

Valeurs
extrêmes pour
une mosaïque
de
Poisson-Voronoi

Nicolas
Chenavier

Notions de
géométrie
aléatoire

Résultats sur les
valeurs extrêmes
d'une mosaïque
de
Poisson-Voronoi

Valeurs extrêmes pour une mosaïque de Poisson-Voronoi

Nicolas Chenavier

Université de Rouen

16/04/12

Valeurs extrêmes pour une mosaïque de Poisson-Voronoi

Valeurs
extrêmes pour
une mosaïque
de
Poisson-Voronoi

Nicolas
Chenavier

Notions de
géométrie
aléatoire

Résultats sur les
valeurs extrêmes
d'une mosaïque
de
Poisson-Voronoi

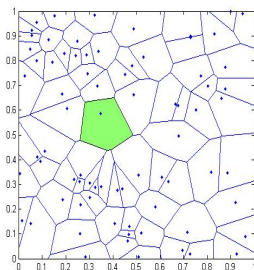


FIGURE: Maximum des aires pour une mosaïque de Poisson-Voronoi dans \mathbb{R}^2

Sommaire

Valeurs
extrêmes pour
une mosaïque
de
Poisson-Voronoi

Nicolas
Chenavier

Notions de
géométrie
aléatoire

Résultats sur les
valeurs extrêmes
d'une mosaïque
de
Poisson-Voronoi

- 1 Notions de géométrie aléatoire
- 2 Résultats sur les valeurs extrêmes d'une mosaïque de Poisson-Voronoi

Processus ponctuel de Poisson

Valeurs
extrêmes pour
une mosaïque
de
Poisson-Voronoi

Nicolas
Chenavier

Notions de
géométrie
aléatoire

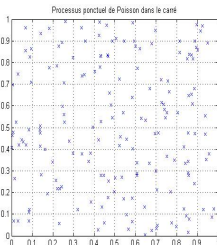
Résultats sur les
valeurs extrêmes
d'une mosaïque
de
Poisson-Voronoi

Définition

Un Processus ponctuel de Poisson (homogène) X d'intensité γ est un fermé localement fini de \mathbb{R}^d tel que :

- 1 $\forall A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, $\#(X \cap A) \sim \mathcal{P}(\gamma \lambda_d(A))$,
- 2 $\forall A_1, \dots, A_n$ disjoints $\#(X \cap A_1), \dots, \#(X \cap A_n)$ sont indépendants.

λ_d désigne la mesure de Lebesgue de \mathbb{R}^d .



Autre caractérisation d'un processus ponctuel de Poisson

Valeurs
extrêmes pour
une mosaïque
de
Poisson-Voronoi

Nicolas
Chenavier

Notions de
géométrie
aléatoire

Résultats sur les
valeurs extrêmes
d'une mosaïque
de
Poisson-Voronoi

Pour réaliser un processus ponctuel de Poisson, on peut :

- 1 Partitionner \mathbb{R}^d en des boréliens bornés $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$.
- 2 Tirer pour tout n un nombre $N_n \sim \mathcal{P}(\gamma \lambda_d(A_n))$.
- 3 Tirer N_n points dans A_n indépendamment et uniformément.

Mosaïque de Poisson-Voronoi

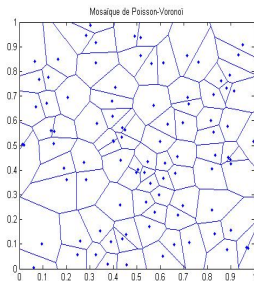
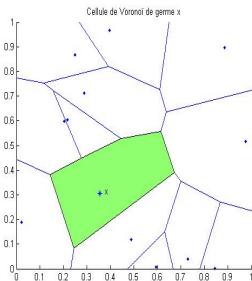
Valeurs
extrêmes pour
une mosaïque
de
Poisson-Voronoi

Nicolas
Chenavier

Notions de
géométrie
aléatoire

Résultats sur les
valeurs extrêmes
d'une mosaïque
de
Poisson-Voronoi

- X , processus ponctuel de Poisson.
- $\forall x \in X, C_X(x) = \{y \in \mathbb{R}^d, \|y - x\| \leq \|y - x'\|, x' \in X\}$
(cellule de Voronoï de germe x)
- $\mathfrak{m}_X = \{C_X(x), x \in X\}$, mosaïque de Poisson-Voronoi .



Utilisations de la mosaïque de Poisson-Voronoi

Valeurs
extrêmes pour
une mosaïque
de
Poisson-Voronoi

Nicolas
Chenavier

Notions de
géométrie
aléatoire

Résultats sur les
valeurs extrêmes
d'une mosaïque
de
Poisson-Voronoi

- Astrophysique
- Télécommunication
- Géographie
- Imagerie
- Biologie
- Médecine



Mélange fort pour une mosaïque de Poisson-Voronoi

Valeurs
extrêmes pour
une mosaïque
de
Poisson-Voronoi

Nicolas
Chenavier

Notions de
géométrie
aléatoire

Résultats sur les
valeurs extrêmes
d'une mosaïque
de
Poisson-Voronoi

Proposition

Soit X un processus ponctuel de Poisson. Alors :

- 1 Stationnarité : $\forall u \in \mathbb{R}^d, \mathbb{P}(\mathbf{m}_X + u \in \tilde{A}) = \mathbb{P}(\mathbf{m}_X \in \tilde{A})$.
- 2 Propriété de mélange : $\forall k, l \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \lim_{\|u\| \rightarrow \infty} \mathbb{P}(\#(X + u \cap A) = k, \#(X \cap B) = l) \\ = \mathbb{P}(\#(X \cap A) = k) \mathbb{P}(\#(X \cap B) = l) \end{aligned}$$

Cellule typique d'une mosaïque de Poisson-Voronoi

On souhaite définir une notion de "cellule prise au hasard".

Théorème-définition

Soit X un processus ponctuel de Poisson et W un corps convexe contenant 0 dans son intérieur. Notons $N_r = \#\{C_X(x), x \in X \cap rW\}$. On appelle *cellule typique* le polytope aléatoire \mathfrak{C} tel que pour toute fonction h mesurable bornée sur l'ensemble des corps convexes, on a

$$\mathbb{E}[h(\mathfrak{C})] = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{1}{N_r} \sum_{x \in X \cap rW} h(C_X(x) - x)$$

On peut montrer que

$$\mathfrak{C} \stackrel{\text{loi}}{=} C_{X \cup \{0\}}(0)$$

Valeurs
extrêmes pour
une mosaïque
de
Poisson-Voronoi

Nicolas
Chenavier

Notions de
géométrie
aléatoire

Résultats sur les
valeurs extrêmes
d'une mosaïque
de
Poisson-Voronoi

Remarque

Valeurs
extrêmes pour
une mosaïque
de
Poisson-Voronoi

Nicolas
Chenavier

Notions de
géométrie
aléatoire

Résultats sur les
valeurs extrêmes
d'une mosaïque
de
Poisson-Voronoi

- Important travail sur le comportement moyen des cellules. Par exemple :
 - $\mathbb{E}[\lambda_d(\mathcal{C})] = \frac{1}{\gamma}$, $\mathbb{E}[\mathfrak{N}] = 6$ (où \mathfrak{N} est le nombre moyen d'arêtes de la cellule typique en dimension 2) ; Miles 1969
 - Moments d'ordre 2 du volume ; Moller 1994
 - Théorèmes limites sur la queue du volume de la cellule typique ; Hug-Schneider 2004
- Peu (ou pas) d'étude sur le comportement atypique ou pathologique de certaines cellules (valeurs extrêmes).

Présentation du problème

Valeurs
extrêmes pour
une mosaïque
de
Poisson-Voronoi

Nicolas
Chenavier

Notions de
géométrie
aléatoire

Résultats sur les
valeurs extrêmes
d'une mosaïque
de
Poisson-Voronoi

Notre problème :

- On fixe un corps convexe W et on tire une mosaïque de Poisson-Voronoi d'intensité γ vouée à tendre vers l'infini.
- On souhaite étudier le comportement limite (lorsque γ tend vers l'infini) de divers extrêmes de la forme

$$M_h(\gamma) = \max\{h(C_X(x)), x \in X \cap W\}$$

où h est une fonction sur l'ensemble des polytopes (par exemple, le volume, le diamètre, le nombre de sommets, ...) ie trouver des paramètres $a_h(\gamma), b_h(\gamma)$ tel que $\mathbb{P}(M_h(\gamma) \leq a_h(\gamma)t + b_h(\gamma))$ converge pour tout t vers une limite non dégénérée.

Applications

Valeurs
extrêmes pour
une mosaïque
de
Poisson-Voronoi

Nicolas
Chenavier

Notions de
géométrie
aléatoire

Résultats sur les
valeurs extrêmes
d'une mosaïque
de
Poisson-Voronoi

- Etude de la régularité de la mosaïque (cellules allongées, forme des cellules, ...).
- Discrimination de processus ponctuels et de mosaïques.
- Application sur la distance de Hausdorff de l'approximation de Poisson-Voronoi.

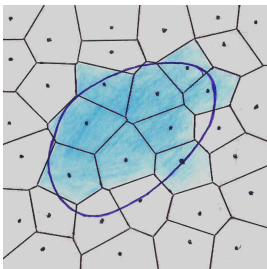


FIGURE: Approximation d'un corps convexe par une mosaïque de Poisson-Voronoi

Remarque : valeurs extrêmes pour des suites iid

Valeurs
extrêmes pour
une mosaïque
de
Poisson-Voronoi

Nicolas
Chenavier

Notions de
géométrie
aléatoire

Résultats sur les
valeurs extrêmes
d'une mosaïque
de
Poisson-Voronoi

- Des résultats sur les valeurs extrêmes de suites iid réelles existent déjà :

Théorème (Gnedenko)

Soit X_1, X_2, \dots une suite de variables iid. S'il existe deux suites $a_n > 0$ et $b_n \in \mathbb{R}$ telles que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\mathbb{P}(\max\{X_1, \dots, X_n\} \leq a_n t + b_n)$ converge vers une limite non dégénérée notée F , alors F est de l'un des trois types suivants :

- $F(t) = e^{-t^\alpha} \mathbf{1}_{t \geq 0}$ (Fréchet)
 - $F(t) = e^{-e^{-t}}$ (Gumbel)
 - $F(t) = e^{(-t)^\alpha} \mathbf{1}_{t < 0} + \mathbf{1}_{t \geq 0}$ (Weibull)
- Dans notre problème : les cellules éloignées tendent à être indépendantes et une cellule prise au hasard tend à être typique.

Premier angle d'attaque : boules inscrites et circonscrites

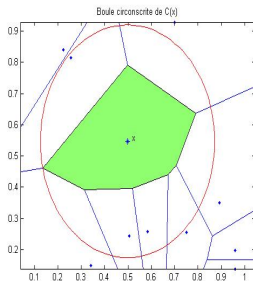
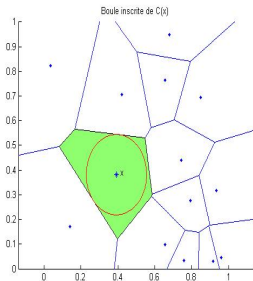
Valeurs
extrêmes pour
une mosaïque
de
Poisson-Voronoi

Nicolas
Chenavier

Notions de
géométrie
aléatoire

Résultats sur les
valeurs extrêmes
d'une mosaïque
de
Poisson-Voronoi

- $V_{ins}(x)$ = volume de la boule inscrite de $C_X(x)$.
- $V_{circons}(x)$ = volume de la boule circonscrite de $C_X(x)$.



Résultats

Valeurs
extrêmes pour
une mosaïque
de
Poisson-Voronoi

Nicolas
Chenavier

Notions de
géométrie
aléatoire

Résultats sur les
valeurs extrêmes
d'une mosaïque
de
Poisson-Voronoi

On note :

- $V_i(\gamma) = \max_{x \in X \cap W} (V_{ins}(x))$
- $v_i(\gamma) = \min_{x \in X \cap W} (V_{ins}(x))$
- $V_c(\gamma) = \max_{x \in X \cap W} (V_{circons}(x))$
- $v_c(\gamma) = \min_{x \in X \cap W} (V_{circons}(x))$

Théorème

Soit W le cube unité de \mathbb{R}^d . Alors

- 1 $\mathbb{P} \left(2^d \gamma V_i(\gamma) - \log(\gamma) \leq t \right) \xrightarrow{\gamma \rightarrow \infty} e^{-e^{-t}}, t \in \mathbb{R}.$
- 2 $\mathbb{P} \left(2^{d-1} \gamma^2 v_i(\gamma) \geq t \right) \xrightarrow{\gamma \rightarrow \infty} e^{-t}, t \geq 0.$
- 3 $\mathbb{P} \left(\gamma V_c(\gamma) - \log \left(\alpha \gamma (\log \gamma)^{d-1} \right) \leq t \right) \xrightarrow{\gamma \rightarrow \infty} e^{-e^{-t}}, t \in \mathbb{R}.$

Résultat 2, esquisse de preuve

Valeurs
extrêmes pour
une mosaïque
de
Poisson-Voronoi

Nicolas
Chenavier

Notions de
géométrie
aléatoire

Résultats sur les
valeurs extrêmes
d'une mosaïque
de
Poisson-Voronoi

- Le problème se ramène à l'étude de $\min_{x \in X \cap W} \min_{y \neq x \in X} d(x, y)$.
- En traitant les effets de bord, et en tenant compte du fait que $N = \sharp(X \cap W) \simeq \gamma$, cela revient à étudier le minimum des distances inter-points d'un processus binomial x_1, \dots, x_n dans W .
- L'étude du minimum des distances inter-points a déjà été faite (voir par exemple Jammalamadaka et Janson, 1986) en utilisant les U-statistiques.

Fin de la preuve du résultat 2

Valeurs
extrêmes pour
une mosaïque
de
Poisson-Voronoi

Nicolas
Chenavier

Notions de
géométrie
aléatoire

Résultats sur les
valeurs extrêmes
d'une mosaïque
de
Poisson-Voronoi

Argument heuristique pour le comportement limite de la distance inter-germes :

On cherche $u_n(t) = a_n t + b_n$ tel que $\mathbb{P}(\min_{i,j} d(x_i, x_j) \geq u_n(t))$ converge. Pour cela, on remarque que

$$\mathbb{P}(\min_{i,j} d(x_i, x_j) \geq u_n(t)) = \mathbb{P}(N_n(t) = 0)$$

avec $N_n(t) = \sum_{i < j} \mathbf{1}_{d(x_i, x_j) \leq u_n(t)} \simeq \mathcal{B}(\frac{n^2}{2}, \kappa_d u_n(t)^d) \simeq \mathcal{P}(\frac{n^2}{2} \kappa_d u_n(t)^d)$. En choisissant $u_n(t) = n^{-2/d} t$, on montre que

$$\mathbb{P}(\min_{i,j} d(x_i, x_j) \geq u_n(t)) \simeq e^{-\frac{n^2}{2} \kappa_d u_n(t)^d} = e^{-\frac{1}{2} \kappa_d t^d}$$

Esquisse de preuves des deux autres résultats

Valeurs
extrêmes pour
une mosaïque
de
Poisson-Voronoi

Nicolas
Chenavier

Notions de
géométrie
aléatoire

Résultats sur les
valeurs extrêmes
d'une mosaïque
de
Poisson-Voronoi

Les preuves des deux autres résultats n'utilisent pas, non plus, le mélange de la mosaïque et la notion de cellule typique. Elles reposent également sur des interprétations géométriques :

- Pour $V_i(\gamma)$, on utilise notamment un résultat de M. Penrose (2003) sur les graphes aléatoires géométriques.
- Pour $V_c(\gamma)$, on utilise un résultat de S. Janson (1986) sur un problème de recouvrement de W par des boules.

Conjecture pour le minimum circonscrit

Valeurs
extrêmes pour
une mosaïque
de
Poisson-Voronoi

Nicolas
Chenavier

Notions de
géométrie
aléatoire

Résultats sur les
valeurs extrêmes
d'une mosaïque
de
Poisson-Voronoi

Conjecture

Pour tout $t \geq 0$, $\mathbb{P}(\alpha \gamma^{\frac{d+2}{d+1}} v_c(\gamma) \geq t) \xrightarrow{\gamma \rightarrow \infty} e^{-t^{d+1}}$.

Motivation de la conjecture :

- Les cellules éloignées $C_X(x)$ tendent à être indépendantes et typiques. Elles sont au nombre (poissonien) de $N(\gamma) \simeq n$ avec $n = \lfloor \gamma \rfloor$. Donc $\{V_{ins}(x), x \in X \cap W\} \simeq \{\tilde{V}_{ins}(i), i \leq n\}$ où les $\tilde{V}_{ins}(i)$ sont des réalisations indépendantes de volumes de boules circonscrites typiques (divisés par n).
- $\mathbb{P}(\alpha \gamma^{\frac{d+2}{d+1}} v_c(\gamma) \geq t) \simeq \mathbb{P}(\alpha n^{\frac{d+2}{d+1}} \tilde{v}_c(n) \geq t) \simeq e^{-t^{d+1}}$ avec $\tilde{v}_c(n) = \min\{\tilde{V}_{ins}(i), i = 1, \dots, n\}$ (calcul du rayon circonscrit de la cellule typique $C_{X \cup \{0\}}(0)$).

Remarques

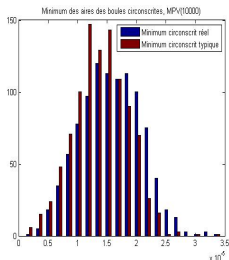
Valeurs
extrêmes pour
une mosaïque
de
Poisson-Voronoi

Nicolas
Chenavier

Notions de
géométrie
aléatoire

Résultats sur les
valeurs extrêmes
d'une mosaïque
de
Poisson-Voronoi

- 1 Analogie entre "grandeurs réelles" et "grandeurs typiques" pour $V_i(\gamma)$, $v_i(\gamma)$ et $V_c(\gamma)$.
- 2 Simulations, en dimension 2, pour observer le lien entre $v_c(\gamma)$ et $\tilde{v}_c(n)$.
 - 1000 réalisations du minimum réel des aires des boules circonscrites pour une mosaïque d'intensité 10000 dans le carré.
 - 1000 réalisations du minimum pris sur 10000 réalisations indépendantes du rayon circonscrit typique.



Conclusion et perspectives

Valeurs
extrêmes pour
une mosaïque
de
Poisson-Voronoi

Nicolas
Chenavier

Notions de
géométrie
aléatoire

Résultats sur les
valeurs extrêmes
d'une mosaïque
de
Poisson-Voronoi

- ➊ Résultats sur $V_i(\gamma)$, $v_i(\gamma)$ et $V_c(\gamma)$ mais pas sur $v_c(\gamma)$.
Etudier le comportement limite du minimum circonscrit en utilisant une interprétation géométrique.
- ➋ Etudier le passage entre "grandeurs réelles" et "grandeurs typiques" en utilisant des théorèmes sur les valeurs extrêmes. Etudier des couples de valeurs extrêmes (par exemple, $(V_c(\gamma), V_i(\gamma))$).
- ➌ Etudier la mosaïque de Voronoï pour d'autres processus ponctuels pour discriminer des modèles. Etudier d'autres mosaïques.

Références

Valeurs
extrêmes pour
une mosaïque
de
Poisson-Voronoi

Nicolas
Chenavier

Notions de
géométrie
aléatoire

Résultats sur les
valeurs extrêmes
d'une mosaïque
de
Poisson-Voronoi

- R. Schneider - W. Weil, "Stochastic and Integral Geometry", 2008, *Springer*
- L. de Haan - A. Ferreira, "Extreme Value Theory", 2000, *Springer*
- Jammalamadaka-Janson, "Limit Theorems for a Triangular of U-statistics with Applications to Inter-Point Distances", 1986, *The Annals of Probability*
- S. Janson, "Random coverings in several dimensions", 1986, *Acta Mathematica*
- M. Penrose, "Random Geometric Graphs", 2004, *Oxford studies in probability*