U}_N, \mathbf{A}_N)$ a une *-distribution limite

$$(\mathbf{X}_N, \mathbf{U}_N, \mathbf{A}_N) \underset{N\to\infty}{\overset{\mathcal{L}^{n.c.}}{\longrightarrow}} (\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{a})$$

1) $\mathbf{x}$ système semicirculaire libre
2) $\mathbf{u}$ unités de Haar libres
3) $\mathbf{a}$ limite en *-distribution de $\mathbf{A}_N$

$\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{a}$ libres

Application de la *-liberté asymptotique

En d'autres termes: $\forall P$ polynôme

$$\mathbb{E}\Big[\frac{1}{N}\mathrm{Tr}\big[P(\mathbf{X}_N, \mathbf{U}_N, \mathbf{A}_N)\big]\Big] \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \tau\big[P(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{a})\big]$$

Exemple: somme conjuguée de matrices hermitiennes

$$H_N = A_N + U_N B_N U_N^*$$

donne une opération entre mesures

$$\mathcal{L}_{H_N} \sim \mathcal{L}_{A_N} \boxplus \mathcal{L}_{B_N}$$

appelée convolution libre

Si on remplace U_N par une matrice de Permutation uniforme, les choses se passent autrement...

Distribution de trafics

monômes n.c. $\leftarrow$ graphes dont les arêtes sont étiquetées par des indéterminées

Cadre abstrait de convergence de réseaux:

- Généralise la convergence locale faible des graphes
- Cas particulier de la convergence en *-distribution

*-distribution de matrices aléatoires

La *-distribution de $\mathbf{A}_N = (A_1, \dots, A_p)$

$$\begin{array}{rccc} \Phi_{\mathbf{A}_N} : & \mathbb{C}\langle x, x^* \rangle & \to & \mathbb{C} \\ & P & \mapsto & \frac{1}{N}\mathrm{Tr}\big[P(\mathbf{A}_N, \mathbf{A}_N^*)\big] \end{array}$$

i.e. la collection des nombres (sur les monômes unitaires)

$$\frac{1}{N}\sum_{i_1,\dots,i_K=1}^{N} A_{\gamma(1)}^{\varepsilon(1)}(i_1,i_2)A_{\gamma(2)}^{\varepsilon(2)}(i_2,i_3)\dots A_{\gamma(K-1)}^{\varepsilon(K-1)}(i_{K-1},i_K)A_{\gamma(K)}^{\varepsilon(K)}(i_K,i_1)$$

$\forall K \geq 1, \forall \varepsilon : \{1,\dots,K\} \to \{1,*\}, \forall \gamma\{1,\dots,K\} \to \{1,\dots,p\}$

Distribution of traffics of random matrices

La distribution de trafics de $\mathbf{A}_N = (A_1, \dots, A_p)$

La collection des nombres

$$\frac{1}{N} \sum_{\ker(\mathbf{i}) \geq \pi} A_{\gamma(1)}^{\varepsilon(1)}(i_1, i_2) A_{\gamma(2)}^{\varepsilon(2)}(i_3, i_4) \dots A_{\gamma(K)}^{\varepsilon(K)}(i_{2K-1}, i_{2K})$$

$\forall K \geq 1, \forall \varepsilon : \{1, \dots, K\} \to \{1, *\}, \forall \gamma \{1, \dots, K\} \to \{1, \dots, p\}$
la somme porte sur les $i_1, \dots, i_{2K} = 1, \dots, N$ dont certains indices sont contraints à être égaux: partition π de $\{1, \dots, 2K\}$

*-graphes test

L'ensemble $\mathcal{G}\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \rangle$

des graphes étiquetés $T = (V, E, \gamma, \varepsilon)$

- (V, E) graph fini, connexe (avec des arêtes multiples et des boucles)
- $(\gamma, \varepsilon) : E \times E \to \{1, \dots, p\} \times \{1, *\}$, l'arête e est étiquetée $x_{\gamma(e)}^{\varepsilon(e)}$

Distribution (formelle) de trafics:

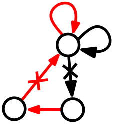
$$\begin{array}{cccc} \tau : & \mathcal{G}\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \rangle & \to & \mathbb{C} \\ & T & \mapsto & \tau[T] \end{array}$$

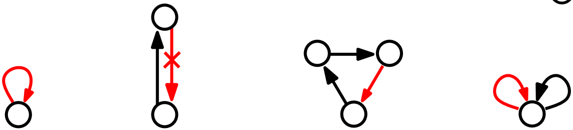
Trace de *-graphes tests en des matrices

$A_N = (A_1, \dots, A_p), \;\; T = (V, E, \gamma, \varepsilon)$

$$\tau_{\mathbf{A}_N}\big[T(\mathbf{A}_N)\big] = \tau_N\big[T(\mathbf{A}_N)\big] = \frac{1}{N} \sum_{\phi : V \to \{1,\dots,N\}} \prod_{e \in E} A_{\gamma(e)}^{\varepsilon(e)}\big(\phi(e)\big)$$

$\frac{1}{N} \sum_{i_1, i_2, i_2} A_N^*(i_1, i_2) A_N(i_2, i_2) B_N(i_2, i_2) B_N^*(i_2, i_3) A_N(i_3, i_1)$





$\Rightarrow \frac{1}{N}\mathrm{Tr}[A_N], \;\; \frac{1}{N}\mathrm{Tr}[B_N A_N^*], \;\; \frac{1}{N}\mathrm{Tr}[B_N^2 A_N], \;\; \frac{1}{N}\mathrm{Tr}[A_N \circ B_N]$

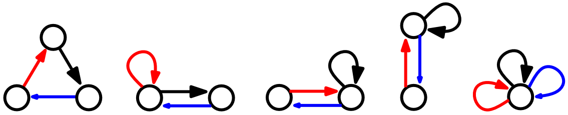
Trace injective

$\tau^0 =$ "Transformée de Fourier" d'une distribution de trafics τ

Trace injective

$A_N = (A_1, \dots, A_p)$, $T = (V, E, \gamma, \varepsilon)$

$$\tau^0_{\mathbf{A}_N}\big[T(\mathbf{A}_N)\big] = \tau^0_N\big[T(\mathbf{A}_N)\big] = \frac{1}{N} \sum_{\substack{\phi : V \to \{1,\dots,N\} \\ \text{injective}}} \prod_{e \in E} A_{\gamma(e)}^{\varepsilon(e)}\big(\phi(e)\big)$$



$$\tau[T] = \sum_{\pi \in \mathcal{P}(V)} \tau^0\big[\pi(T)\big]$$

$$\tau^0[T] = \sum_{\pi \in \mathcal{P}(V)} \mu_V(\pi) \tau\big[\pi(T)\big]$$

Exemples de distributions de trafics limites

Pour les modèles classiques

$$\tau^0[T] = \begin{cases} \textit{expression simple} & \text{si } T \text{ a une certaines forme} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Matrices aléatoires invariantes par permutation

Si $M_N \overset{\mathcal{L}}{=} U_N M_N U_N^*$, $\forall T = (V, E, \varepsilon)$

$$\mathbb{E}\Big[\tau_N^0\big[T(M_N)\big]\Big] = \frac{1}{N} \sum_{\substack{\phi : V \to \{1,\dots,N\} \\ \text{injective}}} \mathbb{E}\Big[\prod_{e\in E} M_N^{\varepsilon(e)}\big(\phi(e)\big)\Big]$$

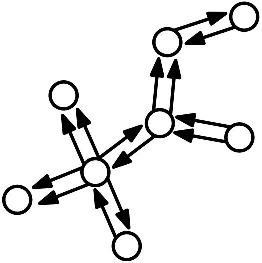
$$= \frac{(N-1)!}{(N-|V|)!}\ \delta^0\big[T(M_N)\big]$$

Si de plus $\delta^0\big[T(M_N)\big]$ ne dépend pas de N, alors

$$\mathbb{E}\left[\tau_N^0\left[T\left(\frac{M_N}{\sqrt{N}}\right)\right]\right] = N^{|V|-\left(\frac{|E|}{2}+1\right)}\ \delta^0\big[T(M_N)\big] + o(1)$$

Distribution de trafics limite d'une matrice de Wigner

X_N matrice de Wigner à entrées réduites

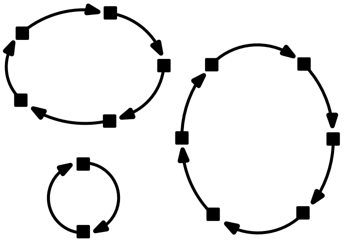


$$\mathbb{E}\Big[\tau_N^0\big[T(X_N)\big]\Big] \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 1 & \text{si } T \text{ arbre double} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

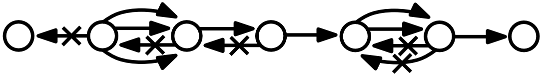
Distribution de trafics limite d'une matrice de perm. unif.

Matrice U_N permutation uniforme = matrice 0-1 $\sim$ matrice d'adjacence de G_N

G_N = Cycles de σ_N perm. unif.
les cycles de σ_N sont "grands"

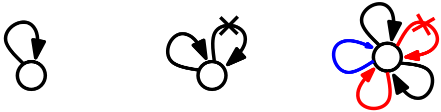


$$\mathbb{E}\Big[\tau_N^0\big[T(U_N)\big]\Big] \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \begin{cases} 1 & \text{si } T \text{ est une ligne dirigée} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$



Distribution diagonale associée à μ

μ mesure de probabilités sur $\mathbb{C}^p$, $(Z_1, \dots, Z_p) \sim \mu$



$$\tau^0_\mu[T] = \begin{cases} \mathbb{E}\Big[\prod_{e\in E} Z_{\gamma(e)}^{\varepsilon(e)} \Big] & \text{si } T \text{ est une fleur} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Distribution de trafics des matrices diagonales

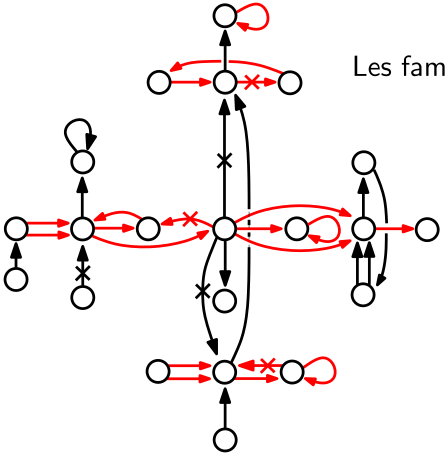
La liberté des distributions de trafics

Notion de produit libre de *-graphes test + règle simple

$$\tau^0[T] = \begin{cases} \textit{expression simple} & \text{si } T \text{ est un produit libre} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La liberté des trafics

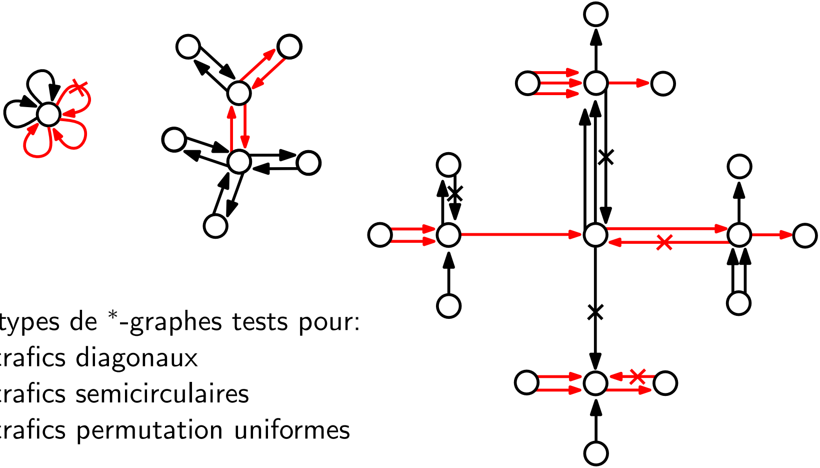
Un exemple (un peu compliqué volontairement) de produit libre



Les familles de trafics $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_p$ sont libres iff

- $\forall$ *-graphe test T produit libre $\tau^0[T] = \prod_{\tilde T} \tau^0[\tilde T]$
- $\tau^0[T] = 0$ sinon

Exemples de produits libres de *-graphes tests



Prototypes de *-graphes tests pour:

- trafics diagonaux
- trafics semicirculaires
- trafics permutation uniformes

$\Rightarrow$ La liberté des trafics diagonaux est l'indépendance

$\Rightarrow$ s semicirculaire libre avec un trafics a $\Rightarrow$ a et s sont *-libres

La liberté asymptotique des trafics

Théorème: liberté asymptotique sur $\mathcal{G}\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \rangle$

- $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_p$ familles de matrices aléatoires indépendantes, $\mathbf{X}_j \overset{\mathcal{L}}{=} U_N \mathbf{X}_j U_N^*$
- $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p$ familles de trafics libres

On suppose $\forall j = 1, \dots, p$: pour tout *-graphes tests $T_1, \dots, T_K$

$$\mathbb{E}\Big[\tau_N^0\big[T_1(\mathbf{X}_j)\big] \dots \tau_N^0\big[T_K(\mathbf{X}_j)\big]\Big] \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \tau^0\big[T_1(\mathbf{x}_j)\big] \dots \tau^0\big[T_K(\mathbf{x}_j)\big]$$

Alors $(\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_p)$ converge en distribution de trafics vers $(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_p)$ sur $\mathcal{G}\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \rangle$

Un théorème central limite

Qui est le "trafic gaussien" ?

Un théorème central limite

$t_1, \ldots, t_n$ trafics libres, auto-adjoints

$$m_n = \frac{t_1 + \cdots + t_n}{\sqrt{n}}$$

On suppose $\phi^{(\tau)}(t_1) = 0$ et $\phi^{(\tau)}(t_1^2) = 1$

Un théorème central limite

$t_1, \ldots, t_n$ trafics libres, auto-adjoints

$$m_n = \frac{t_1 + \cdots + t_n}{\sqrt{n}}$$

On suppose $\phi^{(\tau)}(t_1) = 0$ et $\phi^{(\tau)}(t_1^2) = 1 = p + (1-p)$

théorème central limite sur $\mathcal{G}_{cyc}\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \rangle$

$$m_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{p}\, d + \sqrt{1-p}\, s \qquad \text{on } \mathcal{G}_{cyc}\langle \mathbf{x}, \mathbf{x}^* \rangle$$

where

- d trafic gaussien diagonal standard
- s trafic semicirculaire standard
- d et s sont libres

Le produit libre des graphes aléatoires