

Leçon 1 : Qu'est que la turbulence ?

- ★ le nombre de Reynolds
- ★ exemples d'injections d'énergie
- ★ expériences
- ★ caractérisation de la turbulence
- ★ vision naïve du nombre de Reynolds
(→ couche limite)

- la turbulence apparaît quand la source d'énergie qui excite les mouvements dans le fluide est suffisamment intense comparée à la résistance visqueuse du fluide
- paramètre de contrôle sans dimension: le nombre de Reynolds

$$Re = \frac{UL}{\nu}$$

U, L vitesse et échelle caractéristiques de l'écoulement ; ν viscosité cinématique

- Re_c apparition de la 1^{ère} instabilité de l'état stationnaire
- $Re \gg Re_c$ "turbulence pleinement développée"
avec certaines "symétries statistiques"
→ écoulement ne doit pas être sujet à des contraintes.

> valeurs de ν pour quelques fluides =
 ν (cm^2/s)

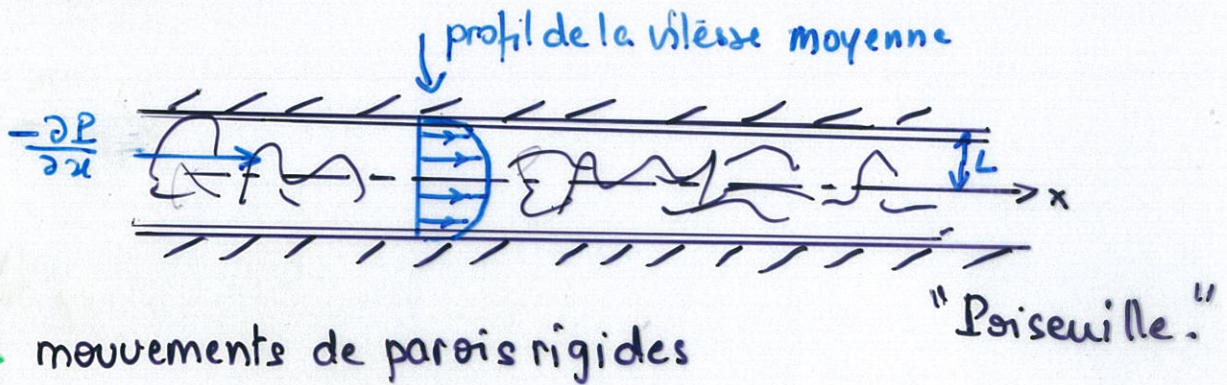
mercure	0.0012
eau	0.011
alcool	0.022
air	0.15
huile d'olive	1.08
glycérine	18.5

> exemples :

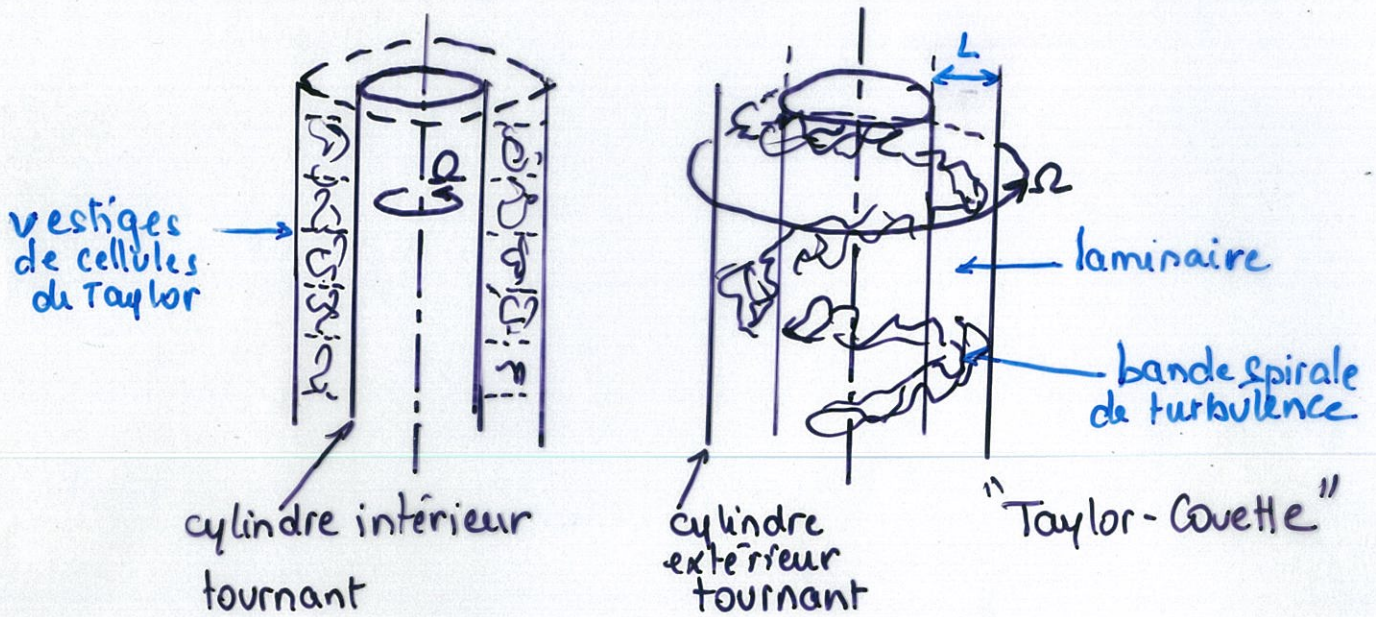
atmosphère : $\nu = 0.15 \text{ cm}^2/\text{s}$; $u = 10 \text{ m/s}$; $L \sim 15 \text{ m}$
 $\rightarrow Re \sim 10^7$

conduite d'eau : $\nu \sim 0.01 \text{ cm}^2/\text{s}$; $u = 0.1 \text{ m/s}$
 $D \sim 5 \text{ cm}$
 $\rightarrow Re \sim 5000.$

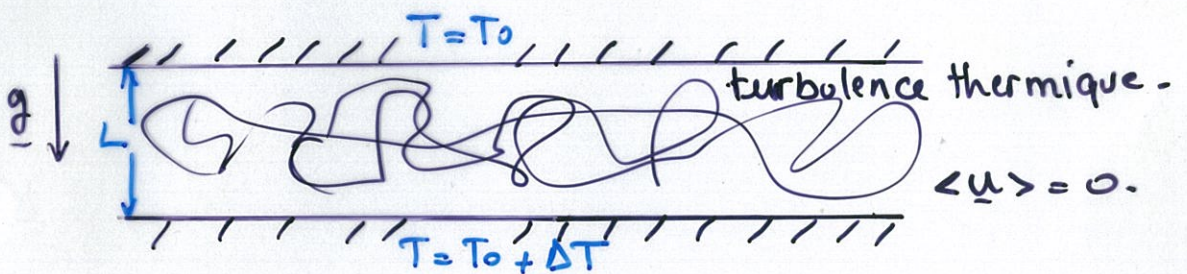
> gradients de pression



> mouvements de parois rigides



> gradients de température

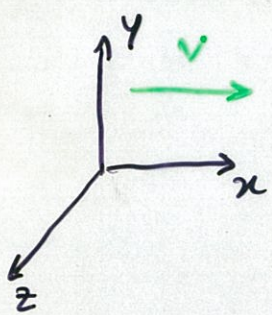


$$Re \leftrightarrow Ra = \text{nombre de Rayleigh} = \frac{\alpha g \Delta T L^3}{\nu \kappa}$$

(α coefficient d'expansion thermique
 κ diffusivité thermique)

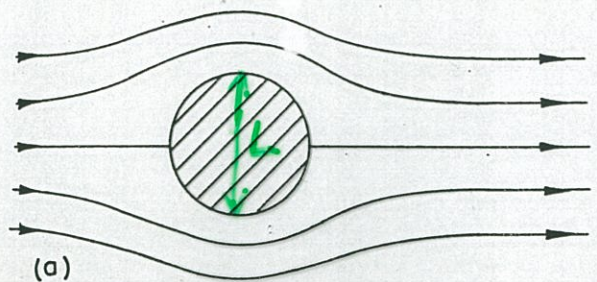
"Rayleigh-Bénard"

symétrie



$Re \sim 10^{-2}$

symétries
droite-gauche
haut-bas
translation
d'espace en z

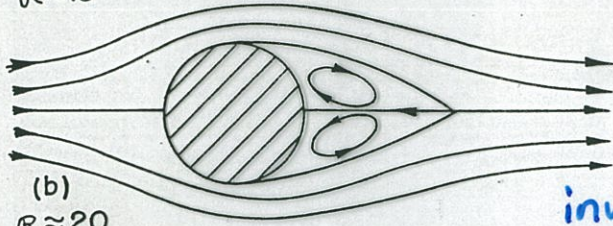


(a)
 $R \approx 10^{-2}$

$Re \sim 20$

brisure de symétrie
droite-gauche

périodique
en temps

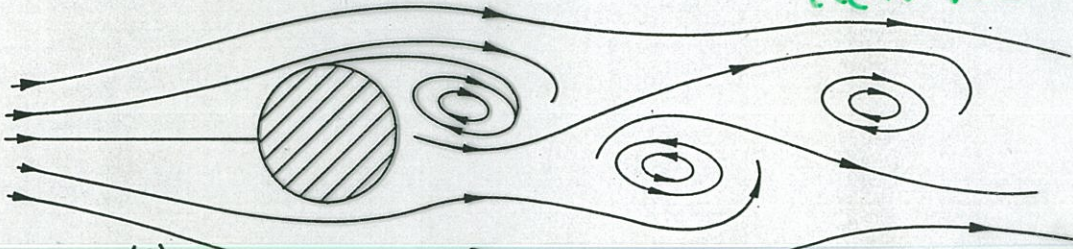


(b)
 $R \approx 20$

invariance en z brisée
 $Re \sim 100$

allée
de
von Kármán

haut-bas
brisée



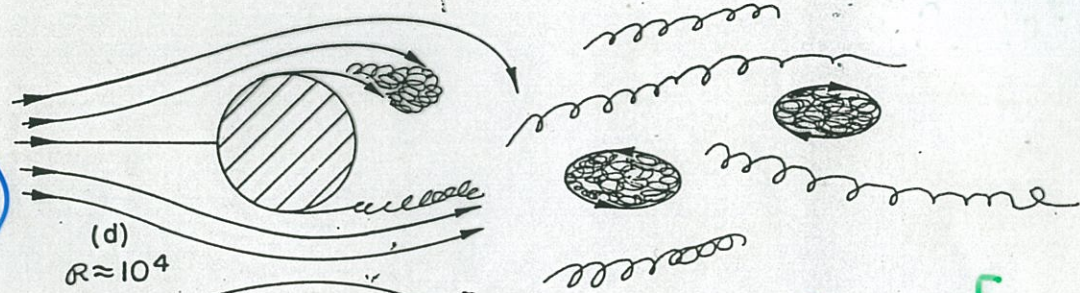
(c)
 $R \approx 100$

brisure de symétrie en z

$Re \sim 10^4$

chaotique
en temps

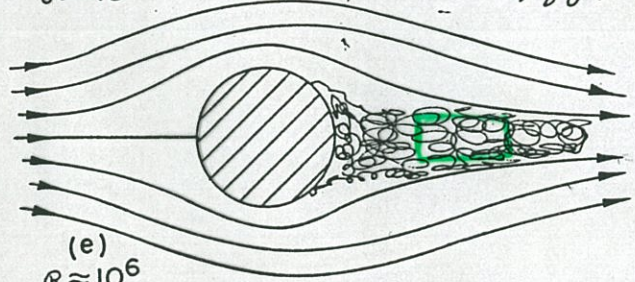
("turbulence
lagrangienne")



(d)
 $R \approx 10^4$

$Re \sim 10^5$

écoulement
turbulent
homogène-isotrope



(e)
 $R \approx 10^6$

Fig. 41-6. Flow past a cylinder for various Reynolds numbers.

a circulation there even at the smallest Reynolds number or whether things suddenly change at a certain Reynolds number. It used to be thought that the circulation grew continuously. But it is now thought that it appears suddenly, and it is certain that the circulation increases with R . In any case, there is a different character to the flow for R in the region from about 10 to 30. There is a pair of vortices behind the cylinder.

The flow changes again by the time we get to a number of 40 or so. There is suddenly a complete change in the character of the motion. What happens is that one of the vortices behind the cylinder gets so long that it breaks off and travels downstream with the fluid. Then the fluid curls around behind the cylinder and

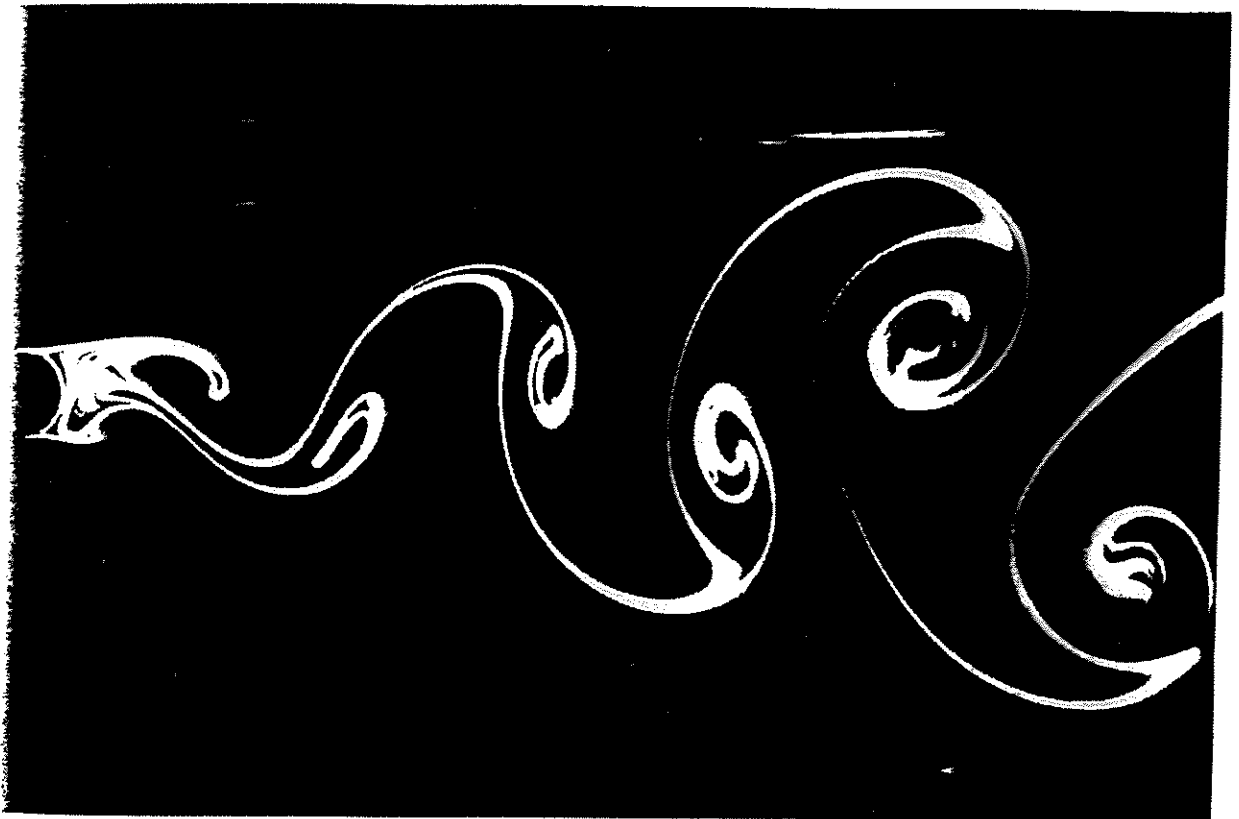


Figure 5.4 - Allée de von Kármán en aval d'un cylindre circulaire, $Re = 140$, (d'après Taneda, 1982).

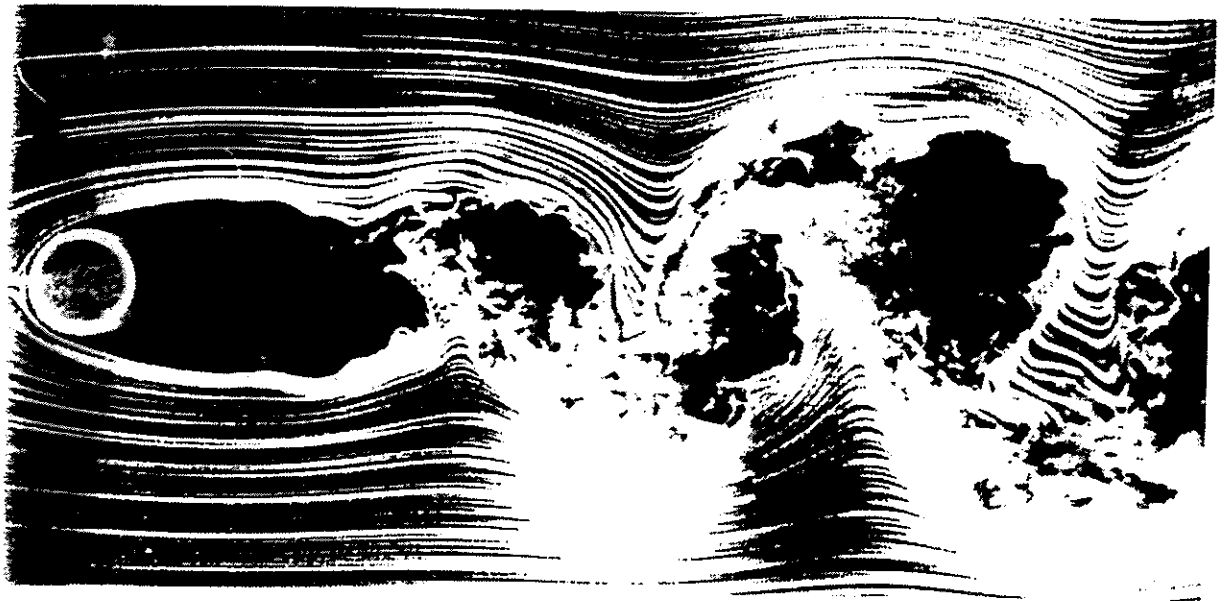


Figure 5.5 - Allée de von Karman en avai d'un cylindre circulaire, $Re = 10\ 000$, (d'apres Corke et Nagib, 1982).



Re = 240

Fig. 1.9. Wake behind two identical cylinders at $R = 240$. Courtesy R. Dumas.



Re = 1800.

Fig. 1.10. Wake behind two identical cylinders at $R = 1800$. Courtesy R. Dumas.

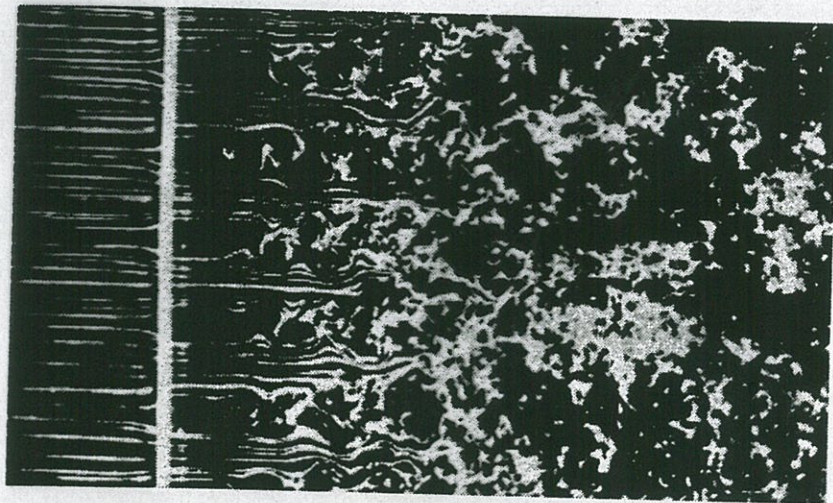
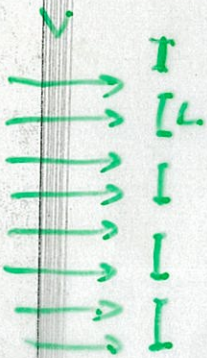
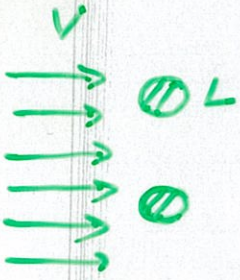
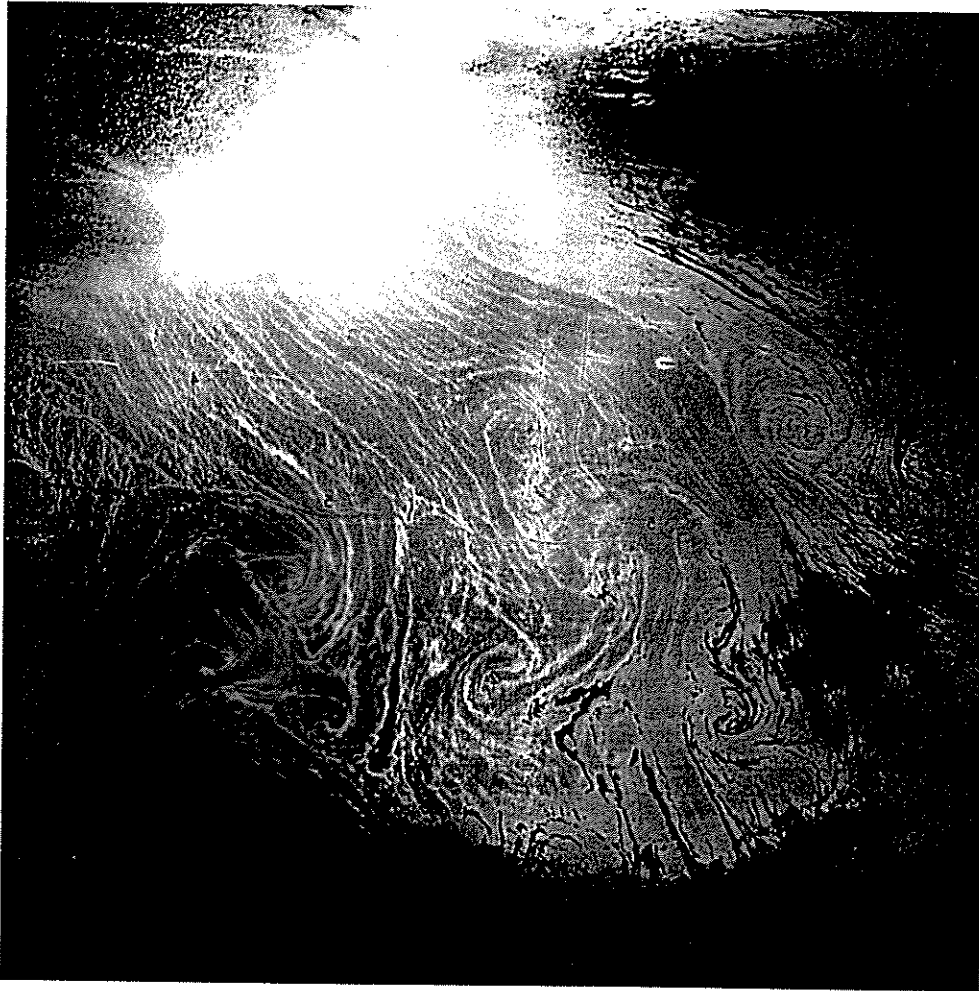


Fig. 1.11. Homogeneous turbulence behind a grid. Photograph T. Corke and H. Nagib.



(U. Frisch, "Turbulence: The legacy of Kolmogorov", Cambridge University Press, 1995)

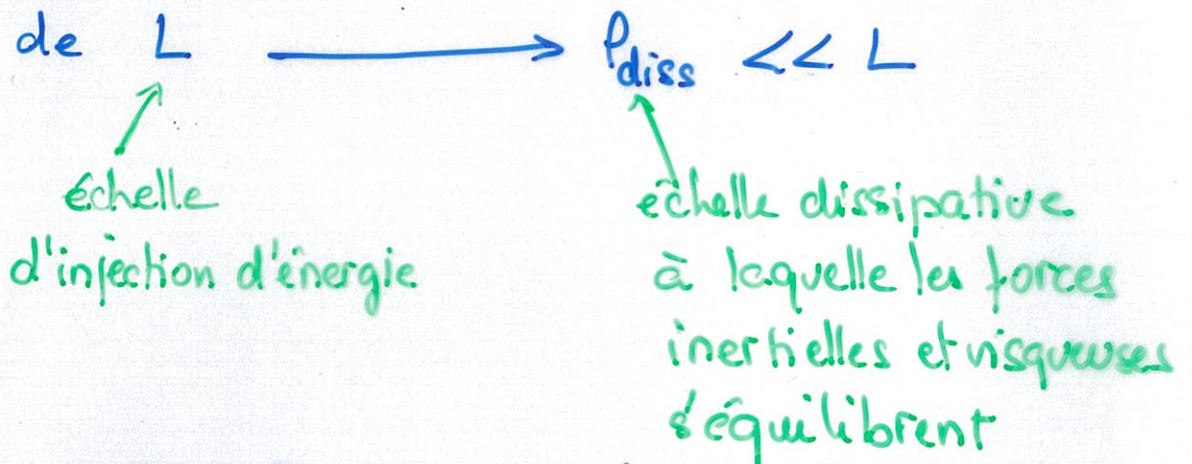


In October 1984, the Challenger took this photograph over the central Mediterranean Sea; it covers an area 210 km on a side. The brightness of the sunlight is related to the texture of the ocean surface. In the central portion of the photograph strongly illuminated by the sun, smooth surfaces reflect light as a mirror and appear bright, while regions roughened by short surface waves scatter the sunlight and appear darker. In several places, bright bands wrap up into spiral eddies.

(Courtesy: NASA)

la turbulence peut-être caractérisée par :

- hiérarchie de structures (tourbillons) dans l'écoulement



- mouvements très désorganisés conduisant à un mélange très important du fluide
- caractéristique d'instabilité : pour des conditions initiales données, un faible bruit peut-être amplifié à un niveau significatif, indépendant de sa valeur initiale.

S vision naïve du Reynolds =

considérons une voiture de largeur 2m
lancée à une vitesse $v = 30 \text{ m/s}$

$$\rightarrow Re = \frac{2 \times 30}{0.15 \cdot 10^{-4}} = 4 \cdot 10^6$$

\Rightarrow l'effet de la résistance de l'air est négligeable.

or : le coefficient de traînée, mesurant
l'effet des forces de friction ; C_d

$$C_d = \frac{D}{\frac{1}{2} \rho v^2 A} \sim 0.3$$

(D = forces de friction ; ρ densité de l'air ; A = la
section du véhicule dans le sens de la marche.)

- l'effet visqueux est négligeable dans la plus grande partie de l'écoulement ; mais il existe une mince couche (couche limite) près des parois du véhicule où v ne peut-être négligé

(cf. cours A.2.2017)

Leçon 2 : Concepts de base

★ **les équations du mouvement**

★ **la pression**

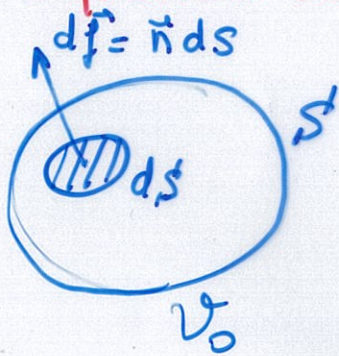
★ **symétries des équations Navier-Stokes**

★ **lois de conservation**

★ **écoulements d'Euler**

Equations de la dynamique

* Équation de conservation de la masse :



densité du fluide : ρ

quantité totale de fluide
(masse) dans V_0 :

$$\int_{V_0} \rho \, dV$$

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int_{V_0} \rho \, dV = \int_S \rho \cdot \underline{v} \cdot d\underline{f} = \int_{V_0} \nabla \cdot (\rho \underline{v}) \, dV$$

diminution de
la quantité de fluide
dans V_0

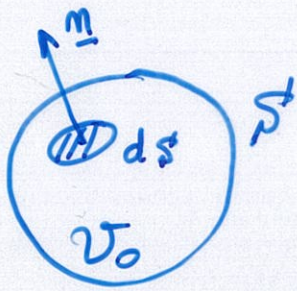
quantité totale
de fluide sortant
de V_0

$$\text{vrai } \forall V_0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \rho + \nabla \cdot (\rho \underline{v}) = 0$$

Rappel : Formule de la divergence (ou d'Ostrogradsky)

$$\iiint_{V_0} \nabla \cdot \vec{A} \, dV = \iint_S \vec{A} \cdot \vec{n} \, d\sigma$$

* équation de conservation de la quantité de mouvement : (Newton $\vec{F} = m\vec{\gamma}$)



$$\int_{V_0} \frac{d\underline{v}}{dt} \rho dz = \int_{V_0} \underline{F}^v \rho dz + \int_{S'} \underline{F}^s \cdot \underline{m} ds$$

forces volumiques et
surfaiques (par unité)

variation de la vitesse
d'une particule donnée
se déplaçant dans l'espace.

$$d\underline{v} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} dt + \frac{\partial \underline{v}}{\partial \underline{r}} d\underline{r}$$

$$(d\underline{r} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k})$$

$$\lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\underline{v}(\underline{r}, t + \delta t) - \underline{v}(\underline{r}, t)}{\delta t} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t}(\underline{r}, t)$$

$$\lim_{\delta \underline{r} \rightarrow 0} \frac{\underline{v}(\underline{r} + \delta \underline{r}, t) - \underline{v}(\underline{r}, t)}{\delta \underline{r}} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial \underline{r}}(\underline{r}, t)$$

$$\Rightarrow d\underline{v} = \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} dt + (d\underline{r} \cdot \nabla) \underline{v}$$

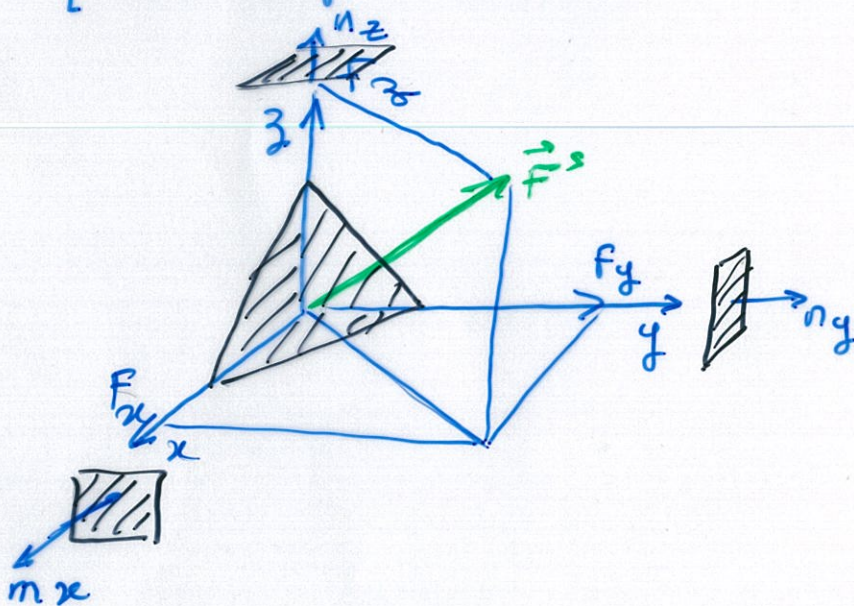
$$\frac{d\underline{v}}{dt} = \frac{D\underline{v}}{Dt} \equiv \frac{\partial \underline{v}}{\partial t} + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v}$$

dérivée lagrangienne \longrightarrow problème non-linéaire

Forces :

> forces volumiques : \underline{F}^v
 gravité (\underline{g}); force de Coriolis ($\underline{\Omega} \times \underline{v}$);
 force de Laplace ou Lorentz ($\nabla \times \vec{B} \times \vec{B}$, où
 \vec{B} = champ magnétique), ...

> forces de surface sur $d\vec{s} \approx F_i^s = \sigma_{ij} n_j d\vec{s}$
 $[\sigma_{ij}] \equiv$ tenseur des contraintes
 $\sigma_{ij} =$ $i^{\text{ème}}$ composante de force par unité d'aire
 exercée sur un élément de surface plane
 \perp à la $j^{\text{ème}}$ direction.



force de surface totale : $\int_S \sigma_{ij} n_j d\vec{s} = \int_{z_0}^{z_1} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dz$

On obtient donc l'équation :

$$\int_{z_0}^{z_1} \rho \frac{D\sigma_i}{Dt} dz = \int_{z_0}^{z_1} F_i^v \rho dz + \int_{z_0}^{z_1} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} dz$$

$$\text{vrai } \forall \mathcal{V}_0 \rightarrow \rho \frac{Dv_i}{Dt} = F_i^v \rho + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (1)$$

* forme de σ_{ij} :

$$\sigma_{ij} = \underbrace{-p \delta_{ij}}_{\text{partie isotrope}} + \underbrace{d_{ij}}_{\text{partie non isotrope}}$$

~ fluide au repos : proces de tension sont \perp surface et indépendantes de la direction de \underline{n}

avec p = pression prise sur la surface de \mathcal{V}_0 .

contributions tangentielles des tensions de surface ; processus internes du fluide si des régions \neq du fluide se meuvent à des vitesses \neq
($\rightarrow \partial_j v_i$)

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + 2\mu \left[\frac{1}{2} (\partial_j v_i + \partial_i v_j) - \frac{1}{3} \nabla \cdot \underline{v} \delta_{ij} \right]$$

pression

viscosité dynamique

fluide "Newtonien"

$$(\partial_j v_i \equiv \frac{\partial v_i}{\partial x_j})$$

En remplaçant dans (1) ; on obtient :

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = F_i^v \rho - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[2\mu \left[\frac{1}{2} (\partial_j v_i + \partial_i v_j) - \frac{1}{3} \nabla \cdot \underline{v} \delta_{ij} \right] \right]$$

(fluide "Newtonien")

si μ indépendante de \underline{x}

$$\rho \frac{Dv_i}{Dt} = F_i^v \rho - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \mu \left[\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j \partial x_j} + \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial x_i} \nabla \cdot \underline{v} \right]$$

Cas incompressible: $\rho(\underline{x}, t) = \text{cte}$
 $\hookrightarrow \nabla \cdot \underline{v} = 0$

$$\frac{D\underline{v}}{Dt} = \partial_t \underline{v} + (\underline{v} \cdot \nabla) \underline{v} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \underbrace{\frac{\mu}{\rho} \Delta \underline{v}}_{\nu} + \underline{F}_v$$

viscosité cinématique
[cm²/s]

* conditions aux limites (géométrie)
 + conditions initiales

* équation de conservation de l'énergie interne (liée à la thermodynamique) e

$$\frac{\partial e}{\partial t} + (\underline{v} \cdot \nabla) e = -(\gamma - 1) e \nabla \cdot \underline{v} + \frac{\mu}{\rho} (\underline{v} : \underline{D}) + \frac{\kappa}{\rho} \Delta T$$

* équation d'état: $p = R \rho T$ gaz parfaits
 $p = \rho^\gamma$ gaz barotropes

avec: T = température; κ = conductivité thermique
 γ = index adiabatique, R = cste des gaz parfaits

$$\text{et } \begin{cases} \tau_{ij} = -\frac{2}{3} (\nabla \cdot \underline{v}) \delta_{ij} + 2D_{ij} \\ D_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_j v_i + \partial_i v_j) \end{cases}$$

$e = c_v T$
 \uparrow
 chaleur spécifique
 à volume constant

— Equations de Navier-Stokes —

Cas incompressible : $\rho \approx \text{cte} \quad \forall \underline{x}, t$

Équation de continuité :

$$\partial_t \rho + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0$$

$$\partial_t \rho + \nabla \rho \cdot \underline{u} + \rho \nabla \cdot \underline{u} = 0 \longrightarrow \nabla \cdot \underline{u} = 0$$

Équation du mouvement :

$$\partial_t \underline{u} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \underline{u} + \underline{F}$$

s'écrit aussi :

$$\partial_t \underline{u} = \underline{u} \times \underline{\omega} - \nabla \left(\frac{p}{\rho} + \frac{\underline{u}^2}{2} \right) + \nu \Delta \underline{u} + \underline{F} \quad (2)$$

avec $\underline{\omega} = \nabla \times \underline{u}$ vorticité

$$(\underline{u} \times \underline{\omega} = -(\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{u})$$

+ conditions aux limites ; conditions initiales.

→ équation pour la vorticité : $(\nabla \times (2))$

$$\frac{D \underline{\omega}}{D t} = \partial_t \underline{\omega} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{\omega} = (\underline{\omega} \cdot \nabla) \underline{u} + \nu \Delta \underline{\omega} + \nabla \times \underline{F}$$

$$\partial_t \underline{\omega} = \nabla \times (\underline{u} \times \underline{\omega}) + \nu \Delta \underline{\omega} + \nabla \times \underline{F}$$

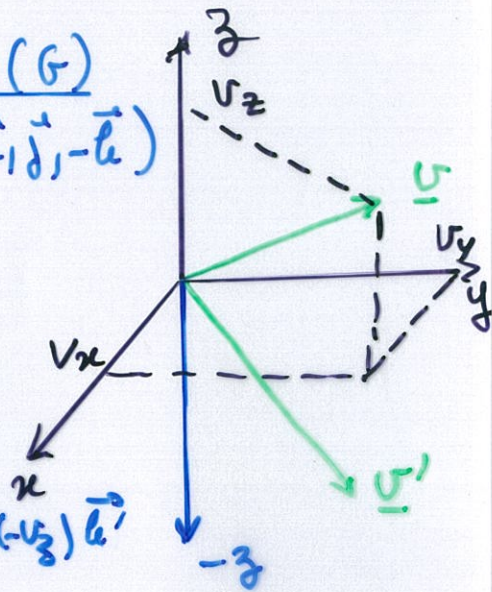
note : $\omega_i = \varepsilon_{ije} \frac{\partial u_e}{\partial x_j}$

$$\left(\begin{array}{l} \varepsilon_{ije} = 0 \quad \text{si 2 indices sur 3 sont identiques} \\ \varepsilon_{ije} = +1 \quad \text{si } i, j, e \text{ ordre cyclique} \\ \varepsilon_{ije} = -1 \quad \text{si } i, j, e \text{ a-cyclique} \end{array} \right)$$

ex. : $\varepsilon_{ije} = 1, \varepsilon_{jie} = -1$

Remarque \underline{u} est un pseudo-vecteur

triède droit (D)	triède gauche (G)
$(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$	$(\vec{i}', \vec{j}', \vec{k}') = (\vec{i}, \vec{j}, -\vec{k})$
(x, y, z)	$(x, y, -z)$



> \underline{u} est un vecteur

$$\underline{u}_D = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + u_z \vec{k}$$

$$\underline{u}_G = u_x' \vec{i}' + u_y' \vec{j}' + u_z' \vec{k}' = u_x \vec{i} + u_y \vec{j} + (-u_z) \vec{k}$$

symétrie vecteur: $(x, y, z) \rightarrow (x, y, -z)$

$$(u_x, u_y, u_z) \rightarrow (u_x, u_y, -u_z)$$

> $\underline{\omega}$ est un pseudo-vecteur

$$\underline{\omega}_D = \omega_x \vec{i} + \omega_y \vec{j} + \omega_z \vec{k} = (\partial_y v_z - \partial_z v_y) \vec{i} + (\partial_z v_x - \partial_x v_z) \vec{j} + (\partial_x v_y - \partial_y v_x) \vec{k}$$

$$\underline{\omega}_G = \omega_x' \vec{i}' + \omega_y' \vec{j}' + \omega_z' \vec{k}'$$

$$\begin{cases} \omega_x' = \partial_y' v_z' - \partial_z' v_y' = \partial_y (-v_z) - (-\partial_z) v_y = -\omega_x \\ \omega_y' = -\omega_y \\ \omega_z' = \partial_x' v_y' - \partial_y' v_x' = \partial_x v_y - \partial_y v_x = \omega_z \end{cases}$$

symétrie pseudo-vecteur: $(x, y, z) \rightarrow (x, y, -z)$

$$(\omega_x, \omega_y, \omega_z)$$

$$\hookrightarrow (-\omega_x, -\omega_y, \omega_z)$$

> l'hélicité $\underline{u} \cdot \underline{\omega}$ est un pseudo-scalaire

$$\underline{u} \cdot \underline{\omega}_G = -\underline{u} \cdot \underline{\omega}_D$$

> l'énergie $\underline{u}^2 = \sum_i u_i^2$ est un scalaire

$$\underline{u}_G^2 = \underline{u}_D^2$$

* Adimensionnalisation des équations :

avec :

$$\rho = \text{cste} = 1$$

$$\partial_t \underline{u} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} = -\nabla p + \nu \Delta \underline{u} + \underline{F} \quad (*)$$

Soit u_0 = vitesse moyenne caractéristique

l_0 = longueur caractéristique

$$\rightarrow t_0 = l_0 / u_0, \quad \rho_0 = u_0^2, \quad F_0 = u_0^2 / l_0$$

On exprime dans ces unités

$$\underline{u} = \underline{u}' u_0; \quad \underline{x} = \underline{x}' l_0; \quad t = t' t_0 = t' \frac{l_0}{u_0}$$

$$\rho = \rho' \rho_0 = \rho' u_0^2; \quad \underline{F} = F_0 \underline{F}' = F' u_0^2 / l_0$$

\rightarrow on obtient en remplaçant dans (*):

$$\frac{u_0^2}{l_0} \frac{\partial u'_i}{\partial t'} + \frac{u_0^2}{l_0} u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} = -\frac{u_0^2}{l_0} \frac{\partial p'}{\partial x'_i} + \nu \frac{u_0}{l_0^2} \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x'^2_j} + F'_i \frac{u_0^2}{l_0}$$

$$\frac{\partial u'_i}{\partial t'} + u'_j \frac{\partial u'_i}{\partial x'_j} = -\frac{\partial p'}{\partial x'_i} + \underbrace{\frac{\nu}{u_0 l_0}}_{\frac{1}{Re}} \frac{\partial^2 u'_i}{\partial x'^2_j} + F'_i$$

Re est le seul paramètre sans dimension (ν [m^2/s]) du problème, à part la géométrie (C.L.) et les conditions initiales (C.I.)

$$\rightarrow \partial_t \underline{u} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \underline{u} + \underline{F}$$

La pression incompressible : détermination

$$\partial_t \underline{u} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} = -\nabla p + \nu \Delta \underline{u} \quad (*)$$

$$\nabla \cdot (*) \rightarrow \nabla \cdot (\underline{u} \cdot \nabla \underline{u}) = -\nabla \cdot (\nabla p) = -\Delta p$$

on obtient pour la pression un équation de Poisson :

$$\Delta p = -\partial_i \partial_j (u_j u_i) \quad (\nabla \cdot \underline{u} = 0)$$

soluble car on peut montrer que

$$\int_{V_\infty} \partial_i \partial_j (u_j u_i) d\tau = 0 \quad (V_\infty \text{ volume étendu à tout l'espace}).$$

Remarques:

1) Élimination de la pression dans l'équation (*)

$$\partial_t \underline{u} + [\underline{u} \cdot \nabla \underline{u} - \nabla (\Delta^{-1} (\nabla \cdot \underline{u} \cdot \nabla \underline{u}))] = \nu \Delta \underline{u}$$

2) $\Delta p = -\partial_i (u_j \partial_j u_i) = -\partial_i u_j \partial_j u_i$

on on peut écrire $\nabla \underline{u} = D + \Omega$

$$\partial_j u_i = \underbrace{\frac{1}{2} (\partial_j u_i + \partial_i u_j)}_{D_{ij}} + \underbrace{\frac{1}{2} (\partial_j u_i - \partial_i u_j)}_{\Omega_{ij}}$$

$$D^2 = \frac{1}{4} (\partial_j u_i + \partial_i u_j)^2$$

$$\Omega^2 = \frac{1}{4} (\partial_j u_i - \partial_i u_j)^2$$

$$\rightarrow \partial_i u_j \partial_j u_i = D^2 - \Omega^2$$

on a donc : $\Delta p = - (D^2 - \Omega^2)$

si la quantité $f(\underline{x}) \equiv D^2(\underline{x}) - \Omega^2(\underline{x})$
est localisée ; i.e.

$$\int_{\pm\mathbb{R}} |f(\underline{x})| e^{-r/R} \rightarrow 0$$
$$r = |\underline{x}| \rightarrow \infty$$

on a la solution =

$$p(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{D^2(\underline{x}') - \Omega^2(\underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|} d^3 \underline{x}'$$

→ la pression minimale où Ω^2 est maximum, i.e. là où $|\underline{\omega}|^2$ est maximum.

3) pour des C.L. périodiques, on résoud en Fourier :

$$-k^2 \hat{p}(\underline{k}) = \hat{\sigma}(\underline{k})$$

avec $k^2 = |\underline{k}|^2 = (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2)$

$$\sigma(\underline{x}) = -\partial_i \partial_j (u_j u_i)(\underline{x}).$$

Symétries des équations de Navier-Stokes

invariance des équations en changeant

$$\underline{x} \rightarrow \underline{x}'; t \rightarrow t' \text{ et } \underline{u}(\underline{x}, t) \rightarrow \underline{u}'(\underline{x}', t')$$

on retrouve les eqs de N.S.; autrement dit si $\underline{u}(\underline{x}, t)$ est solution alors $\underline{u}'(\underline{x}', t')$ est aussi une solution.

• invariance de Galilée :

$$\begin{aligned} (\underline{x}, t) &\rightarrow (\underline{x}' = \underline{x} + \underline{u}_0 t, t' = t) & \underline{u}_0 = \text{cste} \\ \text{et } \underline{u}'(\underline{x}', t') &= \underline{u}(\underline{x}, t) + \underline{u}_0 \end{aligned}$$

• translation d'espace :

$$\begin{aligned} (\underline{x}, t) &\rightarrow (\underline{x}' = \underline{x} + \underline{z}, t' = t) \\ \text{et } \underline{u}'(\underline{x}', t') &= \underline{u}(\underline{x}, t) \end{aligned}$$

• translation temporelle :

$$\begin{aligned} (\underline{x}, t) &\rightarrow (\underline{x}' = \underline{x}, t' = t + \tau) \\ \text{et } \underline{u}'(\underline{x}', t') &= \underline{u}(\underline{x}, t) \end{aligned}$$

• invariance de parité :

$$\begin{aligned} (\underline{x}, t) &\rightarrow (\underline{x}' = -\underline{x}, t' = t) \\ \underline{u}'(\underline{x}', t') &= -\underline{u}(\underline{x}, t) \end{aligned}$$

• invariance par changement d'échelles :

$$\begin{aligned} (\underline{x}, t) &\rightarrow (\underline{x}' = \lambda \underline{x}, t' = \lambda^{1-h} t) & h \in \mathbb{R} \quad \nu = 0 \\ \underline{u}'(\underline{x}', t') &= \lambda^h \underline{u}(\underline{x}, t) & h = -1 \quad \nu \neq 0 \end{aligned}$$

• par rotations :

$$\begin{aligned} (\underline{x}, t) &\rightarrow (\underline{x}' = \underline{c} \underline{x}, t' = t) & \underline{c} \in \text{SO}(\mathbb{R}^3) \\ \underline{u}'(\underline{x}', t) &= \underline{c} \underline{u}(\underline{x}, t) \end{aligned}$$

• invariance galiléenne:

$$(\underline{x}, t) \rightarrow (\underline{x}' = \underline{x} + \underline{v}_0 t, t' = t) \text{ avec } \underline{v}_0 = v_0 \underline{e}_1$$

$$\begin{aligned} \underline{u}(\underline{x}, t) &\rightarrow \underline{v}(\underline{x}', t') = \underline{u}(\underline{x}, t) + \underline{v}_0 \\ \text{sol. de l'eq.} & \qquad \qquad \qquad = \underline{u}(\underline{x}' - \underline{v}_0 t', t') + \underline{v}_0 \end{aligned} \quad \text{solution?}$$

$$\rho \underline{u} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} = -\nabla p + \nu \Delta \underline{u}$$

$$\text{vérifions si } \frac{\partial v_i}{\partial t'} + v_j \frac{\partial v_i}{\partial x'_j} = -\frac{\partial p}{\partial x'_i} + \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x'_j{}^2}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \frac{\partial v_i}{\partial t'} &= \frac{\partial}{\partial t'} (u_i(\underline{x}' - \underline{v}_0 t', t') + v_{0i}) \\ &= \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial t} = \frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} (-v_{0j}) \end{aligned} \quad (t' = t)$$

$$\begin{aligned} \rightarrow v_j \frac{\partial v_i}{\partial x'_j} &= (u_j + v_{0j}) \frac{\partial (u_i + v_{0i})}{\partial x'_j} = (u_j + v_{0j}) \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial x_j}{\partial x'_j} \\ &= u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + v_{0j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \end{aligned} \quad \begin{matrix} \frac{\partial x_j}{\partial x'_j} = 1 \\ \frac{\partial x_j}{\partial x'_j} = 1 \end{matrix}$$

$$\rightarrow \frac{\partial p}{\partial x'_i}(\underline{x}', t') = \frac{\partial p}{\partial x_i}(\underline{x}, t) = \frac{\partial p}{\partial x_i}$$

$$\rightarrow \nu \frac{\partial^2 v_i}{\partial x'_j{}^2} = \nu \frac{\partial^2}{\partial x'_j{}^2} (u_i(\underline{x}, t) + v_{0i}) = \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j{}^2}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u_i}{\partial t} - v_{0j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + v_{0j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j{}^2}$$

CQFD

Lois de conservation

Remarque =

Soit f une quantité physique dans le fluide.

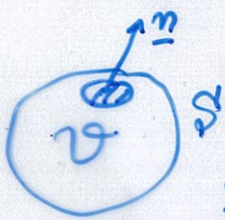
$$\partial_t f + (\underline{v} \cdot \nabla) f = + g.$$

$$\partial_t f = -(\underline{v} \cdot \nabla) f + g.$$

$$\int_V \partial_t f dV = \partial_t \int_V f dV = \int_V -(\underline{v} \cdot \nabla) f dV + \int_V g dV$$

$$\begin{aligned} &= \int_V -v_j \partial_j f dV + \int_V g dV \\ (\nabla \cdot \underline{v} = 0) \quad &= - \int_V \partial_j (v_j f) dV + \int_V g dV \end{aligned}$$

$$= - \int_S (v_j f) n_j ds + \int_V g dV$$



$$\frac{d}{dt} \langle f \rangle = - \int_S \underbrace{f \underline{v} \cdot \underline{n}}_{=0} ds + \int_V g dV$$

→ en étendant l'intégration à tout le volume du fluide et en considérant le mouvement du fluide dans un référentiel où le fluide est au repos à l'infini (la vitesse s'annule à l' ∞)
d'advection

→ Les termes non-linéaires sont conservatifs
et $\int dt f = \int \frac{Df}{Dt}$

* Conservation de l'énergie : $E = \frac{1}{2} \int \rho |\underline{v}|^2 d\mathcal{V}$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \int \frac{1}{2} \frac{\partial v^2}{\partial t} d\mathcal{V} = \int \underline{v} \partial_t \underline{v} d\mathcal{V} = ? \quad (\rho=1)$$

$$(1) \quad \underline{v} \partial_t \underline{v} = \frac{1}{2} \partial_t v^2 = \underbrace{-\underline{v} \cdot (\underline{v} \cdot \nabla \underline{v})}_{\text{green arrow}} - \underbrace{\underline{v} \cdot \nabla p}_{\text{green arrow}} + \underbrace{2\nu \underline{v} \cdot \Delta \underline{v}}_{(*)}$$

$$-\underline{v} \cdot \nabla (v^2/2) = -\nabla \cdot (\underline{v} \cdot \underline{v}^2/2) \quad -\nabla \cdot (\underline{v} p)$$

* $\Delta \underline{v} = -\nabla \times \underline{\omega}$ (avec $\nabla \times (\nabla \times \underline{A}) = \nabla(\nabla \cdot \underline{A}) - \Delta \underline{A}$)

$$\underline{v} \cdot \Delta \underline{v} = -\underline{v} \cdot \nabla \times \underline{\omega} = -\nabla \cdot (\underline{\omega} \times \underline{v}) - \underline{\omega}^2$$

en remplaçant dans (1) et en intégrant sur le volume du fluide :

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \int \frac{1}{2} \partial_t v^2 d\mathcal{V} = \int \underbrace{-\nabla \cdot [\underline{v} (v^2/2 + p) + \underline{\omega} \times \underline{v}]}_{\text{intégrale de surface s'annule}} d\mathcal{V} - 2 \int \underline{\omega}^2 d\mathcal{V}$$

on obtient donc :

$$\frac{dE}{dt} = -2 \langle \underline{\omega}^2 \rangle \quad \text{conservée pour } \nu=0$$



* on peut aussi écrire $\Delta v_i = \partial_j (\partial_j v_i + \partial_i v_j)$

$$\underline{v} \cdot \Delta \underline{v} = v_i \partial_j (\partial_j v_i + \partial_i v_j)$$

tenseur "visqueux" des contraintes

$$\sigma_{ij} \equiv \partial_j v_i + \partial_i v_j$$

$$\underline{v} \cdot \Delta \underline{v} = \nabla \cdot (\sigma \underline{v}) - \frac{\nu}{2} [\partial_j v_i + \partial_i v_j]^2$$

et on obtient dans ce cas :

$$\frac{dE}{dt} = \underbrace{\int \nabla \cdot (\sigma \underline{v}) d\mathcal{V}}_{\text{s'annule par}} - \frac{\nu}{2} \int [\partial_j v_i + \partial_i v_j]^2 d\mathcal{V}$$

intégrale de surface d'un fluide au repos
 $\vec{v} = 0$

ce qui donne :

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{\nu}{2} \langle (\partial_j v_i + \partial_i v_j)^2 \rangle = -\langle \varepsilon_{loc} \rangle$$

en définissant la dissipation locale

$$\varepsilon_{loc}(\underline{x}) = \frac{\nu}{2} (\partial_j v_i + \partial_i v_j)^2$$

* Conservation de l'hélicité: $H \equiv \int \underline{v} \cdot \underline{\omega} dV$

remarque: $\underline{\omega}$ est un pseudo-vecteur et donc H est un pseudo-scalaire \rightarrow mesure le manque de symétrie de réflexion de l'écoulement.

$$\frac{dH}{dt} = \int \left(\underline{\omega} \cdot \frac{D\underline{v}}{Dt} + \underline{v} \cdot \frac{D\underline{\omega}}{Dt} \right) dV$$

on: $\frac{D\underline{v}}{Dt} = -\nabla p + \nu \Delta \underline{v} = -\nabla p - \nu \nabla \times \underline{\omega}$

$$\frac{D\underline{\omega}}{Dt} = \underline{\omega} \cdot \nabla \underline{v} - \nu \nabla \times (\nabla \times \underline{\omega})$$

donc

$$\begin{aligned} \frac{dH}{dt} &= \int \left[\underbrace{-\underline{\omega} \cdot \nabla p}_{\downarrow} - \nu \underline{\omega} \cdot \nabla \times \underline{\omega} + \underbrace{\underline{v} \cdot (\underline{\omega} \cdot \nabla \underline{v})}_{\downarrow} - \nu \underbrace{\underline{v} \cdot \nabla \times (\nabla \times \underline{\omega})}_{\downarrow} \right] dV \\ &= \int \left[\nabla \cdot (-\underline{\omega} p) - \nu \underline{\omega} \cdot \nabla \times \underline{\omega} + \nabla \cdot \left(\underline{\omega} \frac{v^2}{2} \right) + \nu \nabla \cdot \left(\underline{v} \times \nabla \times \underline{\omega} \right) \right] dV \\ &\quad \left(-\nu \underline{\omega} \cdot \nabla \times \underline{\omega} \right) \end{aligned}$$


en utilisant: $\left\{ \begin{array}{l} \underline{v} \cdot [\nabla \times (\nabla \times \underline{\omega})] = (\nabla \times \underline{\omega}) \cdot \underline{\omega} - \nabla \cdot (\underline{v} \times (\nabla \times \underline{\omega})) \\ \underline{v} \cdot (\underline{\omega} \cdot \nabla \underline{v}) = \nabla \cdot \left(\underline{\omega} \frac{v^2}{2} \right) \end{array} \right.$

on obtient ainsi:

$$\frac{dH}{dt} = \int \underbrace{\left[\underline{\omega} \left(-p + \frac{v^2}{2} \right) + \nu \underline{v} \times (\nabla \times \underline{\omega}) \right]}_{\text{s'annule (fluide au repos } \underline{v} = \underline{\omega} = 0)} dV - 2\nu \int \underline{\omega} \cdot \nabla \times \underline{\omega} dV$$

soit
$$\frac{dH}{dt} = -2\nu \int_V \underline{\omega} \cdot \nabla \times \underline{\omega} \, dV$$

remarques :

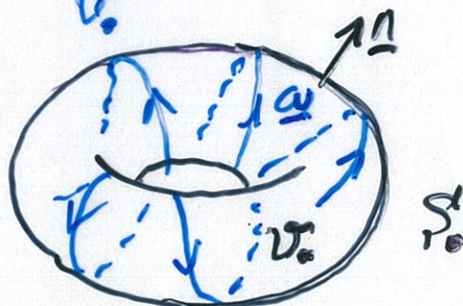
- 1) limite inviscide ($\nu=0$) $H = \text{cte}$ 
- 2) $\nu \neq 0$ H changera de signe par l'intermédiaire des effets visqueux (<0 ou >0 ; création ou destruction)
- 3) l'équation pour $\frac{dH}{dt}$ montre qu'on peut introduire un flux d'hélicité :

$$\underline{F}_H = \underline{\omega} \left(-p + \frac{v^2}{2} \right) + \nu \underline{v} \times (\nabla \times \underline{\omega})$$

quand $\underline{\nu} = 0$; le flux est dans la direction de $\underline{\omega}$

soit S_0 une surface fermée (limitant un volume V_0 fini) sur laquelle $\underline{\omega} \cdot \underline{n} = 0$

alors $H(V_0) = \int_V \underline{v} \cdot \underline{\omega} \, dV$ est conservée



vrai $\forall S_0$ de cette forme ; donc il y a un invariant d'hélicité pour chaque S_0 , et donc une infinité d'invariants localisés



attention : dans tout ce qui a été dérivé, on a supposé que la vitesse et la pression étaient suffisamment régulières, régularité conjecturée pour $\nu > 0$ finie. Mais pour les solutions d'Euler ($\nu = 0$), elles peuvent ne pas être régulières (existence de singularités!?) et la conservation d'énergie, et d'hélicité, peut être mise en défaut.

→ donc attention à la limite $\nu \rightarrow 0$.

Les écoulements d'Euler ($\nu=0$)

Les équations d'Euler:

$$(1) \begin{cases} \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} = -\nabla p & (p = \text{cte} = 1) \\ \nabla \cdot \underline{u} = 0 \end{cases}$$

+ Conditions aux limites, + Conditions initiales

(1) peut aussi s'écrire

$$(2) \quad \frac{\partial \underline{u}}{\partial t} = \underline{u} \times \underline{\omega} - \nabla \left(p + \underbrace{\frac{1}{2} \underline{u}^2}_{\equiv h} \right) = \underline{u} \times \underline{\omega} - \nabla h$$

Le rotationnel de (2) donne l'équation pour la vorticité $\underline{\omega} = \nabla \times \underline{u}$

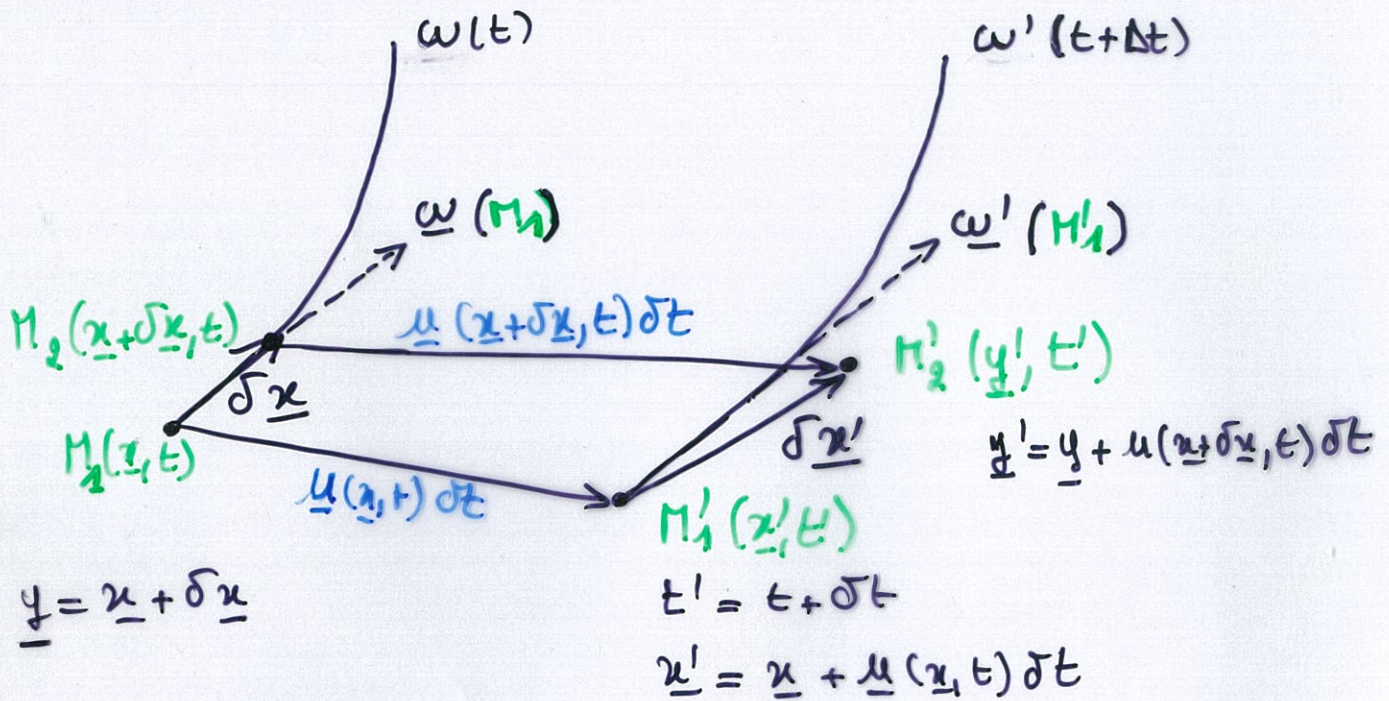
$$\frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} = \nabla \times (\underline{u} \times \underline{\omega})$$

\implies on va voir:

(1) la vorticité est "gelée" dans le fluide \rightarrow
la topologie de $\underline{\omega}$ ne peut changer.

(2) le cas stationnaire.

La vorticité se déplace avec le fluide quand $\nu = 0$



* On considère :

- un élément fluide à t en \underline{x} : point $M_1 \rightarrow M'_1$   t' = t + delta t
en $\underline{x}' = \underline{x} + u(\underline{x}, t) \delta t$
- un 2 me " "   t en \underline{y} : point $M_2 \rightarrow M'_2$   t'
 $\underline{y} = \underline{x} + \delta \underline{x}$ en $\underline{y}' = \underline{y} + u(\underline{y}, t) \delta t$

* Par hypothèse ; on a $\overline{M_1 M_2} = \delta \underline{x} \parallel \vec{\omega}(M_1)$

* $\vec{\omega} \rightarrow \vec{\omega}'$ et $\delta \underline{x} \rightarrow \delta \underline{x}'$; a-t-on $\vec{\omega}'(M'_1) \parallel \delta \underline{x}'$?
 i.e. 2 éléments fluides sur la même ligne de vorticité
 restent-ils sur la même ligne de vorticité déplacée
   t' = t + delta t ?

$$\delta \underline{x}' = \underline{y}' - \underline{x}' = \delta \underline{x} + [u(\underline{x} + \delta \underline{x}, t) - u(\underline{x}, t)] \delta t = \delta \underline{x} + (\delta \underline{x} \cdot \nabla) u \delta t$$

$$= \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \cdot \delta x_j$$

à $t' = t + \delta t$; la vorticité est calculée par :

$$\begin{aligned}\underline{\omega}' &= \underline{\omega}(\underline{x}', t') = \underline{\omega}(\underline{x} + \underline{u}(\underline{x}, t)\delta t, t + \delta t) \\ &= \underline{\omega}(\underline{x}, t) + \frac{D\underline{\omega}}{Dt} \delta t \\ &= \underline{\omega}(\underline{x}, t) + (\underline{u}(\underline{x}, t) \cdot \nabla) \underline{\omega}(\underline{x}, t) \delta t \\ &\quad + \frac{\partial \underline{\omega}(\underline{x}, t)}{\partial t} \delta t\end{aligned}$$

on en a $\frac{D\underline{\omega}}{Dt} = \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{\omega} = (\underline{\omega} \cdot \nabla) \underline{u} + \nu \Delta \underline{\omega}$

ce qui donne

$$\underline{\omega}' = \underline{\omega} + (\underline{\omega} \cdot \nabla) \underline{u} \delta t + \nu \Delta \underline{\omega} \delta t$$

en comparant avec l'expression de $\delta \underline{x}'$

$$\delta \underline{x}' = \delta \underline{x} + (\delta \underline{x} \cdot \nabla) \underline{u} \delta t$$

donc, $\underline{\omega}$ étant parallèle à $\delta \underline{x}$, $\underline{\omega}'$ et $\delta \underline{x}'$ ne sont pas parallèles quand $\nu \neq 0$

par contre, si $\nu = 0$, $\underline{\omega} \parallel \delta \underline{x} \Rightarrow \underline{\omega}' \parallel \delta \underline{x}'$
les lignes de vorticité se déplacent avec le fluide : elles sont "gelées" dans le fluide.

Remarque = $\nu \neq 0$

- $(\nu \Delta \underline{\omega})_{\parallel}$ (i.e. \parallel à $\delta \underline{x}'$) représente la différence des taux d'étirement entre les lignes de vorticité et les lignes de fluide.
- $(\nu \Delta \underline{\omega})_{\perp}$ représente le taux de déviation directionnel entre ces 2 lignes. On peut l'utiliser pour quantifier le degré de reconnection des lignes de $\underline{\omega}$.

Écoulements d'Euler stationnaires.

Reprenons les équations d'Euler pour \underline{u} et $\underline{\omega}$

$$\frac{\partial \underline{u}}{\partial t} = \underline{u} \times \underline{\omega} - \nabla h \quad (\nabla \cdot \underline{u} = 0); h = p + \frac{1}{2} \underline{u}^2$$

$$\frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} = \nabla \times (\underline{u} \times \underline{\omega}) \quad \underline{\omega} = \nabla \times \underline{u}$$

dans le cas stationnaire; elles se réduisent

\bar{a} :

$$\underline{u} \times \underline{\omega} = \nabla h \implies \nabla h \perp \underline{u} \text{ et } \underline{\omega}$$

si de tels écoulements existent, ils doivent satisfaire

$$\underline{u} \cdot \nabla h = 0 \text{ et } \underline{\omega} \cdot \nabla h = 0$$

c'est à dire que les lignes de courant et de vortécité sont sur des surfaces $h = \text{cte}$, contrainte topologique forte - Comment-y-échapper?

> s'il ^{existe} un sous-domaine \mathcal{D} du fluide où $\nabla h = 0$.

$$\underline{u} \times \underline{\omega} = 0 \implies \underline{u} = \alpha \underline{\omega} \text{ dans } \mathcal{D} (*)$$

$\alpha = \alpha(\underline{x})$ champ scalaire.

$$\begin{cases} \nabla \cdot \underline{u} = 0 \\ \nabla \cdot \underline{\omega} = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \underline{\omega} \cdot \nabla \alpha = 0 \\ \underline{u} \cdot \nabla \alpha = 0. \end{cases}$$

\rightsquigarrow les lignes de courant et de vortécité (qui coïncident $(*)$) sont sur des surfaces $\alpha = \text{cte}$.

> si $\alpha = \text{cte}$ dans un sous-domaine $\mathcal{D}_1 \subset \mathcal{D}$; les lignes de courant/vortécité sont libres de se ballader dans tout \mathcal{D}_1 et peuvent présenter un comportement chaotique.

Leçon 3-1 : Notions probabilistes utilisées en Turbulence

★ **variables aléatoires**

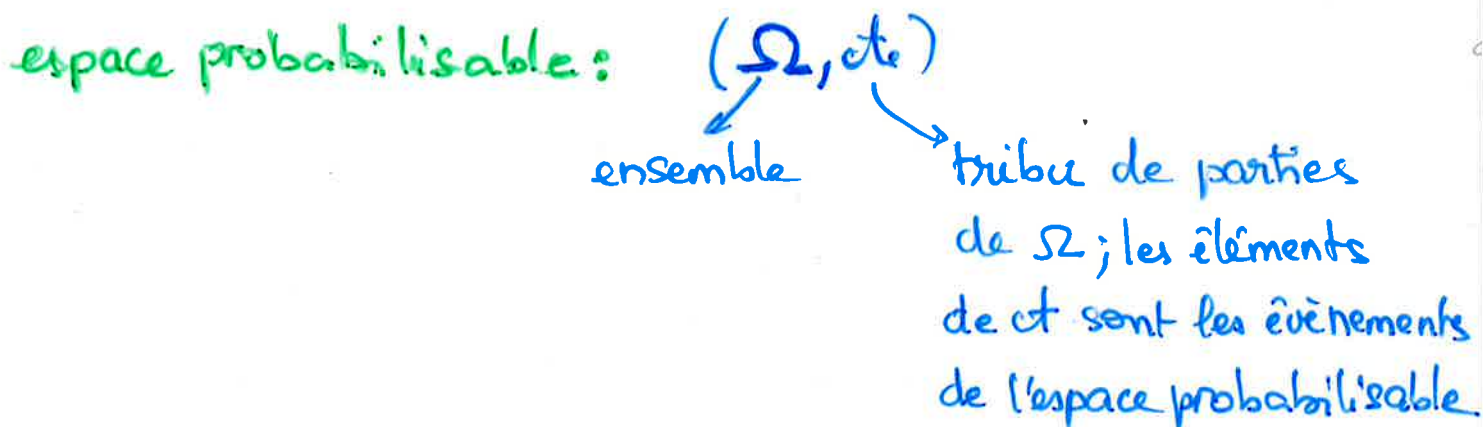
★ **fonctions aléatoires**

★ **symétries statistiques et stationnarité**

★ **résultats ergodiques**

Variables aléatoires

espace probabilisable:



espace probabilisé:

(Ω, \mathcal{C}, P) P : probabilité sur (Ω, \mathcal{C})

mesure positive sur (Ω, \mathcal{C}) , telle que:

$$P(\Omega) = 1; P: \mathcal{C} \rightarrow [0, 1]$$

Axiomes de Kolmogorov:

Une probabilité P sur (Ω, \mathcal{C}) est une application:
 $\mathcal{C} \rightarrow [0, 1]$

vérifiant les axiomes suivants:

PI $P(\Omega) = 1$

PII Soient A et B deux événements incompatibles ($A \cap B = \emptyset$) de \mathcal{C} ; alors:
 $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

PIII Si $(A_n)_{n \geq 0}$ est une suite d'événements de \mathcal{C} , incompatibles $2 \text{ à } 2$, alors:



$$\sum_{n \geq 0} P(A_n) = P\left(\bigcup_{n \geq 0} A_n\right)$$

PIV Si $(A_n)_{n \geq 0}$ est une suite d'événements de \mathcal{C} , tels que $A_{n+1} \subset A_n \forall n \geq 0$ et si $\bigcap_{n \geq 0} A_n = \emptyset$, alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(A_n) = 0$$

Variable aléatoire sur $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$:

application $X: \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$

telle que $X^{-1}(\underbrace{]--\infty, x[}_{\in \mathbb{R}}) \in \mathcal{A}$

* exemple: v_x à a et t fixés; avec v_0 comme condition initiale; $\Omega = \{v_0\}$; $v_x | (v_0)$
 (a, t)

X est une v.a. continue:

si il existe une fonction f (la densité de probabilité de X)

telle que: (i) f continue, sauf, au plus, sur un

nombre fini de points x_0 pour lesquels les discontinuités sont de 1^{ère} espèce.

(ii) $f(x) \geq 0 \quad \forall x$.

(iii) $F(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \mathbb{P}(X < x)$
 $= \mathbb{P}(X^{-1}(\underbrace{]--\infty, x[}_{\in \mathbb{R}}))$

* remarque: $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = 1$

$F(x) \equiv$ fonction de répartition (ou probabilité cumulative) de X .

Si f existe = * $F(x) = \mathbb{P}(X < x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$

* F continue sur \mathbb{R}

* $\forall x$ où f est continue: $\frac{dF}{dx} = f(x)$

propriétés de $F(x) = P(X \leq x)$

* F est une fonction croissante de x

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1 \quad ; \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$$

* F est continue à droite de x , $\forall x \in \mathbb{R}$

$$F(x^+) = F(x)$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} P(x \in x + \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} F(x + \varepsilon) \equiv F(x^+)$$

$$* P(x_1 < X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1)$$

$$* P(X = x) = F(x) - F(x^-)$$

$$* P(x_1 \leq X \leq x_2) = F(x_2) - F(x_1^-)$$

si X est une v.a. continue.

$$* P(X \leq a) = F(a) = \int_{-\infty}^a f(t) dt$$

$$* P(X \geq a) = \int_a^{\infty} f(t) dt$$

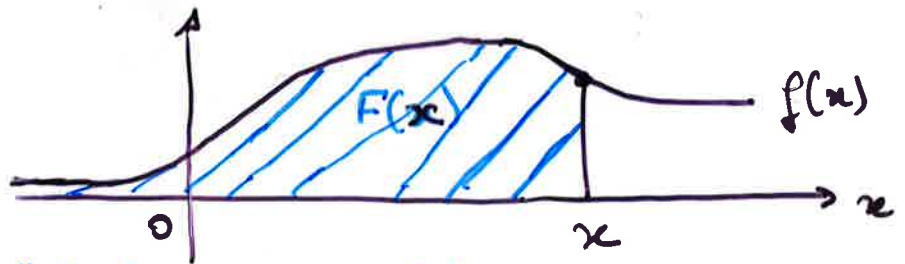
$$* P(X = a) = 0 \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$* P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(t) dt.$$

$$* f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{P(x \leq X \leq x + \Delta x)}{\Delta x}$$

$$P(x \leq X \leq x + \Delta x) \simeq f(x) \Delta x.$$

interprétations :



→ une "bosse" de f correspond à un accroissement important de F

• en fréquence ; sur m expériences

$$F(x) = P(X \leq x) \simeq m_x / m \quad m \rightarrow \infty$$

Moments d'ordre m d'une v.a. X :

$$M_m(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^m f(t) dt$$

moment d'ordre 1 : $E[X] = \langle x \rangle$ moyenne, ou
espérance mathématique
ou valeur attendue.

$$E[ax] = a E[X] \quad \forall a \in \mathbb{R}$$

$$E[x+b] = E[X] + b. \quad \forall b \in \mathbb{R}$$

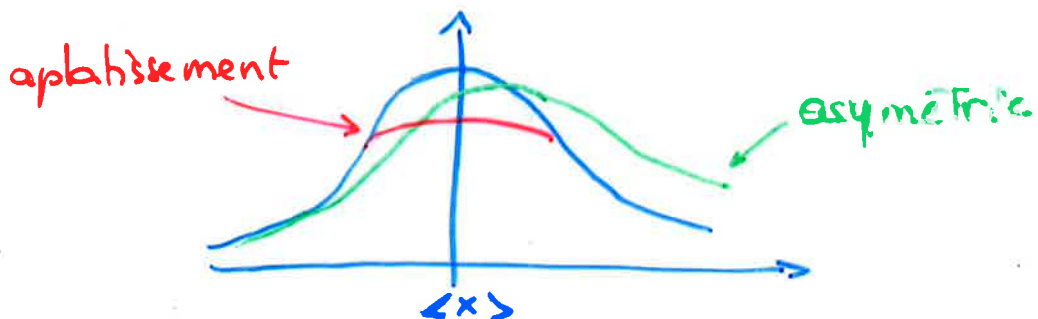
$$\begin{aligned} \text{variance : } V(X) &= E[X^2] - E[X]^2 \\ &= M_2[X - E[X]] \end{aligned}$$

$$V[ax+b] = a^2 V[X]$$

écart type : $\sigma[X] = \sqrt{V[X]}$ (déviation standard)

aplatissement : $\langle x^4 \rangle / \langle x^2 \rangle^2$ (flatness).

asymétrie : $\langle x^3 \rangle / \langle x^2 \rangle^{3/2}$ (skewness)



Moments absolus : $E[|X|^m]$

Moments centrés : $E[(X - \langle x \rangle)^m]$

v.a. indépendantes sur (Ω, \mathcal{A}, P) : X, Y

X, Y variables aléatoires telles que

$\forall a, b \in \mathbb{R}$ $A = X^{-1}(\mathbb{J}-\infty, a[)$ et $B = Y^{-1}(\mathbb{J}-\infty, b[)$
soient aléatoirement indépendants.

i.e. $P(A \cap B) = P(A)P(B)$

$$P(X \leq a; Y \leq b) = P(X \leq a)P(Y \leq b)$$

probabilité conditionnelle pour un événement A :

$A \in \mathcal{A}; P(A) \neq 0$

$$P_A(B) = P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \quad \forall B \in \mathcal{A}$$

distribution conditionnelle :

$$F(x|A) = P\{X \leq x | A\} = \frac{P(X \leq x, A)}{P(A)}$$

avec $\{X \leq x, A\} = \{\omega \in A; X(\omega) \leq x\}$.

v.a. centrée : $X_c = X - E[X]$

$$E[X_c] = \langle X_c \rangle = 0$$

centrée réduite : $Y = \frac{X - E[X]}{\sigma[X]}$

$$E[Y] = 0; \sigma[Y] = 1$$

Covariance de 2 v.a. X et Y :

$$\begin{aligned} \text{Cov}[X, Y] &= E[(X - E[X])(Y - E[Y])] \\ &= E[X_c \cdot Y_c] = E[XY] - E[X]E[Y] \end{aligned}$$

\rightarrow coefficient de corrélation $\rho = \frac{\text{Cov}[X, Y]}{\sigma[X]\sigma[Y]}$

* $|\rho| \leq 1$

* si X et Y sont indépendantes ; $\rho = 0$
 $E[XY] = E[X]E[Y]$

v.a. continues classiques

loi exponentielle de paramètre k

$$X(\Omega) \in \mathbb{R}^+ \text{ et } f(x) = \begin{cases} k e^{-kx} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow \begin{cases} F(x) = 1 - e^{-kx} & x \geq 0 \\ F(x) = 0 & x < 0 \end{cases}$$

$$E[X] = 1/k; \quad V[X] = 1/k^2; \quad \sigma(X) = 1/k$$

loi normale (gaussienne) $\mathcal{N}(m, \sigma)$

X est normale si elle admet pour densité f ;

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2} \right] \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$F'(x) = f(x) \quad (\sim \text{fonction erf}).$$

$$E[X] = m; \quad V[X] = \sigma^2; \quad \sigma[X] = \sigma$$

$$E[X^n] = \begin{cases} 1 \cdot 3 \dots (n-1) \sigma^n & n \text{ pair} = 2k \\ 0 & n \text{ impair} = 2k+1 \end{cases}$$

$$E[|X|^n] = \begin{cases} 1 \cdot 3 \dots (n-1) \sigma^n & n \text{ pair} \\ \sqrt{\frac{2}{\pi}} 2^k k! \sigma^{2k+1} & n \text{ impair} \end{cases}$$

$$(\text{rappel} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha x^2} dx = \sqrt{\pi/\alpha})$$

loi normale réduite $\mathcal{N}(0, 1)$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Loi log-normale :

$\mathcal{N}(m, \sigma)$ Y v.a. normale ; $X = e^Y$ est log-normale

$$f(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \frac{1}{\sigma x \sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(\log x - m)^2}{2\sigma^2}\right) & x > 0 \end{cases}$$

$$E[X] = e^{m + \sigma^2/2} ; V[X] = (e^{\sigma^2} - 1) (e^{2m + \sigma^2})$$

Théorème central limite ou de la limite centrée :

la loi d'une somme d'un grand nombre de v.a. indépendantes se rapproche de la loi de Gauss.

Fonction caractéristique d'une v.a. X : $\Phi_X(\alpha)$

transformée de Fourier de sa fonction de densité

$$\Phi_X(\alpha) = \begin{cases} \text{moyenne (espérance, valeur attendue)} \\ \text{de } e^{i\alpha X} = \cos \alpha X + i \sin \alpha X \end{cases}$$

$$\Phi_X(\alpha) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\alpha x} f(x) dx = E[e^{i\alpha X}] = \langle e^{i\alpha X} \rangle$$

formule inverse : $f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \Phi_X(\alpha) e^{-i\alpha x} d\alpha$.

fonction moment : $s = i\alpha$ $\tilde{\Phi}(s) \equiv \Phi(\alpha)$

remarque :

pour une gaussienne réduite $\mathcal{N}(0, 1)$

$$\Phi(\alpha) = \langle e^{i\alpha X} \rangle = e^{-\alpha^2/2}$$

pour une gaussienne $\mathcal{N}(m, \sigma)$

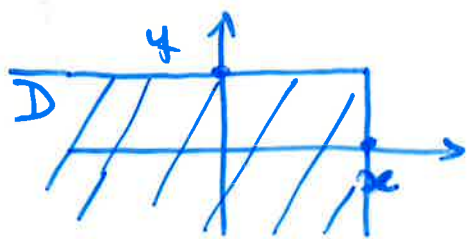
$$\Phi(\alpha) = \langle e^{i\alpha X} \rangle = e^{im\alpha} \cdot e^{-(\alpha\sigma)^2/2}$$

Extension à des "vecteurs aléatoires"

(séquences de variables aléatoires).

* en dimension 2 : soient 2 v.a. X et Y

distribution jointe (ou bivaluée) de $[X, Y]$ est la probabilité de l'évènement : $\{X \leq x\} \cap \{Y \leq y\}$



$$\begin{aligned} &\equiv \{X \leq x, Y \leq y\} \\ &= \{(X, Y) \in D\} \end{aligned}$$

$$F(x, y) = P\{X \leq x, Y \leq y\}.$$

propriétés : $F(-\infty, y) = 0$; $F(x, -\infty) = 0$; $F(\infty, \infty) = 1$

densité jointe : $f(x, y) \equiv \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(\alpha, \beta) d\alpha d\beta$$

distribution et densité marginale de X et Y

$$F_X(x) = F(x, \infty); \quad F_Y(y) = F(\infty, y); \quad F(\infty, \infty) = 1$$

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, \beta) d\beta; \quad f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha, y) d\alpha$$

X et Y sont indépendantes si $f(x, y) = f_X(x) f_Y(y)$

conséquence : X, Y sont décorrélés i.e. $\rho = 0$.

$$\rho = \frac{E[(X - m_X)(Y - m_Y)]}{\sigma_X \sigma_Y} = \frac{E[XY] - E[X]E[Y]}{\sigma_X \sigma_Y}$$

$$\text{et } E[XY] = E[X]E[Y] \Rightarrow \rho = 0.$$

moments joints de x et y d'ordre m :

$$\begin{cases} M_{kr} = E[x^k y^r] = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x^k y^r f(x,y) dx dy \\ k+r=m \end{cases}$$

ex. moments d'ordre 1: $M_{10} = E[x]$; $M_{01} = E[y]$

moments d'ordre 2: $M_{20} = E[x^2]$; $M_{11} = E[xy]$

$$M_{02} = E[y^2]$$

fonction caractéristique jointe:

$$\phi(\alpha_1, \alpha_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y) e^{i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)} dx dy$$

formule inverse: $f(x,y) = \frac{1}{4\pi^2} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(\alpha_1, \alpha_2) e^{-i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)} d\alpha_1 d\alpha_2$

marginales: $\phi_x(\alpha) = E[e^{i\alpha x}]$; $\phi_y(\alpha) = E[e^{i\alpha y}]$
 $= \phi(\alpha, 0)$ $= \phi(0, \alpha)$

x, y indépendantes: $E[e^{i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)}] = E[e^{i\alpha_1 x}] E[e^{i\alpha_2 y}]$

et donc: $\phi(\alpha_1, \alpha_2) = \phi_x(\alpha_1) \phi_y(\alpha_2)$

remarque: $z = ax + by$

$$\phi_z(\alpha) = E[e^{i(\alpha x + b y)\alpha}] = \phi(a\alpha, b\alpha)$$

x, y indép. $\phi_z(\alpha) = \phi_x(a\alpha) \phi_y(b\alpha)$

normalité jointe :

$$f(x, y) = A \exp \left[\frac{-1}{2(1-\rho^2)} \left(\frac{(x-m_x)^2}{\sigma_x^2} - 2\rho \frac{(x-m_x)(y-m_y)}{\sigma_x \sigma_y} + \frac{(y-m_y)^2}{\sigma_y^2} \right) \right]$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma^2 = x^2 + y^2 \\ m_x = E[X] ; m_y = E[Y] \\ \sigma_x^2, \sigma_y^2 \text{ variances de } x \text{ et } y \\ A = \frac{1}{2\pi\sigma_x\sigma_y\sqrt{1-\rho^2}} \quad |\rho| < 1. \end{array} \right.$$

* en dimension m : $\underline{X} = [X_1, \dots, X_m]$; X_i v.a.

distribution jointe (ou multivariée)

$$F(\underline{x}) = P\{X_1 \leq x_1, \dots, X_n \leq x_n\}$$

densité jointe (ou multivariée)

$$f(\underline{x}) = \frac{\partial^n F(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \dots \partial x_n}$$

$$F(\underline{x}) = \iiint_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n$$

** Si dans $F(x_1, \dots, x_n)$ on substitue certaines variables par $+\infty$, on obtient la distribution jointe des variables restantes
idem pour $f(x_1, \dots, x_n)$.

exemple : $F(x_1, x_2, x_3, x_4)$

$$F(x_1, x_3) = F(x_1, \infty, x_3, \infty)$$

$$f(x_1, x_3) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, x_3, x_4) dx_2 dx_4$$

** distributions et densités marginales :

$$F_{x_1}(x_1) = F(x_1, \infty, \infty, \infty)$$

$$f_{x_2}(x_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x_1, x_2, x_3, x_4) dx_2 dx_3 dx_4$$

indépendance :

les v.a. X_1, \dots, X_m sont dites (mutuellement) indépendantes si les événements :

$\{X_1 \leq x_1\} \dots \{X_n \leq x_n\}$ sont indépendants

$$\left\{ \begin{array}{l} F(x_1, \dots, x_n) = F_{x_1}(x_1) \dots F_{x_n}(x_n) \\ f(x_1, \dots, x_n) = f_{x_1}(x_1) \dots f_{x_n}(x_n) \end{array} \right.$$

matrice de covariance et de corrélation

C_{ij}

R_{ij}

$$\begin{aligned} C_{ij} &= E[(X_i - \mu_i)(X_j - \mu_j)] = E[X_i X_j] - E[X_i]E[X_j] \\ &= \underbrace{E[X_i X_j]}_{R_{ij}} - \mu_i \mu_j \end{aligned}$$

- $\sigma_i^2 = C_{ii}$ variance de X_i
- si X_i, X_j sont mutuellement indépendants $\forall i, j$, alors R_{ij} est diagonale

fonction caractéristique

$$\phi_{\underline{X}}(\underline{\alpha}) = \int_{\mathbb{R}^m} e^{i \underline{\alpha} \cdot \underline{x}} f(\underline{x}) d\underline{x}$$

moments d'ordre m

$$\langle X_{i_1} \dots X_{i_m} \rangle = \left(\frac{1}{i}\right)^m \frac{\partial^m}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_m}} \phi_{\underline{X}}(\underline{\alpha}) \Big|_{\underline{\alpha}=0}$$

gaussiennité

\underline{X} vecteur aléatoire centré de \mathbb{R}^m est dit gaussien si $\forall \underline{c} \in \mathbb{R}^m$, $\underline{c} \cdot \underline{x}$ est une v.a. scalaire gaussienne.

Fonctions aléatoires

famille de variables aléatoires (scalaires ou vecteurs) dépendant de 1 ou plusieurs variables d'espace ou de temps

remarque = si \tilde{F} est une fonction quelconque de $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n$, \tilde{F} est une v.a. et sa moyenne (d'ensemble) est défini par:

$$\langle \tilde{F} \rangle = \int \tilde{F} \underbrace{f(\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_n)}_{\text{densité de prob. jointe de } \underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n} \underbrace{d\underline{u}_1 d\underline{u}_2 \dots d\underline{u}_n}_{\text{toutes les valeurs possibles de } \underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n}$$

exemple = fonction d'une variable aléatoire

Soit X une v.a. et $g(x)$ une fonction réelle de x ; alors $Y = g(x)$ est une nouvelle v.a.

$$\xi \xrightarrow{X} \underbrace{x(\xi)}_{\text{nombre}} \xrightarrow{g} g(x(\xi)) = \underbrace{y(\xi)}_{\text{autre nombre}}$$

• Fonction de répartition de $Y = g(x)$

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(\underbrace{g(x)}_{(x)} \leq y)$$

(*) pour un y particulier; les valeurs de x telles que $g(x) \leq y$, forment un ensemble R_y particulier

- $f_Y(y)$ densité de Y à partir de la densité de X , $f_X(x)$; il suffit de considérer les valeurs de y telles que pour un x : $g(x) \leq y$.

théorème fondamental: pour trouver $f_Y(y)$ pour un y particulier, on résout $y = g(x)$. Soient x_n les racines réelles de l'équation, i.e. $y = g(x_1) = \dots = g(x_n)$

$$\text{alors : } f_Y(y) = \frac{f_X(x_1)}{|g'(x_1)|} + \dots + \frac{f_X(x_n)}{|g'(x_n)|}$$

(g' dérivée de g à x)

- moyenne de $g(x)$ et Y :

$$\begin{aligned} E[g(x)] &\equiv E[Y] = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx. \end{aligned}$$

Exemple : $Y = ax + b = g(x)$

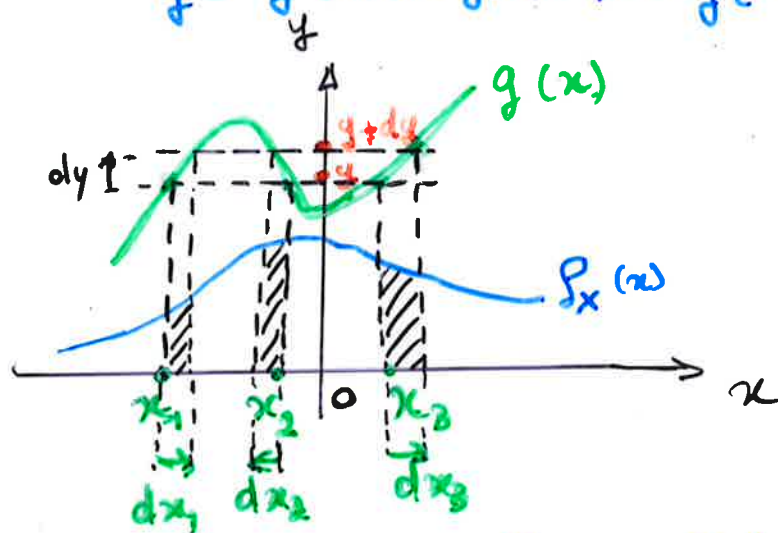
$$g'(x) = a$$

$y = g(x)$ a 1 seule solution $\forall y$
 $x = \frac{y-b}{a}$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \frac{1}{|a|} f_X\left(\frac{y-b}{a}\right)$$

demo. ex. $y = g(x)$ a 3 racines : x_1, x_2, x_3

$$y = g(x_1) = g(x_2) = g(x_3)$$



on sait que : $f_y(y) dy = dF_y(y) = P(y < Y \leq y + dy)$

il faut trouver : $\{x\}$ tels que ; $y < g(x) \leq y + dy$
et la probabilité que x soit dans l'intervalle

$$\{x\} = \{x_1 < x < x_1 + dx_1\} \cup \{x_2 + dx_2 < x < x_2\} \\ \cup \{x_3 < x < x_3 + dx_3\}$$

avec $dx_1 > 0, dx_3 > 0$ mais $dx_2 < 0$

$$P(y < Y < y + dy) = P(x_1 < x < x_1 + dx_1) + P(x_2 + dx_2 < x < x_2) \\ + P(x_3 < x < x_3 + dx_3)$$

$$= f_x(x_1) dx_1 + f_x(x_2) |dx_2| + f_x(x_3) dx_3$$

$$\text{or } dy = g'(x_1) dx_1 ; dy = g'(x_2) dx_2 ; dy = g'(x_3) dx_3$$

on a donc :

$$P(y < Y < y + dy) = f_x(x_1) \frac{dy}{g'(x_1)} + f_x(x_2) \frac{dy}{|g'(x_2)|} + f_x(x_3) \frac{dy}{g'(x_3)}$$

dém. $E[g(x)] = E[CY] = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy \quad (1)$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx \quad (2)$$

sur exemple précédent $y = g(x)$ a trois racines

$$f_Y(y) dy = f_X(x_1) dx_1 + f_X(x_2) |dx_2| + f_X(x_3) dx_3$$

$$y f_Y(y) dy = g(x_1) f_X(x_1) dx_1 + g(x_2) f_X(x_2) dx_2 + g(x_3) f_X(x_3) dx_3$$

→ chaque différentielle dans (1) est approximée par 1 ou plusieurs différentielles de (2)

comme dy couvre l'axe des y ; les dx correspondants ne se chevauchent pas et courent l'axe des x en entier → (1) et (2) sont des intégrales égales

exemple sur la vitesse.

vitesse \underline{u} en m points différents de l'espace-temps (\underline{x}, t) :

$$\underline{u}_1 = \underline{u}(\underline{x}_1, t_1), \underline{u}_2 = \underline{u}(\underline{x}_2, t_2), \dots, \underline{u}_m = \underline{u}(\underline{x}_m, t_m)$$

$\underline{u}_1, \dots, \underline{u}_m$ ont différentes valeurs pour différentes réalisations

On peut considérer les "moments d'ordre m en m points" : $m \geq n$

$$\underline{ex.} = \langle u_i(\underline{x}_1, t_1) u_j(\underline{x}_2, t_2) \dots u_p(\underline{x}_m, t_m) \rangle$$

les m composantes de la vitesse peuvent être n'importe lesquelles des 3 composantes de la vitesse et la valeur générale a 3^m composantes scalaires ;
 m points différents parmi les $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_m$

$$\begin{array}{l} m=1 \\ m \geq 1 \end{array} \quad \begin{array}{l} \text{moment d'ordre } m \text{ de la vitesse} \\ \langle u_i(\underline{x}, t) u_j(\underline{x}, t) \dots u_m(\underline{x}, t) \rangle \end{array}$$

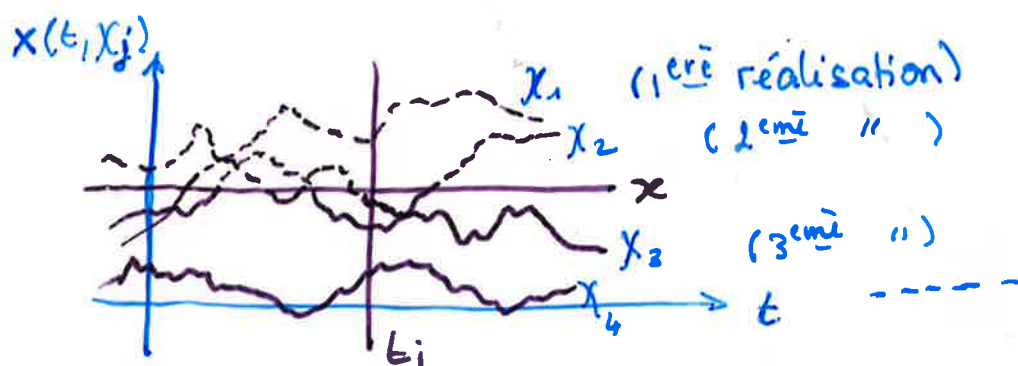
$$m=n=2 \quad \begin{array}{l} \text{covariance de la vitesse en 2 points} \\ \langle u_i(\underline{x}, t) u_j(\underline{x}', t') \rangle \end{array}$$

$$\begin{cases} m=3 \\ n=2 \end{cases} \quad \langle u_i(\underline{x}, t) u_j(\underline{x}, t) u_k(\underline{x}', t') \rangle$$

Application: processus stochastique

Soit $X(t, \omega)$, $t \in \mathbb{R}$, une famille de fonctions, une pour chaque événement ω .

→ Un processus stochastique est une v.a. dépendant du temps, notée $X(t)$, à laquelle on associe une pdf $f(x, t)$ et dont les moments dépendent a priori du temps



① à t_i fixé; $X(t_i, \omega) \equiv X_i$ est une v.a. de distribution (du 1^{er} ordre):

$$F(x, t_i) = \mathbb{P}\{X(t_i) \leq x\}. \quad (\text{dépend de } t)$$

$\leftarrow \{ \omega \mid X(t_i, \omega) \leq x \}$

densité du 1^{er} ordre:

$$f(x, t_i) = \frac{\partial F(x, t_i)}{\partial x}$$

distribution du 2^{ème} ordre: distribution jointe

$$F(x_1, x_2; t_1, t_2) = \mathbb{P}\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2\}$$

densité du 2^{ème} ordre:

$$f(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2}$$

un processus stochastique $X(t)$ est déterminé statistiquement (sauf cas pathologique) si on connaît les distributions du $n^{\text{ième}}$ ordre

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2, \dots, t_n) = P\{X(t_1) \leq x_1, \dots, X(t_n) \leq x_n\}$$

la pdf d'ordre n s'obtient par différenciation de F

→ en pratique, seulement certaines moyennes sont utilisées :

① moyenne $\eta(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x, t) dx = E\{X(t)\}$

② l'autocorrélation du processus $X(t)$

$$R(t_1, t_2) = E\{X(t_1)X(t_2)\}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 \underbrace{f(x_1, x_2; t_1, t_2)}_{\text{pdf jointe de } \begin{matrix} x_1 = X(t_1) \\ x_2 = X(t_2) \end{matrix}} dx_1 dx_2$$

$$t_1 = t_2 = t \quad R(t, t) = E\{X^2(t)\}$$

③ l'autovariance

$$C(t_1, t_2) = R(t_1, t_2) - \eta(t_1)\eta(t_2)$$

$$t_1 = t_2 = t \quad C(t, t) = V[X(t)] = \text{variance de } X(t).$$

stationnarité =

> au sens strict : $X(t)$ et $X(t+\epsilon)$ ont les mêmes statistiques à tous les ordres $\forall \epsilon$

i.e. : le processus $X(t)$ n'est pas affecté par un déplacement quelconque dans le temps

→ $f(x, t) = f(x)$ indépendante du temps

$E\{x(t)\} = \eta = \text{cte}$
et c'est vrai pour tous les ordres.

> au sens large ; seul $\eta = \text{cte}$ et $R(t_1, t_2) = R(t_1 - t_2)$

> processus à incréments stationnaires
si $Y(t) = x(t+h) - x(t)$ est stationnaire $\forall h$

(stationnarité \Rightarrow incréments stationnaires)

> Spectre de puissance pour un processus stationnaire

$$R(t_1, t_2) = R(t_1 - t_2) = R(\tau)$$

$$S(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

> exemple : le processus stationnaire $x'(t) = \frac{dx(t)}{dt}$

a } pour corrélation $R_{x'x'}(\tau) = -\frac{d^2 R_{xx}(\tau)}{d\tau^2}$

} pour spectre $S_{x'}(\omega) = \omega^2 S_x(\omega)$

en effet :

$$R_{x'x'}(t_1, t_2) = E \{ x'(t_1) x'(t_2) \}$$

or :

$$E \left\{ x(t_1) \left(\frac{x(t_2 + \epsilon) - x(t_2)}{\epsilon} \right) \right\} = \frac{1}{\epsilon} \left\{ R_{xx}(t_1, t_2 + \epsilon) - R_{xx}(t_1, t_2) \right\}$$

$\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} x'(t_2)$

$$\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} E [x(t_1) x'(t_2)] = R_{x'x'}(t_1, t_2) = \frac{\partial R_{xx}(t_1, t_2)}{\partial t_2}$$

de même

$$E \left[\frac{x(t_1 + \epsilon) - x(t_1)}{\epsilon} x'(t_2) \right] = \frac{1}{\epsilon} \left[R_{xx'}(t_1 + \epsilon, t_2) - R_{xx'}(t_1, t_2) \right]$$

$$\xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} R_{x'x'}(t_1, t_2) = \frac{\partial R_{xx'}(t_1, t_2)}{\partial t_1}$$

$$\text{donc } R_{x'x'}(t_1, t_2) = \frac{\partial^2 R_{xx}(t_1, t_2)}{\partial t_1 \partial t_2}$$

→ dans le cas stationnaire; $\tau = t_1 - t_2$; $d\tau = dt_1 = -dt_2$

$$R_{x'x'}(\tau) = - \frac{\partial^2 R_{xx}(\tau)}{\partial \tau^2} = - \frac{d^2 R_{xx}(\tau)}{d\tau^2}$$

$$\text{et } R_{xx}(\tau) = \int e^{i\omega\tau} S_x(\omega) d\omega \rightarrow \frac{d^2 R_{xx}(\tau)}{d\tau^2} = \int (i\omega)^2 e^{i\omega\tau} S_x(\omega) d\omega$$

$$R_{x'x'}(\tau) = \int e^{i\omega\tau} S_{x'}(\omega) d\omega$$

$$\rightarrow S_{x'}(\omega) = +\omega^2 S_x(\omega)$$

Symétries statistiques et stationnarité

par décalage en temps \longleftrightarrow stationnarité en temps
translation en espace \longleftrightarrow homogénéité
rotation \longleftrightarrow isotropie
+ parité \longleftrightarrow pleinement isotrope

* décalage en temps (Ω, \mathcal{A}, P)

Soit G_t une famille d'opérateurs sur Ω
dépendant d'un paramètre $t \geq 0$ (discret ou
continu) satisfaisant les propriétés:

$$G_0 = \text{Id} \quad G_t G_{t'} = G_{t+t'}$$

et conservant la probabilité

$$P(G_t^{-1}A) = P(A) \quad \forall t \geq 0 \text{ et } \forall A \in \mathcal{A}$$

définition = une fonction aléatoire $v(t, \omega)$ est
stationnaire en temps (ou G_t stationnaire)
si :

$$\forall t \text{ et } \forall \omega \in \Omega \quad v(t+h, \omega) = v(t, G_h \omega) \\ \forall h \geq 0.$$

exemple $v(\underline{x}, t, \underline{v}_0)$ solution de N.S. forcé par
une force indépendante du temps
 $\Omega =$ espace de toutes les C.I. possibles.
 $G_t : \underline{v}_0 \rightarrow v(t)$.

remarques : * si $v(t, \omega)$ est G_t stationnaire
alors $f(v(t, \omega))$ est aussi G_t stationnaire
(f ; fonction déterministe d'une variable)

* la somme de 2 fonctions G_t stationnaires est stationnaire

* quand ils existent, les moments d'une fonction aléatoire sont invariants par translation de tous leurs arguments :

$$\langle v(t_1+h) v(t_2+h) \dots v(t_m+h) \rangle = \langle v(t_1) \dots v(t_m) \rangle$$

démo.: $\int_{\Omega} v(t_1+h, \omega) \dots v(t_m+h, \omega) dP(\omega) = \int v(t_1, G_h \omega) \dots v(t_m, G_h \omega) dP(\omega)$

$$= \int_{\Omega} v(t_1, \omega') \dots v(t_m, \omega') dP(\omega') = \langle v(t_1) \dots v(t_m) \rangle$$

$\omega' = G_h \omega$ et conservation de P par G_h .

→ la fonction de corrélation

$$\langle v(t) v(t') \rangle = \Gamma(t-t') = \Gamma(\tau)$$

la variance

$$\langle v^2(t) \rangle = \Gamma(0) \text{ ne dépend pas de } t$$

* translation d'espace

$\{ G_{\underline{p}} \}$ tels que $v(\underline{x} + \underline{p}, t, \omega) = v(\underline{x}, t, G_{\underline{p}} \omega)$
et conservant la probabilité

si $\{ G_{\underline{p}} \}$ existe, alors $v(\underline{x}, t, \omega)$ est dite stationnaire en espace, ou, homogène.

i.e. = la densité jointe des valeurs de la vitesse

en m points $(\underline{x}_1 + \underline{y}_1, t_1) (\underline{x}_2 + \underline{y}_2, t_2) \dots (\underline{x}_m + \underline{y}_m, t_m)$
est indépendante de \underline{y} ; la densité de probabilité ne dépend pas de la position dans l'espace des m points mais de leur configuration relative.

exemple : $\langle v_i(\underline{x}, t) v_j(\underline{x}', t) \rangle = R_{ij}(\underline{x}' - \underline{x}) = R_{ij}(\underline{r})$

$$\underline{r} = \underline{x}' - \underline{x}$$

* rotation ; s'il existe $\{G_\theta\}$ ---- alors la turbulence est dite isotrope.

* rotation + invariance de parité = ---- alors pleinement isotrope.

$R_{ij}(\underline{r})$ ne dépend que de la longueur de \underline{r}

Résultats ergodiques.

Théorème ergodique de Birkhoff nous dit que, sur (Ω, \mathcal{G}, P) , si les seuls éléments de \mathcal{G} globalement invariants par $\{G_t\}$ sont de mesure nulle et unité (i.e. \emptyset et Ω), alors $\forall g$, fonction intégrable de Ω :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T g(G_t \omega) dt = \int_{\Omega} g(\omega) dP \equiv \langle g \rangle$$

*** pour une fonction aléatoire stationnaire en temps ;

$$\lim_{\underline{T} \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T v(t, \omega) dt = \langle v \rangle \quad \text{pour presque tout } \omega \text{ de } \Omega$$

* permet de remplacer la moyenne d'ensemble par la moyenne temporelle (à condition que le temps d'enregistrement soit suffisamment long), puisque pour une fonction stationnaire les quantités obtenues par moyenne d'ensemble sont indépendantes du temps

*** de même en espace, l'homogénéité permet de remplacer la moyenne d'ensemble sur un grand nombre de réalisations, par la moyenne sur une grande région de l'espace d'une seule réalisation.

$$\lim_{\underline{V} \rightarrow \infty} \frac{1}{\underline{V}} \int F(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) d\underline{y} = \langle F \rangle$$

avec $\left\{ \begin{array}{l} \underline{u}_1 = \underline{u}(x_1 + \underline{y}, t_1), \dots, \underline{u}_n = \underline{u}(x_n + \underline{y}, t_n) \\ \underline{V} \text{ volume en } \underline{y}; F \text{ une fonction.} \end{array} \right.$

Leçon 3 : Description statistique de la turbulence

★ **introduction**

★ **moyenne d'ensemble**

★ **turbulence homogène, isotrope, invariante de parité**
(ou symétrique de réflexion)

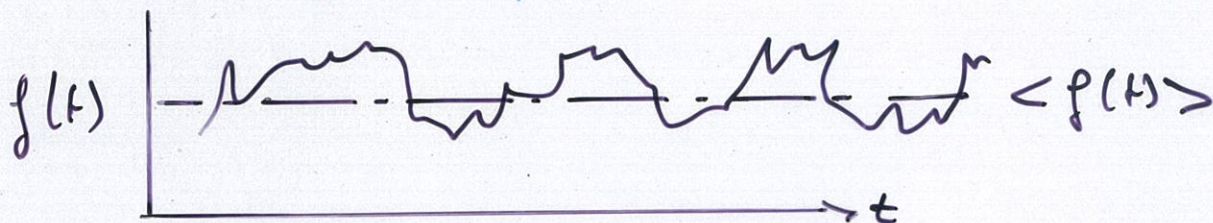
★ **hypothèse de Taylor**

★ **croissance de l'ensrophie en turbulence homogène**

★ **diffusion de Taylor**

Introduction

La turbulence est caractérisée par de grandes fluctuations de la vitesse et de la pression, apparemment aléatoires, en tout point \underline{x} de l'espace.



ex. de signal turbulent typique

→ si la source d'énergie est stable, et en ignorant les transitoires; l'écoulement possède un caractère "stationnairement aléatoire": i.e., bien qu'instable dans le détail (ses propriétés détaillées sont non-prédicibles) il est statistiquement stable (ses propriétés statistiques sont reproductibles).

décomposition du signal

$\underline{U}(\underline{x}) = \langle \underline{u}(\underline{x}, t) \rangle_t$ moyenne temporelle.

alors la fluctuation de la vitesse $\underline{u}'(\underline{x}, t)$ s'écrit

$$\underline{u}'(\underline{x}, t) = \underline{u}(\underline{x}, t) - \underline{U}(\underline{x})$$

(avec $\langle \underline{u}'(\underline{x}, t) \rangle_t = 0$)

On peut aussi construire d'autres quantités moyennes:

$$k(\underline{x}) = \frac{1}{2} \langle \underline{u}'^2 \rangle_t; \quad \varepsilon(\underline{x}) = 2\nu \langle (\partial_j u'_i + \partial_i u'_j)^2 \rangle_t \leftarrow$$

Un des buts de la théorie de la turbulence est de déterminer ces champs (géométrie, source d'énergie) et toutes les propriétés statistiques de l'écoulement.

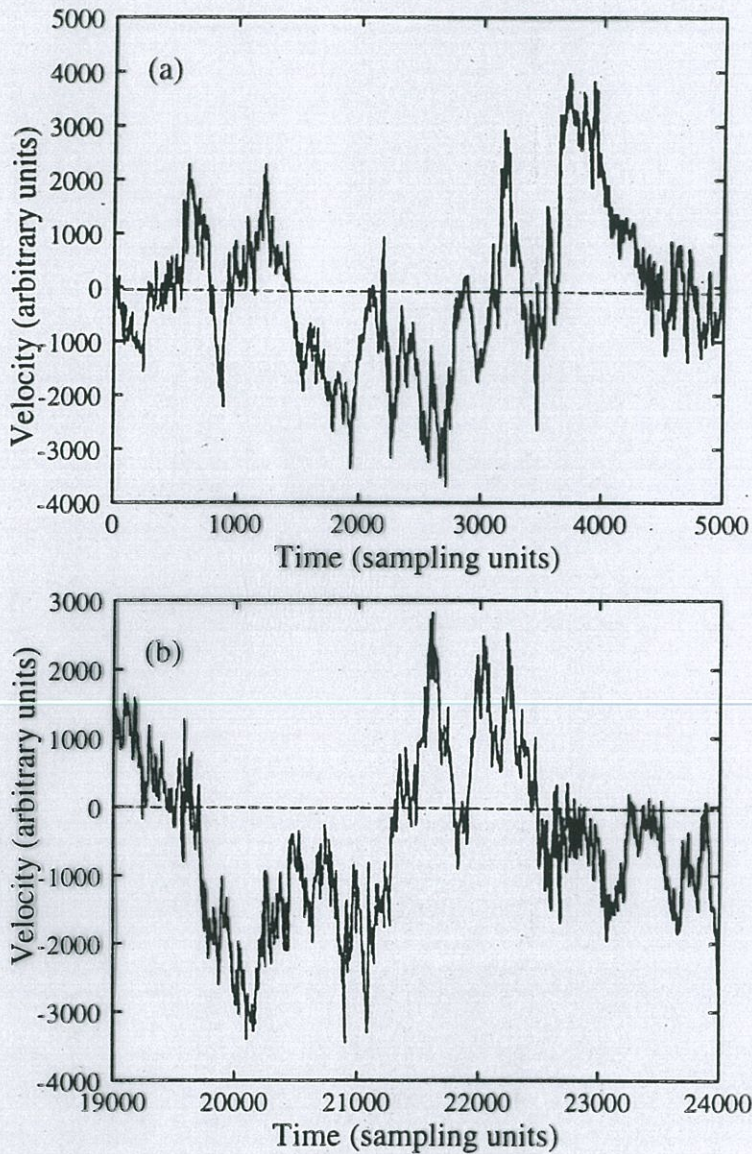
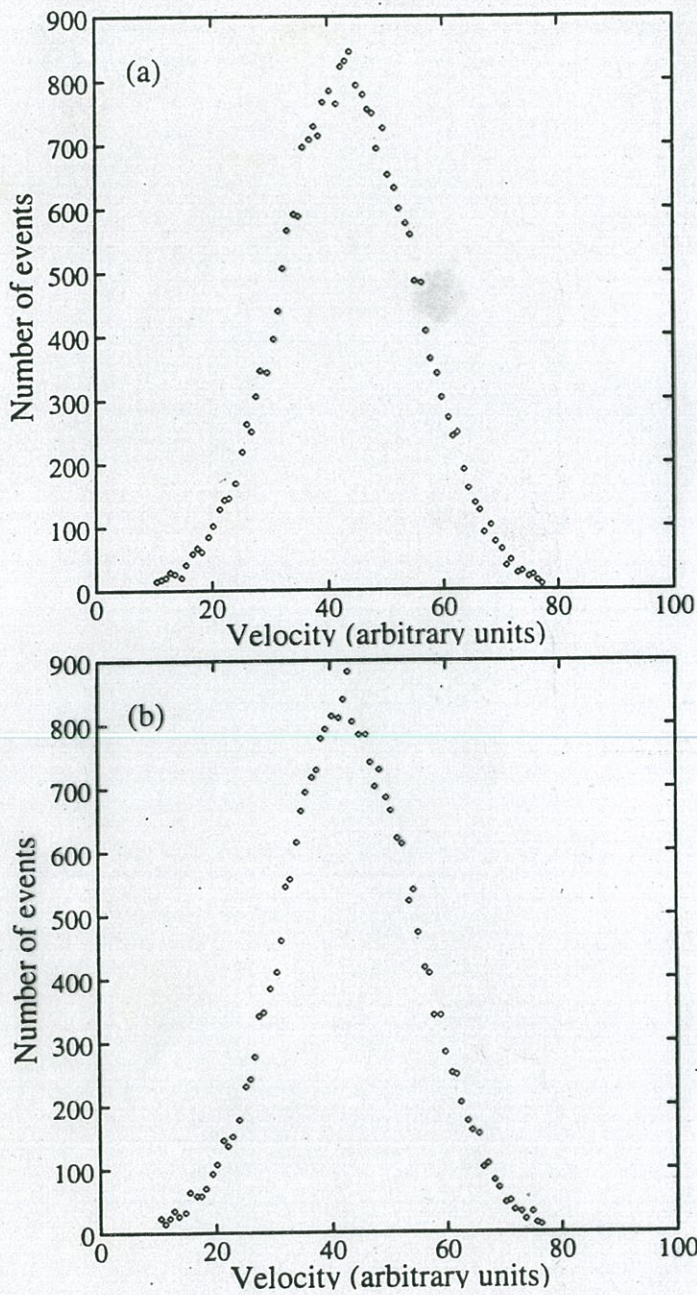


Fig. 3.1. One second of a signal recorded by a hot-wire (sampled at 5 kHz) in the S1 wind tunnel of ONERA (a); same signal, about four seconds later (b). Courtesy Y. Gagne and E. Hopfinger.

l'aspect général du signal en (a) et (b) est semblable mais diffère dans le détail et ne peut être prédit de (a) à (b).



quelques
minutes
plus tard.

Fig. 3.3. Histogram for same signal as in Fig. 3.1(a), sampled 5000 times over a time-span of 150 seconds (a); same histogram, a few minutes later (b).

Les 2 histogrammes des signaux
"précédents" sont essentiellement identiques.

Moyenne d'ensemble

On considère \underline{u} comme une fonction aléatoire en position \underline{x} et en temps t : en 1 point donné (\underline{x}, t) de l'espace-temps, \underline{u} n'est pas prédictible mais prend des valeurs aléatoires et on suppose que les lois aléatoires décrivant les fluctuations de vitesse sont elles déterminées par les données du problème.

Pour une réalisation, i.e. une expérience, on mesure \underline{u} en tout point et tout instant.

La "même" expérience (i.e. mêmes conditions initiales, forçage, limites) répétée plusieurs fois va donner autant de valeurs différentes de $\underline{u}(\underline{x}, t)$.

On définit l'écoulement turbulent comme étant tel que, quand le nombre d'expériences est ∞ , ou très grand N , la fréquence de distribution de \underline{u} tend vers une forme déterminée par les données apparentes du problème (i.e. C.I., force, C.L.)

→ on introduit la moyenne d'ensemble

$$\underline{U}(\underline{x}, t) = \langle \underline{u}(\underline{x}, t) \rangle_N$$

→ plus de problème de stationnarité statistique

Si $\underline{u}(\underline{x}, t)$ est une fonction aléatoire

stationnaire en temps ; alors $\underline{u}(\underline{x}, t)$ est indépendante de t , la théorie ergodique nous dit que (sous certaines conditions) : la moyenne d'ensemble et la moyenne temporelle donne en fait le même résultat.

Turbulence homogène : (1)

turbulence statistiquement stationnaire par rapport aux 3 coordonnées d'espace : toutes les propriétés statistiques (toutes les quantités obtenues par moyenne d'ensemble) de la turbulence sont invariantes d'espace par n'importe quelle translation.

en pratique :

- écoulement homogène en x

soit la corrélation $R \equiv \langle u(x, y, z) u(x+r_1, y+r_2, z+r_3) \rangle$
par invariance statistique par translation en x : on a

$$R = \langle u(x', y, z) u(x'+r_1, y+r_2, z+r_3) \rangle$$

$\Rightarrow R(y, z, r_1, r_2, r_3)$ indépendant de x .

- turbulence homogène :

ex. : $R_{ij} \equiv \langle u_i(\underline{x}) u_j(\underline{x} + \underline{r}) \rangle = R_{ij}(\underline{r})$

(tenseur des corrélations des vitesses).

R_{ij} ne dépend pas de \underline{x} et $\underline{x} + \underline{r}$ mais de leur configuration relative i.e. de \underline{r}

Remarques :

1) Le fait que toutes les régions de l'espace soient "similaires" (du point de vue des propriétés statistiques de \underline{u}), suggère (théorie ergodique) que tous les résultats obtenus par moyenne d'ensemble peuvent être aussi bien obtenus en moyennant sur une très grande région de l'espace d'1 seule réalisation.

2) utilisation de l'homogénéité :

$$\begin{aligned} \langle u_i(\underline{x}) \frac{\partial u_i}{\partial x_j}(\underline{x}) \rangle &= \frac{1}{2} \langle \frac{\partial u_i^2(\underline{x})}{\partial x_j} \rangle \\ &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_j} \underbrace{\langle u_i^2(\underline{x}) \rangle}_{\text{indépendant de } \underline{x}} = 0 \end{aligned}$$

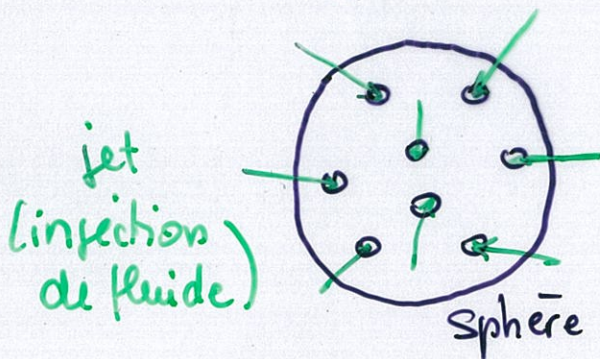
Turbulence isotrope (2)

La turbulence est dite isotrope si toutes ses propriétés statistiques sont les mêmes dans toutes les directions : toutes les moyennes d'ensemble sont les mêmes par rotations du référentiel.

Turbulence symétrique de réflexion: (3)

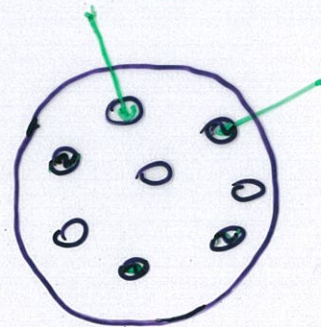
Invariance des propriétés statistiques par changement de référentiel droit à gauche (transformations de parité)

exemple:



à l'intérieur de la sphère
turbulence homogène,
isotrope, sym. de réflexion

utilisation de l'hélicité



homogène, isotrope,
pas de sym. de réflexion

en pratique:

turbulence homogène
pleinement isotrope
(1) + (3)

$$R_{ij} = \langle u_i(\underline{x}) u_j(\underline{x}') \rangle$$

$$= R_{ij}(\underline{r}) = R_{ij}(r)$$

ne dépend que de
 $r = |\underline{r}|$ (module de \underline{r})

pas de partie anti-symétrique

turbulence homogène
isotrope sans symétrie
de réflexion
(2)

$R_{ij}'(r)$
a une partie
antisymétrique

Résultats ergodiques.

Théorème ergodique de Birkhoff nous dit que, sur (Ω, \mathcal{A}, P) , si les seuls éléments de \mathcal{A} globalement invariants par $\{G_t\}$ sont de mesure nulle et unité (i.e. \emptyset et Ω), alors $\forall g$, fonction intégrable de Ω :

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T g(G_t \omega) dt = \int_{\Omega} g(\omega) dP \equiv \langle g \rangle$$

*** pour une fonction aléatoire stationnaire en temps;

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T v(t, \omega) dt = \langle v \rangle \quad \text{pour presque tout } \omega \text{ de } \Omega$$

* permet de remplacer la moyenne d'ensemble par la moyenne temporelle (à condition que le temps d'enregistrement soit suffisamment long), puisque pour une fonction stationnaire les quantités obtenues par moyenne d'ensemble sont indépendantes du temps

*** de même en espace, l'homogénéité permet de remplacer la moyenne d'ensemble sur un grand nombre de réalisations, par la moyenne sur une grande région de l'espace d'une seule réalisation.

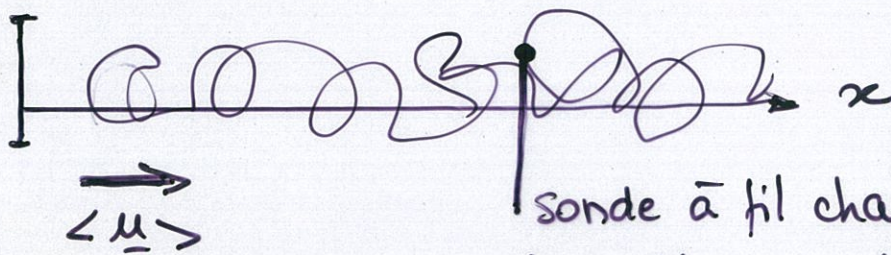
$$\lim_{V \rightarrow \infty} \frac{1}{V} \int_V F(\underline{u}_1, \underline{u}_2, \dots, \underline{u}_n) d\underline{y} = \langle F \rangle$$

avec $\left\{ \begin{array}{l} \underline{u}_1 = \underline{u}(x_1 + \underline{y}, t_1), \dots, \underline{u}_n = \underline{u}(x_n + \underline{y}, t_n) \\ V \text{ volume en } \underline{y}; F \text{ une fonction.} \end{array} \right.$

puisque par homogénéité, toutes les régions de l'espace sont similaires autant que les propriétés statistiques de $\underline{\mu}$ soient concernées

(il faut que la limite existe, $V \rightarrow \infty$, et indépendante de la définition du volume V).

Hypothèse de Taylor



sonde à fil chaud
(sensible au module de la
vitesse sur la sonde)

> un écoulement avec une vitesse moyenne $\langle \underline{u} \rangle \equiv \underline{U}$
importante.

soit \underline{u} la vitesse sur la sonde

\underline{u}^T les fluctuations turbulentes de vitesse
(mesurées dans le référentiel de l'écoulement
moyen).

$$\underline{u}(x, t) = \underline{u}^T(x - \underline{U}t, t) + \underline{U}$$

le taux de turbulence de l'écoulement est défini par:

$$\tau = \frac{(\underline{u}^T)_{rms}}{|\underline{U}|} = \frac{\sqrt{\langle (\underline{u}^T)^2 \rangle}}{|\langle \underline{u} \rangle|}$$

> si τ est faible ($\tau \ll 1$); on a 2 simplifications:

1> la sonde mesure en fait les fluctuations
longitudinales de la vitesse

$$\underline{u}^T = \underline{u}^T_{\parallel} + \underline{u}^T_{\perp}, \quad \underline{u}^T_{\perp} \cdot \underline{U} = 0$$

$$\underline{u}^2 = (\underline{U} + \underline{u}^T_{\parallel} + \underline{u}^T_{\perp})^2 = \underline{U}^2 + 2\underline{U} \cdot \underline{u}^T_{\parallel} + \underbrace{(\underline{u}^T_{\parallel})^2 + (\underline{u}^T_{\perp})^2}_{\sim (\underline{u}^T_{rms})^2}$$

$+ 2\underline{U} \cdot \underline{u}^T_{\perp} = 0$

→ contribution en τ^2 de \underline{u}^T_{\perp}

$$\sim \tau^2 \underline{U}^2$$

2> par invariance galiléenne, les mesures temporelles en un point x fixé peuvent être ramenées à des mesures spatiales à t fixé.

soit u le signal mesuré (composante de la vitesse // à l'axe des x , le long de l'écoulement moyen)

$$u(x, t) = \underbrace{u^T(x - vt, t)}_{\substack{\text{vitesse mesurée} \\ \text{dans le référentiel} \\ \text{du laboratoire}}} + \underbrace{U}_{\substack{\text{écoulement} \\ \text{moyen.}}} \quad (U = |\underline{v}|)$$

vitesse mesurée dans le référentiel de l'écoulement moyen

$$\bullet \quad \frac{\partial u}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial u^T}{\partial t}}_{\sim \frac{u^T_{rms}}{\tau}} - v \underbrace{\frac{\partial u^T}{\partial x}}_{\sim v \cdot \frac{u^T_{rms}}{\ell} \sim v \frac{u^T_{rms}}{u^T_{rms} \tau} \sim \frac{v}{\tau}}$$

$\rightarrow \frac{\partial u^T}{\partial t}$ négligé si $u^T_{rms} \ll v$ (i.e. $\tau \ll 1$)

$$\bullet \quad u(x, t + \delta t) - u(x, t) = \delta t \frac{\partial u}{\partial t} + \dots$$

$$= \delta t \left[\frac{\partial u^T}{\partial t} - v \frac{\partial u^T}{\partial x} \right] + \dots$$

hypothèse de Taylor = si l'intervalle de mesure n'est pas trop long, on considère la turbulence figée dans le repère mobile ($\partial u^T / \partial t$ négligé)

$$u(x, t + \delta t) - u(x, t) \sim \delta t \left[-v \frac{(u^T(x' + \delta \ell) - u^T(x'))}{\delta \ell} \right]$$

avec $x' = x - vt$ et $x' + \delta \ell = x - v(t + \delta t)$

$$\rightarrow \delta \ell = -v \delta t$$

on a alors la correspondance :

$$u(t + \delta t) - u(t) \leftrightarrow \begin{aligned} &u^T(x + \delta l) - u^T(x) \\ &u''(x + \delta l) - u''(x) \end{aligned}$$

(puisque en fait c'est u'' qui est mesurée).

L avec $\delta l = -v \delta t$

Croissance de l'enstrophie $\Omega(t) = \frac{1}{2} \langle \underline{\omega}^2 \rangle$ en turbulence homogène

Quand $\nu \approx 0$, les lignes de vorticité brougent avec le fluide et sont étirées, on peut donc s'attendre à ce que l'enstrophie croisse par ce mécanisme

* Equation pour la vorticité :

$$\partial_t \underline{\omega} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{\omega} = (\underline{\omega} \cdot \nabla) \underline{u} - \nu \nabla \times (\nabla \times \underline{\omega})$$

$$\underline{\omega} \cdot \partial_t \underline{\omega} + \underline{\omega} \cdot (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{\omega} = \underline{\omega} \cdot (\underline{\omega} \cdot \nabla) \underline{u} - \nu \underline{\omega} \cdot \nabla \times (\nabla \times \underline{\omega})$$

$$\frac{1}{2} \partial_t \underline{\omega}^2 + \nabla \cdot \left(\frac{\underline{\omega}^2}{2} \underline{u} \right) = \underline{\omega} \cdot (\underline{\omega} \cdot \nabla) \underline{u} - \nu \left[-\nabla \cdot (\underline{\omega} \times (\nabla \times \underline{\omega})) + (\nabla \times \underline{\omega})^2 \right]$$

(en utilisant $\nabla \cdot (\underline{A} \times \underline{B}) = \underline{B} \cdot \nabla \times \underline{A} - \underline{A} \cdot \nabla \times \underline{B}$ avec $\underline{A} = \underline{\omega}$
 $\underline{B} = \nabla \times \underline{\omega}$)

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{d}{dt} \left\langle \frac{1}{2} \underline{\omega}^2 \right\rangle = - \overbrace{\left\langle \nabla \cdot \left(\frac{\underline{\omega}^2}{2} \underline{u} \right) \right\rangle}^{=0} + \left\langle \underline{\omega} \cdot (\underline{\omega} \cdot \nabla) \underline{u} \right\rangle$$
$$\left\{ \begin{array}{l} + \nu \underbrace{\left\langle \nabla \cdot (\underline{\omega} \times \nabla \times \underline{\omega}) \right\rangle}_{=0} - \nu \left\langle (\nabla \times \underline{\omega})^2 \right\rangle \end{array} \right.$$

(par homogénéité)

* On obtient :

$$\frac{d\Omega}{dt} = \left\langle \underline{\omega} \cdot (\underline{\omega} \cdot \nabla) \underline{u} \right\rangle - \nu \left\langle (\nabla \times \underline{\omega})^2 \right\rangle$$

augmentation de Ω par étirement de la vorticité
(corrélation triple)

Remarque fermeture :

Si on voulait obtenir une équation exacte pour l'évolution temporelle de la corrélation triple, elle ferait intervenir une corrélation d'ordre 4 ... et ainsi de suite.

Il y a toujours plus d'inconnues que d'équations !

→ le problème de fermeture en turbulence :
pour fermer le problème, il faut faire des hypothèses (physiques !) reliant la corrélation d'ordre $(n+1)$ à celles d'ordre plus élevé.

Hypothèse des plus simples (dimensionnellement correcte)

$$\langle \underline{\omega} \cdot (\underline{\omega} \cdot \nabla) \underline{u} \rangle = \alpha \langle \frac{1}{2} \underline{\omega}^2 \rangle^{3/2}$$

↑
un nombre > 0

pour $\nu = 0$:

$$\frac{d\Omega}{dt} = \alpha \langle \frac{1}{2} \underline{\omega}^2 \rangle^{3/2} = \alpha \Omega^{3/2}$$

$$\frac{d\Omega}{\Omega^{3/2}} = \alpha dt ; \quad \Omega^{1/2}(t) = \frac{2}{\alpha(t_0 - t)}$$

i.e. $\left\{ \begin{array}{l} \Omega(t) = \frac{4}{\alpha^2(t_0 - t)^2} \end{array} \right.$

avec t_0 déterminé par $\Omega(t=0) : t_0 = \frac{2}{\alpha} \Omega_0^{-1/2}$

Donc ; quand $t \rightarrow t_0$ $\Omega(t) \rightarrow \infty$

effet "catastrophique" de l'étirement de $\underline{\omega}$ par $\nabla \underline{u}$ ("explosion" en temps fini)

En fait : * un artefact dans l'hypothèse ?
* une propriété caractéristique des équations d'Euler ($\nu = 0$). ?

Diffusion de Taylor :

La turbulence a un effet important sur la diffusion des particules : elles diffusent plus rapidement en présence de turbulence

à $t=0$; une particule est mise en $\underline{a}=0$

à t ; elle est en $\underline{x} = \underline{x}(t)$ avec une vitesse $\underline{v}^L(t) = \frac{d\underline{x}}{dt}$ lagrangienne

Alors :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \langle x_i x_j \rangle &= \left\langle \frac{dx_i}{dt} x_j + x_i \frac{dx_j}{dt} \right\rangle = \langle v_i^L x_j + v_j^L x_i \rangle \\ &= \int_0^t \langle v_i^L(t) v_j^L(t') + v_j^L(t) v_i^L(t') \rangle dt' \end{aligned}$$

Si la turbulence est stationnaire en moyenne :

$$\langle v_i^L(t) v_j^L(t') \rangle \equiv R_{ij}^L(t'-t) = R_{ij}^L(\tau) \\ (\tau \equiv t'-t)$$

donne :

$$\frac{d}{dt} \langle x_i x_j \rangle = \int_0^t [R_{ij}^L(\tau) + R_{ji}^L(\tau)] d\tau$$

en particulier :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{d}{dt} \langle \underline{x}^2 \rangle = 2 \int_0^\infty R_{ii}^L(\tau) d\tau \equiv 2 \langle \underline{u}^2 \rangle t_L \equiv 2D$$

en supposant que R_{ii} décroît suffisamment rapidement ($t \rightarrow \infty$) pour que l'intégrale converge

par définition de t_L ; un temps de corrélation lagrangien.

Ce qui donne :

$$\frac{d}{dt} \langle \underline{x}^2 \rangle \simeq 2 D \quad \text{quand } t \rightarrow \infty$$

↑ un coefficient
de diffusion.

Soit: $\langle \underline{x}^2 \rangle \simeq 2 D t$ quand $t \rightarrow \infty$

en pratique: $t \rightarrow \infty$ signifie $t \gg t_L$
 t_L est le temps pendant lequel
la particule a une mémoire de
ses conditions d'injection.

Leçon 4 : Description spectrale de la turbulence

- ★ le tenseur spectral en turbulence homogène
- ★ la forme du tenseur spectral en turbulence isotrope
- ★ les fonctions spectrales de l'énergie et de l'hélicité
- ★ le spectre de vorticité
- ★ la forme du tenseur spectral près de $\underline{k}=0$

Théorème de Crámer sur la corrélation: (1940)

Une condition nécessaire et suffisante pour que $R_{ij}(\underline{r})$ soit le tenseur de corrélation d'un

processus (fonction) aléatoire stationnaire (en espace) est qu'il s'écrive:

$$R_{ij}(\underline{r}) = \langle u_i(\underline{x}) u_j(\underline{x} + \underline{r}) \rangle = \int_{\mathcal{K}} \phi_{ij}(\underline{k}) e^{i \underline{k} \cdot \underline{r}} d\underline{k}$$

$(d\underline{k} = dk_1 dk_2 dk_3)$

avec $\phi_{ij}(\underline{k})$ tenseur complexe tel que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\mathcal{K}} |\phi_{ij}(\underline{k})| d\underline{k} < \infty. \\ \Phi = x_i x_j^* \phi_{ij}(\underline{k}) \text{ forme quadratique } \geq 0 \\ (\phi \geq 0 \forall \underline{x} \in \mathbb{C}). \end{array} \right.$$

\Rightarrow c'est une généralisation au cas tridimensionnel du théorème de Wiener-Khinchine

"la densité spectrale d'énergie d'un signal est la transformée de Fourier de sa fonction de corrélation"

Spectre d'une fonction aléatoire stationnaire.

Soit une fonction aléatoire stationnaire (en espace)
 $f(x)$ d'1 seule variable x , sa transformée de
 Fourier est définie par :

$$\hat{f}(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-ikx} dx \quad \begin{matrix} f(x) \in \mathbb{R} \\ x \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

Considérons la quantité $\langle \hat{f}^*(k) \hat{f}(k') \rangle$

$$\langle \hat{f}^*(k) \hat{f}(k') \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \left\langle \iint_{-\infty}^{+\infty} f(x) f(x') e^{i(kx - k'x')} dx dx' \right\rangle$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint \langle f(x) f(x') \rangle e^{i(kx - k'x')} dx dx'$$

$\langle \dots \rangle$ restreint à

la partie aléatoire de l'intégrale

$$= \frac{1}{(2\pi)^2} \iint R(x) e^{-ik'x} e^{i(k-k')x} dx dx'$$

avec $\begin{cases} x' = x + r \\ R(r) = \langle f(x) f(x+r) \rangle \end{cases}$ fonction de
 corrélation de f stationnaire en espace

$$\langle \hat{f}^*(k) \hat{f}(k') \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{+\infty} \underbrace{e^{i(k-k')x} dx}_{2\pi \delta(k-k')} R(x) e^{-ik'x} dx$$

$$= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) e^{-ik'x} dx \right] \delta(k-k')$$

$\equiv \phi(k)$ transformée de Fourier de $R(x)$

$$\Rightarrow \langle \hat{f}^*(k) \hat{f}(k') \rangle = \phi(k) \delta(k-k')$$

remarques = $\phi(k) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} R(\tau) e^{-ik\tau} d\tau$

* $\phi(k)$ converge si pour $\varepsilon > 0$ $R(\tau) = O(\tau^{-(1+\varepsilon)})$
quand $\tau \rightarrow \infty$

* $\phi(k)$ fonction spectrale de $f(x)$

* $R(\tau)$ étant réel; $\phi^*(k) = \phi(-k)$

* formule inverse $R(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k) e^{ik\tau} dk$

* $\langle f^2 \rangle = R(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \phi(k) dk = \int_0^{\infty} \underbrace{2 E(k)}_{(*)} dk$
avec $E(k) = \text{Re } \phi(k)$

$E(k)$ fonction spectrale de "l'énergie" $\frac{1}{2} \langle f^2 \rangle$

(*) interprétation: contribution à $\frac{1}{2} \langle f^2 \rangle$ de l'intervalle $(k, k+dk)$

$$\sum_{i=0}^n E(k_i) \underbrace{(k_{i+1} - k_i)}_{dk} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} E(k) dk.$$

$(i=0; k_i=0 \dots i=n; k_n=m)$

Le spectre tensoriel en turbulence homogène

Considérons $\underline{u}(\underline{x}, t)$ un champ de vitesse en turbulence homogène, de moyenne nulle $\langle \underline{u} \rangle = 0$

On oublie ici la dépendance explicite en temps, car on s'intéresse à la structure instantanée du champ de vitesse.

- On définit la transformée de Fourier formelle de $\underline{u}(\underline{x})$ à chaque instant :

$$\hat{\underline{u}}(\underline{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \underline{u}(\underline{x}) e^{-i\underline{k} \cdot \underline{x}} d\underline{x} = \hat{\underline{u}}^*(-\underline{k})$$

avec $\underline{k} = (k_1, k_2, k_3)$ vecteur d'onde

$$d\underline{x} = dx_1 dx_2 dx_3$$

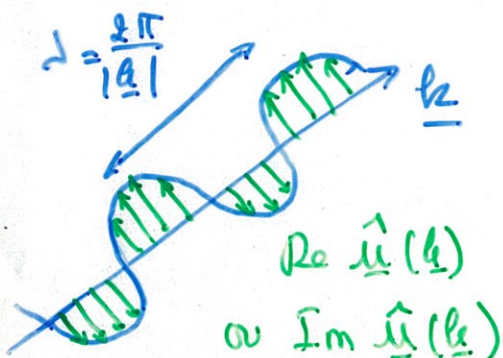
$$\int ; \text{intégrale de volume triple} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty}$$

- Transformée de Fourier Inverse :

$$\underline{u}(\underline{x}) = \int \hat{\underline{u}}(\underline{k}) e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}} d\underline{k}$$

- $\nabla \cdot \underline{u}(\underline{x}) = 0 \quad \forall \underline{x} \implies \underline{k} \cdot \hat{\underline{u}}(\underline{k}) = 0 \quad \forall \underline{k}$

→ la décomposition de Fourier de \underline{u} est donc une décomposition en ondes transverses.



• Le spectre tensoriel de $\underline{u}(\underline{x})$; $\Phi_{ij}(\underline{k})$

[la transformée de Fourier du tenseur de corrélation de \underline{u}

$$\begin{aligned} \langle \hat{u}_i^*(\underline{k}) \hat{u}_j(\underline{k}') \rangle &= \frac{1}{(2\pi)^6} \langle \iint u_i(\underline{x}) u_j(\underline{x}') e^{i\underline{k} \cdot \underline{x}} e^{-i\underline{k}' \cdot \underline{x}'} d\underline{x} d\underline{x}' \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi)^6} \iint \underbrace{\langle u_i(\underline{x}) u_j(\underline{x}') \rangle}_{R_{ij}(\underline{r})} e^{i(\underline{k} \cdot \underline{x} - \underline{k}' \cdot \underline{x}')} d\underline{x} d\underline{x}' \end{aligned}$$

où $\langle . \rangle$ restreint à la partie aléatoire de l'intégrand

$$= \frac{1}{(2\pi)^6} \iint R_{ij}(\underline{r}) e^{i(\underline{k} \cdot \underline{x} - \underline{k}' \cdot \underline{x}')} d\underline{x} d\underline{x}'$$

avec $\underline{x}' = \underline{x} + \underline{r}$

$$d\underline{x}' = d\underline{x}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^6} \iint R_{ij}(\underline{r}) e^{i(\underline{k} - \underline{k}') \cdot \underline{x}} e^{-i\underline{k}' \cdot \underline{r}} d\underline{x} d\underline{r}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^6} \int \left(\int R_{ij}(\underline{r}) e^{-i\underline{k}' \cdot \underline{r}} d\underline{r} \right) e^{i(\underline{k} - \underline{k}') \cdot \underline{x}} d\underline{x}$$

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \underbrace{\left[\int R_{ij}(\underline{r}) e^{-i\underline{k}' \cdot \underline{r}} d\underline{r} \right]}_{\equiv \Phi_{ij}(\underline{k}')} \delta(\underline{k} - \underline{k}')$$

avec $\frac{1}{(2\pi)^3} \int e^{i(\underline{k} - \underline{k}') \cdot \underline{x}} d\underline{x} = \delta(\underline{k} - \underline{k}')$ fonction de Dirac 3D

$$\Rightarrow \langle \hat{u}_i^*(\underline{k}) \hat{u}_j(\underline{k}') \rangle = \Phi_{ij}(\underline{k}) \delta(\underline{k} - \underline{k}')$$

$$\left[\Phi_{ij}(\underline{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int R_{ij}(\underline{r}) e^{-i\underline{k} \cdot \underline{r}} d\underline{r} \right.$$

$$\left. \text{et } R_{ij}(\underline{r}) = \langle u_i(\underline{x}) u_j(\underline{x} + \underline{r}) \rangle \right]$$

Propriétés de la corrélation et du spectre tensoriel

1) homogénéité

$$R_{ij}(\underline{r}) = R_{ji}(-\underline{r}) \longrightarrow \Phi_{ij}^*(\underline{k}) = \Phi_{ij}(-\underline{k}) = \Phi_{ji}(\underline{k}) \quad (\forall \underline{k})$$

$$R_{ij}(\underline{r}) = \langle u_i(\underline{x}) u_j(\underline{x} + \underline{r}) \rangle = \langle u_i(\underline{x}' - \underline{r}) u_j(\underline{x}') \rangle \quad ; \quad \underline{x}' = \underline{x} + \underline{r}$$

$$\stackrel{h}{=} \langle u_i(\underline{x} - \underline{r}) u_j(\underline{x}) \rangle$$

$$= R_{ji}^*(-\underline{r})$$

$$\Phi_{ij}^*(\underline{k}) = \Phi_{ij}(-\underline{k}) = \frac{1}{8\pi^3} \int R_{ij}(\underline{r}) e^{i\underline{k} \cdot \underline{r}} d\underline{r} = \frac{1}{8\pi^3} \int R_{ji}(-\underline{r}) e^{-i\underline{k} \cdot (-\underline{r})} d\underline{r}$$

$$(\underline{r}' = -\underline{r}) \quad = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{ji}(\underline{r}') e^{-i\underline{k} \cdot \underline{r}'} (-d\underline{r}')$$

$$= \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{+\infty} R_{ji}(\underline{r}') e^{-i\underline{k} \cdot \underline{r}'} d\underline{r}' = \Phi_{ji}(\underline{k})$$

2) incompressibilité

$$\frac{\partial R_{ij}(\underline{r})}{\partial r_j} = \frac{\partial R_{ij}(\underline{r})}{\partial r_i} = 0 \longrightarrow k_j \Phi_{ij}(\underline{k}) = k_i \Phi_{ij}(\underline{k}) = 0 \quad (\forall \underline{k})$$

$$\langle u_i(\underline{x}) \frac{\partial u_j(\underline{x}')}{\partial x'_j} \rangle = 0 = \langle \frac{\partial}{\partial x'_j} (u_i(\underline{x}) u_j(\underline{x}')) \rangle$$

$$(\underline{x}' = \underline{x} + \underline{r}) \quad 0 = \frac{\partial}{\partial r_j} \langle u_i(\underline{x}) u_j(\underline{x} + \underline{r}) \rangle = \frac{\partial R_{ij}(\underline{r})}{\partial r_j}$$

$$\frac{\partial R_{ij}(\underline{r})}{\partial r_j} = 0 = \int \Phi_{ij}(\underline{k}) i k_j e^{i\underline{k} \cdot \underline{r}} d\underline{k} = 0 \quad \forall \underline{r}$$

$$\longrightarrow k_j \Phi_{ij}(\underline{k}) = 0$$

3) remarques :

$$R_{ij}(\underline{r}) = \int \phi_{ij}(\underline{k}) e^{i\underline{k} \cdot \underline{r}} d\underline{k}$$

- On suppose que $\underline{u}(\underline{x})$ est une fonction continue de \underline{x} , en présence de viscosité

$$\lim_{\underline{h} \rightarrow 0} \langle u_i(\underline{x}) [u_j(\underline{x} + \underline{h}) - u_j(\underline{x})] \rangle = 0$$

$$\text{i.e. } \lim_{\underline{h} \rightarrow 0} [R_{ij}(\underline{x} + \underline{h}) - R_{ij}(\underline{x})] = 0$$

i.e. $R_{ij}(\underline{x})$ est continue pour tout \underline{x}

- $$R_{ij}(\underline{x}) = \langle u_i(\underline{x}) u_j(\underline{x} + \underline{h}) \rangle \leq \left[\langle u_i(\underline{x})^2 \rangle \langle u_j(\underline{x} + \underline{h})^2 \rangle \right]^{1/2}$$
$$R_{ij}(\underline{x}) \leq [R_{ii}(0) \cdot R_{jj}(0)]^{1/2}$$

(sans sommation sur les indices, ici)

en particulier $i=j$ $R_{ij}(\underline{x}) \leq R_{ii}(0)$.

- $$R_{ij}(0) = \langle u_i(\underline{x}) u_j(\underline{x}) \rangle = \int \phi_{ij}(\underline{k}) d\underline{k}$$

$\phi_{ij}(\underline{k})$ peut être considérée comme une densité dans l'espace spectral, des contributions

$$\text{à } \langle u_i(\underline{x}) u_j(\underline{x}) \rangle.$$

4) décomposition de $\phi_{ij}(\underline{k})$:

on peut décomposer en parties symétrique $\phi_{ij}^{(s)}$ et antisymétrique $\phi_{ij}^{(a)}$;

$$\phi_{ij}(\underline{k}) = \underbrace{\phi_{ij}^{(s)}(\underline{k})}_{\text{réel}} + \underbrace{\phi_{ij}^{(a)}(\underline{k})}_{\text{imaginaire pur}}$$

(1) \longrightarrow

$$\begin{aligned} \phi_{ij}^*(\underline{k}) &= \phi_{ij}^{(s)*}(\underline{k}) + \phi_{ij}^{(a)*}(\underline{k}) \\ &= \phi_{ji}(\underline{k}) = \phi_{ji}^{(s)}(\underline{k}) + \phi_{ji}^{(a)}(\underline{k}) \\ &= \phi_{ij}^{(s)}(\underline{k}) - \phi_{ij}^{(a)}(\underline{k}) \end{aligned}$$

expression de la partie antisymétrique $\phi_{ij}^{(a)}$

$\phi_{ij}^{(a)}$ peut s'écrire :

$$\phi_{ij}^{(a)}(\underline{k}) = i \epsilon_{ijm} P_m(\underline{k})$$

où \underline{P} est un pseudo-vecteur réel, et

$$P_m(\underline{k}) = -\frac{1}{2} i \epsilon_{ijm} \phi_{ij}^{(a)}$$

(en utilisant $\epsilon_{ije} \epsilon_{ijm} = 2 \delta_{em}$)

$$\text{or } (2) \Rightarrow k_i \phi_{ij}^{(s)} = 0 \text{ et } k_i \phi_{ij}^{(a)} = 0$$

$$\begin{aligned} k_i \phi_{ij}^{(a)}(\underline{k}) = 0 &= i k_i \epsilon_{ijm} P_m(\underline{k}) \\ &= -i \epsilon_{jim} k_i P_m(\underline{k}) \\ &= -i \underline{k} \wedge \underline{P} \Big|_j \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{k} \wedge \underline{P} = 0 \Rightarrow \underline{P} \parallel \underline{k}$$

\Rightarrow on peut donc écrire ; $\underline{P} = \underline{k} f(\underline{k})$
avec $f(\underline{k})$ un pseudo-scalaire réel.

Donc, finalement on peut écrire $\phi_{ij}(\underline{k})$

$$\phi_{ij}(\underline{k}) = \phi_{ij}^{(s)}(\underline{k}) + i \varepsilon_{ijm} k_m f(\underline{k})$$

$$\text{avec } f(\underline{k}) = \underline{k} \cdot \underline{p} / k^2 = -i \varepsilon_{ijm} k_m \phi_{ij}^{(a)} / 2k^2$$

La forme de $\phi_{ij}(\underline{k})$ en turbulence isotrope

Soit la quantité scalaire $S = a_i b_j \phi_{ij}(\underline{k})$
avec \underline{a} et \underline{b} des vecteurs réels quelconques

S (étant un scalaire) ne peut dépendre que de
 $|\underline{k}|, |\underline{a}|, |\underline{b}|, \underline{a} \cdot \underline{b}, \underline{a} \cdot \underline{k}, \underline{b} \cdot \underline{k}, (\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{k}$
de plus S est bilinéaire, par définition, en \underline{a} et \underline{b}
donc $|\underline{a}|$ et $|\underline{b}|$ sont à éliminer

$$S = \alpha(k) \underline{a} \cdot \underline{b} + \beta(k) (\underline{a} \cdot \underline{k})(\underline{b} \cdot \underline{k}) + \gamma(k) (\underline{a} \times \underline{b}) \cdot \underline{k}$$

avec $\alpha(k), \beta(k), \gamma(k)$ des fonctions scalaires
de $k \equiv |\underline{k}|$ (turbulence homogène, isotrope)

$$\begin{aligned} \phi_{ij} a_i b_j &= \alpha(k) a_i b_i + \beta(k) (a_i k_i)(b_j k_j) + \gamma(k) \varepsilon_{mij} a_i b_j k_m \\ &= [\alpha(k) \delta_{ij} + \beta(k) k_i k_j + \gamma(k) \varepsilon_{ijm} k_m] a_i b_j \end{aligned}$$

\underline{a} et \underline{b} étant quelconques, on a donc:

$$\phi_{ij}(\underline{k}) = \alpha(k) \delta_{ij} + \beta(k) k_i k_j + \gamma(k) \varepsilon_{ijm} k_m$$

or, on sait que $k_i \phi_{ij}(\underline{k}) = k_j \phi_{ij}(\underline{k}) = 0 \quad \forall \underline{k}$
(par incompressibilité)

$$k_i \phi_{ij}(\underline{k}) = \alpha(k) k_j + \beta(k) k^2 k_j + \underbrace{\gamma(k) \varepsilon_{ijm} k_j k_m}_{=0} = 0$$

$$\Rightarrow \alpha(k) + \beta(k) k^2 = 0$$

$$\beta(k) = -\alpha(k) / k^2$$

ainsi, en turbulence isotrope,

$$\phi_{ij}(\underline{k}) = \alpha(k) \left[\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right] + \gamma(k) \varepsilon_{ijm} k_m$$

remarque $\gamma(k) = i f(k)$ (cf § précédent)

Fonction-spectre $E(k)$ de l'énergie cinétique

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2} \langle u^2(t) \rangle = \frac{1}{2} \langle \hat{u}_i^*(\underline{k}) e^{-i\underline{k} \cdot \underline{x}} d\underline{k} \int \hat{u}_i(\underline{k}') e^{i\underline{k}' \cdot \underline{x}} d\underline{k}' \rangle \\ &= \frac{1}{2} \iint \langle \hat{u}_i^*(\underline{k}) \hat{u}_i(\underline{k}') \rangle e^{-i(\underline{k}-\underline{k}') \cdot \underline{x}} d\underline{k} d\underline{k}' \\ &= \frac{1}{2} \iint \phi_{ii}(\underline{k}) \delta(\underline{k}-\underline{k}') e^{-i(\underline{k}-\underline{k}') \cdot \underline{x}} d\underline{k} d\underline{k}' \\ &= \frac{1}{2} \int \phi_{ii}(\underline{k}) d\underline{k} \end{aligned}$$

On définit $\mathcal{E}(\underline{k}) = \frac{1}{2} \phi_{ii}(\underline{k})$ la densité spectrale d'énergie

$$= \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{2} \langle u_i(\underline{x}) u_i(\underline{x}+\underline{r}) \rangle e^{-i\underline{k} \cdot \underline{r}} d\underline{r}$$

(généralisation 3D du théorème de Wiener-Khinchine)

- Dans le cas d'une turbulence **isotrope** :
les quantités ne dépendent pas de la direction \underline{r} ou de \underline{k} , mais de $|\underline{r}| = r$ ou $|\underline{k}| = k$; on peut donc intégrer sur toutes les directions des vecteurs \underline{r} , ou \underline{k} , i.e. intégrer sur les angles, i.e. intégrer sur les sphères de rayon $|\underline{r}| = r$ & $|\underline{k}| = k$

On définit la densité d'énergie intégrée sur les angles, ou fonction spectrale de l'énergie :

$$E(k) = 4\pi k^2 \mathcal{E}(k) = 4\pi k^2 \left(\frac{1}{2} \phi_{ii}(k) \right)$$

qui donne : $\int_0^\infty E(k) dk = \frac{1}{2} \langle u^2 \rangle$

En effet ;

$$\frac{1}{2} \int \phi_{ii}(\underline{k}) d\underline{k} = \int_0^\infty dk \int_0^\pi k d\theta \int_0^{2\pi} k \sin\theta d\varphi \frac{1}{2} \phi_{ii}(\underline{k})$$

$$\frac{1}{2} \langle \underline{u}^2 \rangle$$

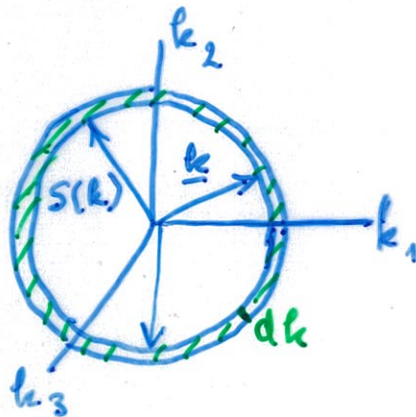
(k, θ, φ) coordonnées
sphériques

$$= \int_0^\infty k^2 dk \frac{1}{2} \phi_{ii}(\underline{k}) \int_0^\pi \sin\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= \int_0^\infty k^2 dk \frac{1}{2} \phi_{ii}(\underline{k}) [-\cos\theta]_0^\pi 2\pi$$

$$= \int_0^\infty \underbrace{4\pi k^2 \frac{1}{2} \phi_{ii}(\underline{k})}_{E(k)} dk = \int_0^\infty E(k) dk$$

$E(k)dk$ peut-être interprétée comme la contribution à l'énergie de l'intervalle $(k, k+dk)$ des nombres d'onde $k = |\underline{k}|$.



Fonction du spectre de l'hélicité $\mathcal{H} = \langle \underline{u} \cdot \underline{\omega} \rangle$

$$\underline{u} = \int \hat{\underline{u}}(\underline{k}) e^{i \underline{k} \cdot \underline{x}} d\underline{k}$$

$$\underline{\omega} = \nabla \times \underline{u} = \int i \underline{k} \times \hat{\underline{u}}(\underline{k}) e^{i \underline{k} \cdot \underline{x}} d\underline{k}$$

$$(\underline{k} \times \hat{\underline{u}}(\underline{k}))_i = \varepsilon_{ijm} k_j \hat{u}_m(\underline{k})$$

$$\langle \underline{u} \cdot \underline{\omega} \rangle = \iint \langle \hat{u}_i^*(\underline{k}) i \varepsilon_{ijm} k'_j \hat{u}_m(\underline{k}') \rangle e^{-i(\underline{k} - \underline{k}') \cdot \underline{x}} d\underline{k} d\underline{k}'$$

$$= i \varepsilon_{ijm} \iint k'_j \phi_{im}(\underline{k}') \delta(\underline{k} - \underline{k}') d\underline{k} d\underline{k}' e^{-i(\underline{k} - \underline{k}') \cdot \underline{x}}$$

$$= i \varepsilon_{ijm} \int k_j \phi_{im}(\underline{k}) d\underline{k}$$

$$\langle \underline{u} \cdot \underline{\omega} \rangle = i \int \varepsilon_{ijm} k_j \phi_{im}(\underline{k}) d\underline{k}$$

or, on a vu que $\phi_{im}(\underline{k})$ peut s'écrire

$$\phi_{im}(\underline{k}) = \phi_{im}^{(s)}(\underline{k}) + \phi_{im}^{(a)}(\underline{k}) = \phi_{im}^{(s)}(\underline{k}) + i \varepsilon_{ime} k_e f(\underline{k})$$

et $\varepsilon_{ijm} \phi_{im}^{(s)}(\underline{k}) = 0$; $f(\underline{k}) = -i \varepsilon_{ijk} k_k \phi_{ij}^{(a)} / 2k^2$
ce qui donne

$$\langle \underline{u} \cdot \underline{\omega} \rangle = i \int \varepsilon_{ijm} k_j (i \varepsilon_{ime} k_e) f(\underline{k}) d\underline{k}$$

$$= - \int k_j k_e \varepsilon_{ijm} \varepsilon_{ime} f(\underline{k}) d\underline{k}$$

$$- \varepsilon_{imj} \varepsilon_{ime} = -2 \delta_{je}$$

$$= \int 2 k^2 f(\underline{k}) d\underline{k} \equiv \int \mathcal{H}(\underline{k}) d\underline{k}$$

on définit $\mathcal{H}(\underline{k}) = 2k^2 f(\underline{k}) = -i \varepsilon_{ijm} k_m \phi_{ij}(\underline{k})$
densité spectrale d'hélicité

dans le cas isotrope, comme précédemment pour l'énergie, on définit alors la fonction $H(k)$

$$H(k) = 4\pi k^2 \mathcal{H}(k)$$

et on obtient alors $\langle \underline{u} \cdot \underline{\omega} \rangle = \int_0^\infty H(k) dk$

Remarque

On a vu que dans le cas isotrope $\phi_{ij}(k)$ s'écrit

$$\phi_{ij}(k) = \alpha(k) \left(\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right) + \gamma(k) \varepsilon_{ijm} k_m$$

$\alpha(k)$, $\gamma(k)$ peuvent s'obtenir à partir de $E(k)$ et $H(k)$

En effet: * $E(k) = 4\pi k^2 \left(\frac{1}{2} \phi_{ii}(k) \right)$

$$= 4\pi k^2 \frac{1}{2} [(3-1)\alpha(k) + 0]$$

$$E(k) = 4\pi k^2 \alpha(k)$$

* $H(k) = 4\pi k^2 (-i \varepsilon_{ijk} k_k \phi_{ij}(k))$

$$= 4\pi k^2 (-i) \varepsilon_{ijk} k_k \varepsilon_{ijm} k_m \gamma(k)$$

$$= -4\pi k^2 i \delta_{km} k_k k_m \gamma(k)$$

$$H(k) = -i 8\pi k^4 \gamma(k) = 8\pi k^4 f(k)$$

Ce qui donne

$$\phi_{ij}(k) = \frac{E(k)}{4\pi k^2} \left[\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right] + \frac{i H(k)}{8\pi k^4} \varepsilon_{ijm} k_m$$

* Si, de plus, la turbulence est invariante de parité, alors $H(k)$, qui est un pseudo-scalaire, est nul

et

$$\phi_{ij}(k) = \frac{E(k)}{4\pi k^2} \left[\delta_{ij} - \frac{k_i k_j}{k^2} \right]$$

$$\text{et } \int \Omega(\underline{k}) d\underline{k} = \frac{1}{2} \langle \underline{\omega}^2 \rangle$$

En turbulence **isotrope**, on définit la fonction du spectre de vorticité: $\Omega(k)$

$$\begin{aligned} \Omega(k) &= 4\pi k^2 \left(\frac{1}{2} \Omega_{ii}(k) \right) = 4\pi k^2 \left(\frac{1}{2} k^2 \phi_{ii}(k) \right) \\ &= k^2 \left(4\pi k^2 \frac{1}{2} \phi_{ii}(k) \right) = k^2 E(k) \end{aligned}$$

on a donc, dans ce cas,

$$\frac{1}{2} \langle \underline{\omega}^2 \rangle = \int_0^\infty \Omega(k) dk = \int_0^\infty k^2 E(k) dk$$

* Que l'énergie cinétique $\frac{1}{2} \langle \underline{u}^2 \rangle = \int_0^\infty E(k) dk$ soit finie nécessite seulement que

$$E(k) = o(k^{-(1+\varepsilon)}) ; k \rightarrow \infty$$

mais, si $E(k)$ est en loi de puissance;

$$E(k) \sim k^{-d} \quad (d > 1) ; k \rightarrow \infty$$

alors l'ensrophie $\frac{1}{2} \langle \underline{\omega}^2 \rangle = \int_0^\infty k^2 E(k) dk$

$$= \int_0^\infty k^{2-d} dk$$

diverge à l'infini si $2-d+1 > 0$; i.e. si $d-1 < 2$

On s'attend, physiquement, à ce que la diffusion visqueuse empêche un tel comportement singulier i.e. on s'attend à ce que

$$k^d E(k) \rightarrow 0 ; k \rightarrow \infty \quad (\forall d > 1)$$

cette condition est satisfaite, par exemple, si

$$E(k) \sim e^{-\alpha k^q} \quad (\alpha > 0, q > 0)$$

(i.e. une décroissance du type exponentielle de $E(k)$ quand $k \rightarrow \infty$)

Conditions de réalisabilité

Le théorème de Cràmer sur le tenseur de corrélation (d'un processus aléatoire stationnaire continu) impose que ; pour que $\phi_{ij}(\underline{k})$ soit le tenseur du spectre d'un vecteur réel $\underline{u}(\underline{x})$, il faut que

$$(1) \quad x_i^* x_j \phi_{ij}(\underline{k}) \geq 0 \quad \forall \underline{x} \text{ vecteur complexe.}$$

Or, on a

$$\phi_{ij}(\underline{k}) \delta(\underline{k} - \underline{k}') = \langle \hat{u}_i^*(\underline{k}) \hat{u}_j(\underline{k}') \rangle$$

et donc :

$$\begin{aligned} x_i^* x_j \phi_{ij}(\underline{k}) \delta(\underline{k} - \underline{k}') &= \langle (x_i \hat{u}_i(\underline{k}))^* (x_j \hat{u}_j(\underline{k}')) \rangle \\ &= \langle (\underline{x} \cdot \hat{\underline{u}}(\underline{k}))^* (\underline{x} \cdot \hat{\underline{u}}(\underline{k}')) \rangle \end{aligned}$$

ce qui donne $x_i^* x_j \phi_{ij}(\underline{k}) \sim \langle |\underline{x} \cdot \hat{\underline{u}}(\underline{k})|^2 \rangle \geq 0$.

conséquences de (1)

- Si \underline{x} est réel ; $x_i x_j \phi_{ij}(\underline{k}) = x_i x_j \phi_{ij}^{(s)}(\underline{k}) + x_i x_j \phi_{ij}^{(a)}(\underline{k}) \geq 0$
donne : $\phi_{ij}^{(s)}(\underline{k})$ est définie positive

$$\text{en particulier } \phi_{ii}^{(s)}(\underline{k}) \geq 0$$

$$\begin{aligned} \text{et ainsi ; } E(\underline{k}) &= 2\pi k^2 \left(\frac{1}{2} \phi_{ii}(\underline{k}) \right) \\ &= 2\pi k^2 \left(\frac{1}{2} \phi_{ii}^{(s)}(\underline{k}) \right) \geq 0, \forall k \end{aligned}$$

$$\text{i.e. } \underline{E(\underline{k}) \geq 0, \forall k}$$

Soit $\underline{x} = \underline{p} + i\underline{q}$ avec $\underline{p}, \underline{q}$ vecteurs unités tels que $\underline{\tilde{e}} = \frac{\underline{k}}{|\underline{k}|}$, $\underline{p}, \underline{q}$ forment une triade orthogonale unitée

$$\underline{\tilde{e}}^2 + \underline{p}^2 + \underline{q}^2 = \underline{e} \quad \text{et} \quad \underline{\tilde{e}} = \pm \underline{p} \wedge \underline{q}$$

(± triade gauche ou droite)

ce qui permet d'écrire les relations suivantes

$$\tilde{e}_i \tilde{e}_j + p_i p_j + q_i q_j = \delta_{ij}$$

$$\text{et } \tilde{e}_k = \pm \varepsilon_{k\ell m} p_\ell q_m$$

$$\begin{aligned} \pm \varepsilon_{kij} \tilde{e}_k &= \varepsilon_{kij} \varepsilon_{k\ell m} p_\ell q_m \\ &= (\delta_{i\ell} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{j\ell}) p_\ell q_m = p_i q_j - p_j q_i \end{aligned}$$

$$\text{ainsi ; } x_i^* x_j = (p_i - iq_i)(p_j + iq_j)$$

$$= (p_i p_j + q_i q_j) + i(p_i q_j - p_j q_i)$$

$$= (\delta_{ij} - \tilde{e}_i \tilde{e}_j) \pm i \varepsilon_{ijk} \tilde{e}_k$$

$$\text{et } x_i^* x_j \phi_{ij}(\underline{k}) = [(\delta_{ij} - \tilde{e}_i \tilde{e}_j) \pm i \varepsilon_{ijk} \tilde{e}_k] \phi_{ij}(\underline{k})$$

$$= \phi_{ii} - \underbrace{\tilde{e}_i \tilde{e}_j \phi_{ij}}_{=0} \pm i \varepsilon_{ijk} \tilde{e}_k \phi_{ij}$$

(incompressibilité) $\pm f(\underline{k}) 2k \frac{1}{k}$

$$x_i^* x_j \phi_{ij}(\underline{k}) = \phi_{ii} \mp 2k f(\underline{k}) \geq 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{2k |f(\underline{k})|}_{2k \frac{1}{8\pi k^4} |H(\underline{k})|} \leq \underbrace{\phi_{ii}(\underline{k})}_{2 \frac{E(\underline{k})}{4\pi k^2}}$$

$$\Rightarrow \underbrace{|H(\underline{k})|}_{\leq 2k E(\underline{k})} \leq 2k E(\underline{k}) \quad ; \quad \forall \underline{k}$$

Ces conditions de réalisabilité sont importantes et doivent être satisfaites pour tous temps. Toute approximation de la turbulence doit les satisfaire, autrement des comportements non-physiques pourraient apparaître.....

La forme de $\phi_{ij}(\underline{k})$ près de $\underline{k}=0$

Si $\phi_{ij}(\underline{k})$ est analytique près de $\underline{k}=0$, alors on peut faire un développement de Taylor :

$$\phi_{ij}(\underline{k}) = C_{ij} + C_{ije} k_e + C_{ijem} k_e k_m + o(k^3)$$

L'incompressibilité donne pour tout \underline{k} :

$$k_i \phi_{ij}(\underline{k}) = k_i C_{ij} + C_{ije} k_i k_e + C_{ijem} k_i k_e k_m + \dots \equiv 0 \quad \forall \underline{k}$$

donc ; $k_i C_{ij} = 0$; $C_{ije} k_i k_e = 0$; ----

$$* \left\{ \begin{array}{l} k_i C_{ij} = 0 \\ \forall \underline{k} \end{array} \right. \Rightarrow C_{ij} = 0$$

$$* \left\{ \begin{array}{l} C_{ije} k_i k_e = 0 \\ \forall \underline{k} \end{array} \right. \Rightarrow C_{ije} \text{ est antisymétrique en } i \text{ et } e$$

si $C_{ije} \neq 0$; alors pour k suffisamment petit

$$\phi_{ij}(\underline{k}) \sim C_{ije} k_e$$

$$\text{or } x_i^* x_j \phi_{ij}(\underline{k}) = \phi_{ii}^{(s)}(\underline{k}) = f(\underline{k}) \geq k \text{ réel } \geq 0 \quad (\text{Crámer})$$

$$x_i^* x_j \phi_{ij}(\underline{k}) \sim x_i^* x_j C_{ije} k_e \geq 0$$

$$\forall \underline{x} \quad \left\{ \begin{array}{l} x_i^* x_j \phi_{ij}(-\underline{k}) \sim x_i^* x_j C_{ije} (-k_e) \leq 0 \\ = x_i^* x_j \phi_{ij}^*(\underline{k}) = (x_i x_j^* \phi_{ij}(\underline{k}))^* = x_i x_j^* \phi_{ij}(\underline{k}) \end{array} \right.$$

$$\Rightarrow C_{ije} = 0$$

$$\sim x_i x_j^* C_{ije} k_e \geq 0$$

On obtient :

$$\Phi_{ij}(k) = C_{ijke} k_e k_e + C_{ijlem} k_e k_e k_m + \dots$$

\bar{a} petits k_e ; on peut en tirer des résultats pour la forme de $E(k)$ (\bar{a} petits k_e) pour l'énergie:

$$E(k) \sim \frac{1}{2} \int_{S(k)} C_{iiem} k_e k_m ds = C k^4 + \dots$$

(avec $C = \frac{2\pi}{3} C_{ii mm}$)

de même pour l'hélicité, on peut montrer que

$$H(k) \sim -i \varepsilon_{ijp} \int_{S(k)} k_p [C_{ijke} k_e k_e + C_{ijlem} k_e k_e k_m + \dots] ds$$

$$\sim D k^6 + \dots$$

$$\text{(avec } D = -\frac{4\pi i}{5} \varepsilon_{ijp} C_{ij k l p} \text{)}.$$

Leçon 5 : Description phénoménologique de la turbulence

★ **introduction**

★ **la “cascade de Richardson” et la localité des interactions**

★ **quelques outils phénoménologiques**

★ **le spectre d'énergie**

★ **le spectre d'ensrophie**

Introduction.

On considère un écoulement statistiquement stationnaire, maintenu en mouvement par une force qui lui donne constamment de l'énergie.

$$\begin{cases} \partial_t \underline{u} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} = -\nabla p + \underline{f} + \nu \Delta \underline{u} & (1) \\ \nabla \cdot \underline{u} = 0 \end{cases}$$

avec \underline{f} : une force (par unité de masse) stationnaire, aléatoire, homogène, isotrope et invariante de parité (dans une situation idéale)

Cette force d'agitation est à une échelle caractéristique $l_0 \sim l_0^{-1}$ (ν : proportionnel)

Questions: qu'advient-il de l'énergie injectée?

On construit une équation d'énergie en multipliant (1) par \underline{u} et en moyennant (ensemble, temps ou espace)

$$\frac{1}{2} \partial_t \underline{u}^2 + \underline{u} \cdot (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} = -\underline{u} \cdot \nabla p + \underline{f} \cdot \underline{u} + \nu \underline{u} \cdot \Delta \underline{u}$$

$$\partial_t \langle \frac{1}{2} \underline{u}^2 \rangle = \langle \underline{f} \cdot \underline{u} \rangle - \nu \langle \underline{u}^2 \rangle$$

en utilisant:

$$(a) \quad \langle \underline{u} \cdot (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{u} \rangle = \langle (\underline{u} \cdot \nabla) (\frac{1}{2} \underline{u}^2) \rangle = \nabla \cdot \langle \frac{1}{2} \underline{u} \underline{u}^2 \rangle \stackrel{h}{=} 0$$

$$(b) \quad \langle \underline{u} \cdot \nabla p \rangle = \nabla \cdot \langle \underline{u} p \rangle \stackrel{h}{=} 0$$

$$(c) \quad \langle \underline{u} \cdot \Delta \underline{u} \rangle = \langle \nabla \cdot (\underline{u} \times \underline{u}) - \underline{u}^2 \rangle \stackrel{h}{=} -\langle \underline{u}^2 \rangle$$

Pour un écoulement stationnaire :

$$\langle \underline{u}^2 \rangle = \text{cte}$$

$$\Rightarrow \langle \underline{p} \cdot \underline{u} \rangle = \nu \langle \underline{\omega}^2 \rangle = \varepsilon \quad ([\varepsilon] = L^2/T^3)$$

taux moyen
d'injection d'énergie
(")

taux moyen de
dissipation d'énergie
(par unité de masse)

$$(\varepsilon = \frac{\nu}{2} \langle (\partial_j u_i + \partial_i u_j)^2 \rangle)$$

La dissipation ne peut se faire à l'échelle d'injection l_0 ; le Reynolds à l_0 est très grand (par hypothèse) et donc la dissipation ν est très petite

\rightsquigarrow on est amené à l'image physique de cascade ----

La cascade de Richardson et la localité des interactions

L'énergie est transférée de l_0 vers des échelles de plus en plus petites, et ce jusqu'à ce que des échelles, aux quelles les forces visqueuses agissent et dissipent l'énergie reçue d'échelles plus grandes, soient atteintes ($Re_\nu \sim 1$)

- * l'énergie est transférée d'une échelle à l'autre par les termes non-linéaires qui ne peuvent ni créer ni détruire d'énergie (a)

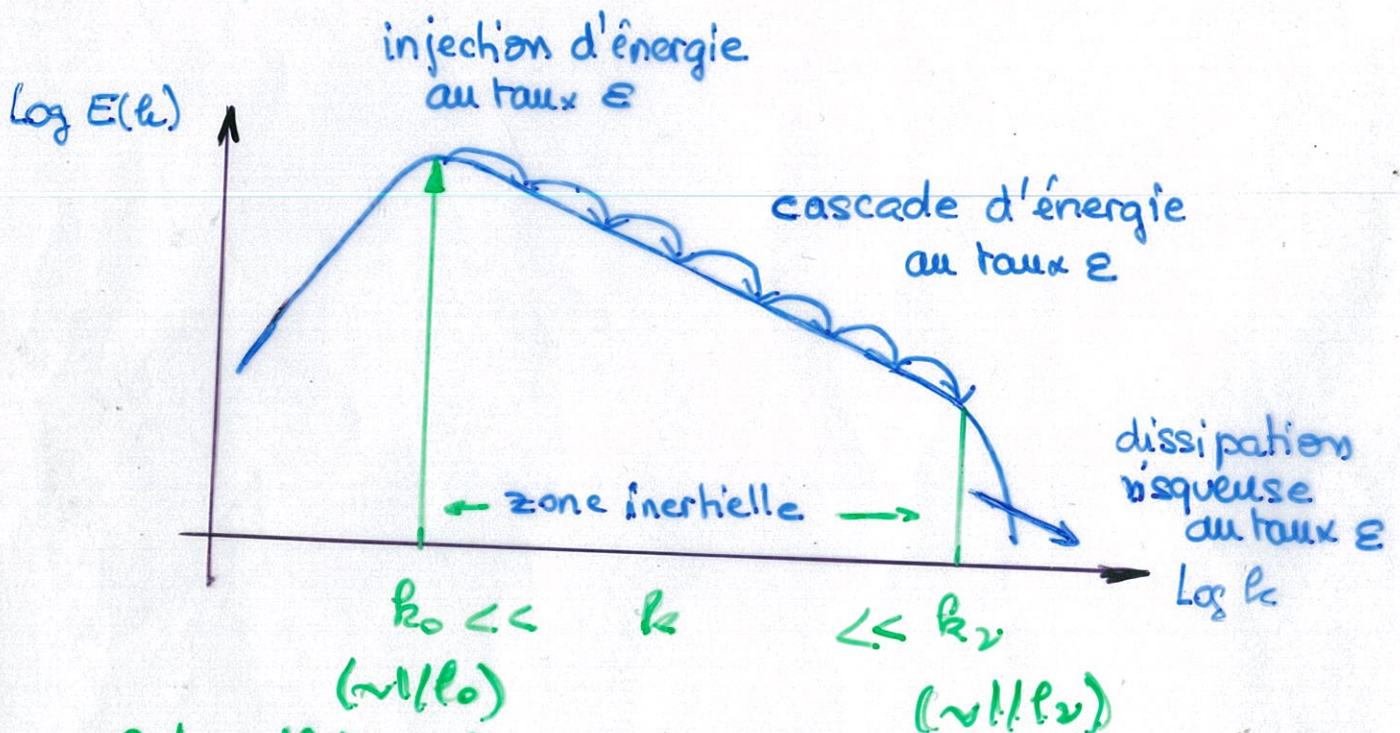
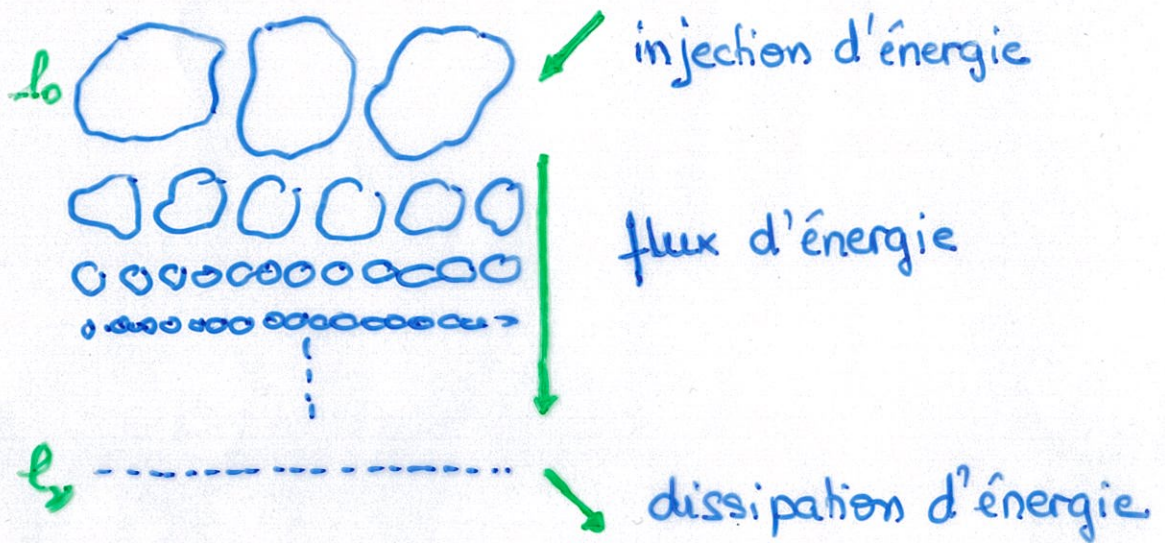
* l'énergie s'accumule à une échelle jusqu'à ce que cette échelle devienne "instable" et transfère l'énergie à des échelles plus petites

* une modification de ν d'un fluide turbulent ne change pas la dissipation d'énergie qui s'y produit ! (vérifié expérimentalement) :
on modifie le nombre d'étapes de la cascade, les petites échelles s'arrangent pour toujours dissiper l'énergie injectée à grande échelle.
($\rightarrow \varepsilon$ indépendant de ν)

* localité des interactions

- une vitesse d'advection constante n'a pas d'effet dynamique sur l'écoulement (invariance de Galilée)
- l'intensité de la vitesse des mouvements à l'échelle l doit être définie par la variation typique de la vitesse turbulente sur une distance l .
- $l_v \ll l \ll l_0$; le flux d'énergie à l'échelle l ne fait essentiellement intervenir que des échelles de tailles comparables

"Scénario de la cascade d'énergie et de la coupure visqueuse"



2 hypothèses de base : * invariance d'échelle de ε dans la zone inertielle

* localité des interactions

ε joue un triple rôle :

- * taux d'injection d'énergie
- * taux de cascade d'énergie d'échelles $\sim l_0 \rightarrow$ échelles $\sim l_v$
- * taux de dissipation d'énergie aux échelles $\lesssim l_v$

Quelques outils de phénoménologie

Soit l : l'échelle que l'on considère ($l \sim l^{-1}$)
 $l_v \ll l \ll l_0$
 vitesse r.m.s. $u_0 = \langle \underline{u}^2 \rangle^{1/2} \sim$ vitesse d'injection.
 u_e valeur de la vitesse typique associée aux échelles $\sim l$

- Reynolds intégral ($Re \gg 1$): $Re \sim \frac{l_0 u_0}{\nu}$
- Reynolds à l'échelle l : $Re_l \sim \frac{l u_e}{\nu}$
- temps de retournement à l'échelle l (ou temps non linéaire): $t_e \sim l / u_e$
 temps de transfert d'énergie d'échelles $\sim l$ à des échelles plus petites
- temps typique de diffusion visqueuse (pour atténuer l'excitation sur des échelles $\sim l$): $t_e^v \sim l^2 / \nu$
- énergie cinétique à des échelles $\sim l$: $k_e \sim \frac{1}{2} u_e^2$
- transfert d'énergie par unité de masse à l'échelle l : ϵ_e

$$\epsilon_e \sim \frac{k_e}{t_e} \sim \frac{u_e^2}{t_e} \sim \frac{u_e^3}{l}$$

comme ϵ_e est supposé indépendant de l'échelle l dans la zone inertielle :

$$\epsilon_e \sim \frac{\mu_e^3}{l} \sim \epsilon \sim \underbrace{\frac{\mu_0^3}{l_0}}_{\text{taux d'injection d'énergie}}$$

$$\rightarrow \begin{cases} \mu_e \sim \epsilon^{1/3} l^{1/3} \\ \mu_e \sim \mu_0 (l/l_0)^{1/3} \end{cases}$$

$$\rightarrow Re_e \sim \frac{l \mu_e}{\nu} \sim \frac{l \mu_0 (l/l_0)^{1/3}}{\nu} \sim Re \left(\frac{l}{l_0} \right)^{4/3}$$

• échelle de dissipation : l_ν ($\sim 1/k_\nu$)
(ou de Kolmogorov)

$$t_{l_\nu} \sim t_{l_\nu}^\nu \rightarrow \frac{l_\nu}{\mu_{l_\nu}} \sim \frac{l_\nu^2}{\nu} \rightarrow l_\nu \sim \frac{\nu}{\mu_{l_\nu}}$$

pour μ_{l_ν} $\left\{ \begin{array}{l} \text{ou} \\ \mu_{l_\nu} \sim \epsilon^{1/3} l_\nu^{1/3} \rightarrow l_\nu \sim \left(\frac{\nu^3}{\epsilon} \right)^{1/4} \\ \mu_{l_\nu} \sim \mu_0 (l_\nu/l_0)^{1/3} \rightarrow l_\nu \sim l_0 Re^{-3/4} \end{array} \right.$

• échelle de Taylor : $\lambda \sim \left(\frac{E}{\Omega} \right)^{1/2}$

$$\lambda^2 \sim \frac{E}{\Omega} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} E = \frac{1}{2} \mu_0^2 = \frac{1}{2} \langle \underline{u}^2 \rangle \\ \Omega = \frac{1}{2} \langle \underline{\omega}^2 \rangle = \frac{1}{2} E / \nu \end{cases}$$

$$\rightarrow \lambda \sim \left(\frac{E \nu}{E} \right)^{1/2} \quad \text{ou} \quad \lambda \sim l_0 Re^{-1/2}$$

$\leadsto \lambda \sim \left(\frac{E\nu}{\varepsilon}\right)^{1/2}$ dépend de E, ν, ε (au sens du taux de transfert non linéaire)

alors que $l_0 \sim \frac{u_0^3}{\varepsilon} \sim \frac{E^{3/2}}{\varepsilon}$ dépend de E, ε (taux d'injection d'énergie)

et $l_\nu \sim \left(\frac{\nu^3}{\varepsilon}\right)^{1/4}$ dépend de ν, ε (taux de dissipation)

$\rightarrow \lambda$ est la seule échelle qui réunit 3 quantités caractéristiques principales de l'écoulement E, ν, ε

λ et $Re_\lambda \sim \frac{u_0 \lambda}{\nu} \sim Re^{1/2}$ utiles pour comparer des expériences, car basés sur les propriétés internes.
(nombre de Taylor)

• nombre de degrés de liberté excités en turbulence

(i.e. en fait le nombre d'échelles actives)

Comme les tourbillons d'échelle $\sim l \ll l_\nu$ sont amortis par dissipation visqueuse et donc asservis aux plus grandes échelles ; il faut compter les structures de taille $\sim l_0$ indépendantes dans un volume $\sim l_0^3$

$$N \sim \frac{l_0^3}{l_\nu^3} \sim \left(\frac{l_0}{l_\nu}\right)^3 \sim Re^{3/4} \quad (l_\nu \sim l_0 Re^{-3/4})$$

$\leadsto N$ peut-être significativement plus petit dû à des interactions non-linéaires, ou à la présence d'un certain ordre au travers de l'existence de structures cohérentes (filaments, nappes, de vorticités, allées de von Kármán, ...)

Spectre d'énergie $E(k)$ (K41)

$$\rightarrow E = \frac{1}{2} \langle \underline{u}^2 \rangle = \int_0^\infty E(k) dk \quad (*)$$

En découplant l'espace de Fourier en coquilles concentriques ($k_0 2^{p-1} < k < k_0 2^p$, par ex.), on peut écrire :

$$E = \sum_p k_p = \sum_p E(k_p) \underbrace{k_p}_{\substack{\text{par consistance} \\ \text{dimensionnelle avec (*)}}}$$

coquille par coquille ; on a :

$$k_p \sim \frac{1}{2} v_p^2 \sim \frac{1}{2} v_0^2 \left(\frac{k_0}{k_p} \right)^{2/3} \sim E(k_p) k_p$$

$$\Rightarrow E(k_p) \sim v_0^2 k_0^{2/3} k_p^{-5/3} \sim \varepsilon^{2/3} k^{-5/3}$$

on obtient le spectre de Kolmogorov ; $k^{-5/3}$

$$E(k) = C \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad k_0 \ll k \ll k_v$$

(C nbe sans dimension d'ordre unité, $C \approx 1.4$ expérimentalement).

\rightarrow On peut aussi retrouver ce résultat par analyse dimensionnelle :

$$[\varepsilon] = L^2 T^{-3} ; [k E(k)] = V^2 = (L/T)^2$$

$$[E(k)] = L^3 T^{-2} = [\varepsilon]^a k^b = L^{2a} T^{-3a} L^{-b} = L^{2a-b} T^{-3a}$$

$$\rightarrow a = 2/3 \\ b = -5/3$$

déterminer
seulement par ε et k dans la zone inertielle
(\rightarrow irrelevant dans cette zone)

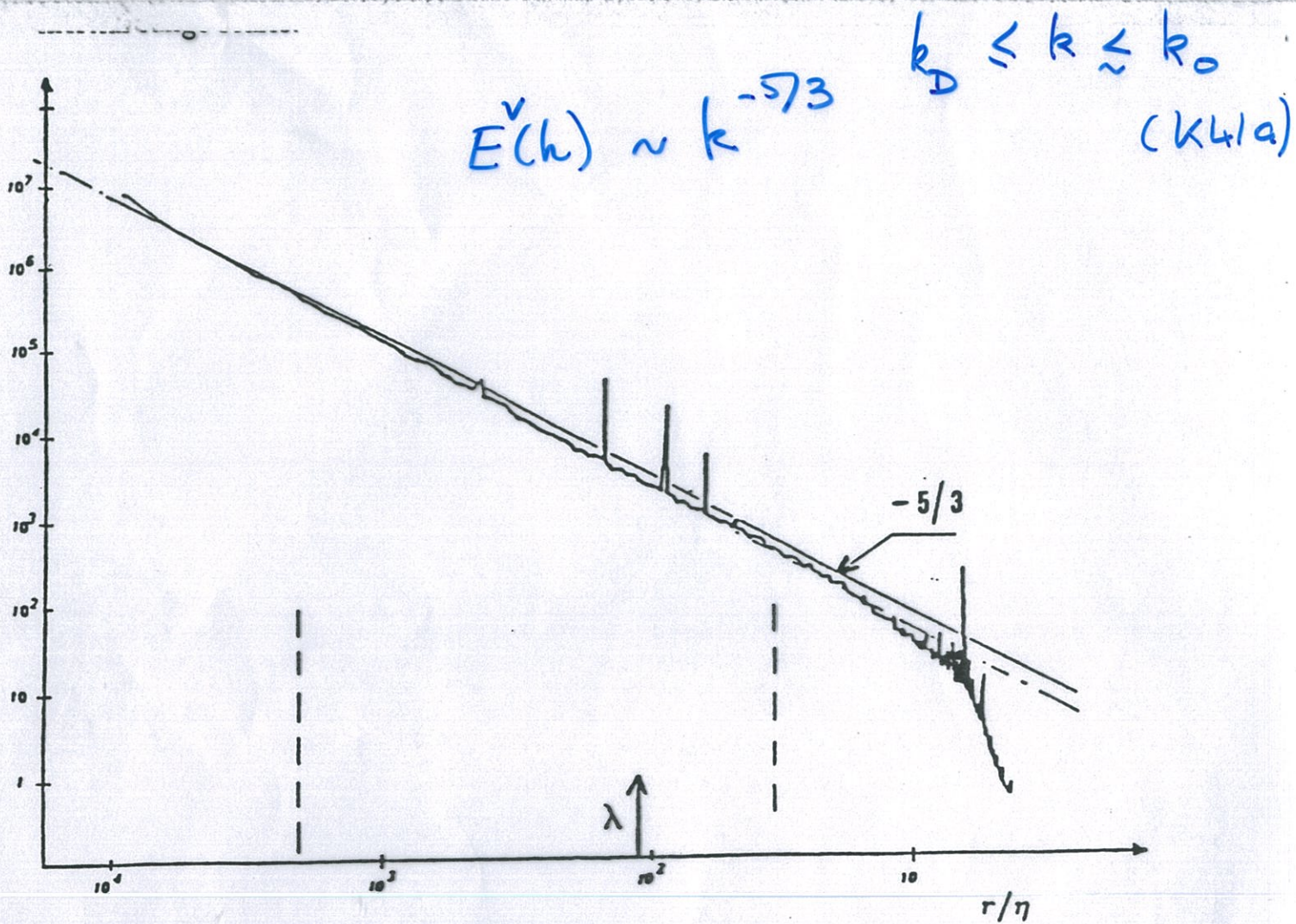


Fig.2. Energy spectrum of Modane turbulence data (log-log plot)

The wavelet transform permits a, geometrically very revealing, display of a one-dimensional signal as a two-dimensional unfolding of space and

Also: self-similarity in time

start-up
regime

$< t <$ viscous
regime

$\rightarrow E^v(t) \sim t^{-10/7}$ (K41b)

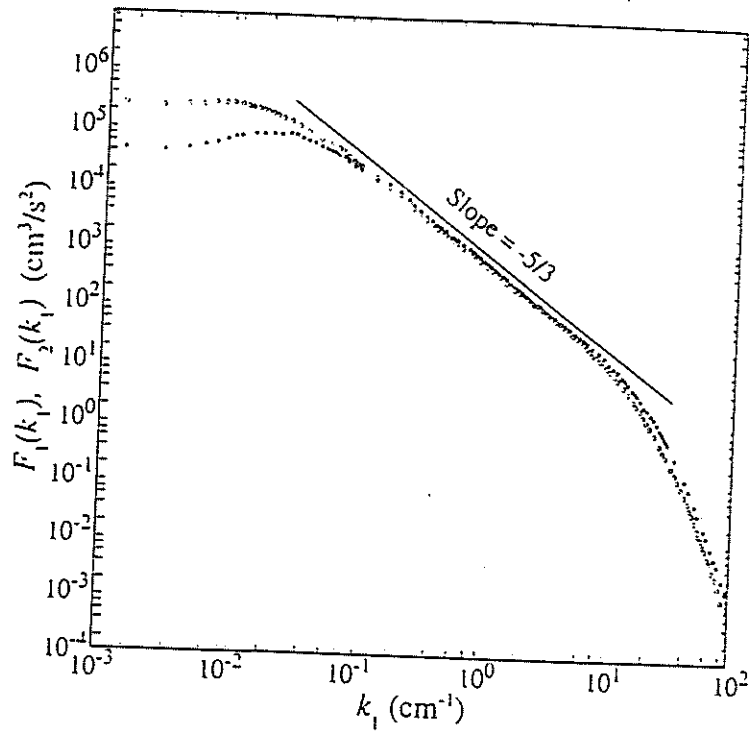


Fig. 5.7. log-log plot of the energy spectra of the streamwise component (white circles) and lateral component (black circles) of the velocity fluctuations in the time domain in a jet with $R_\lambda = 626$ (Champagne 1978).

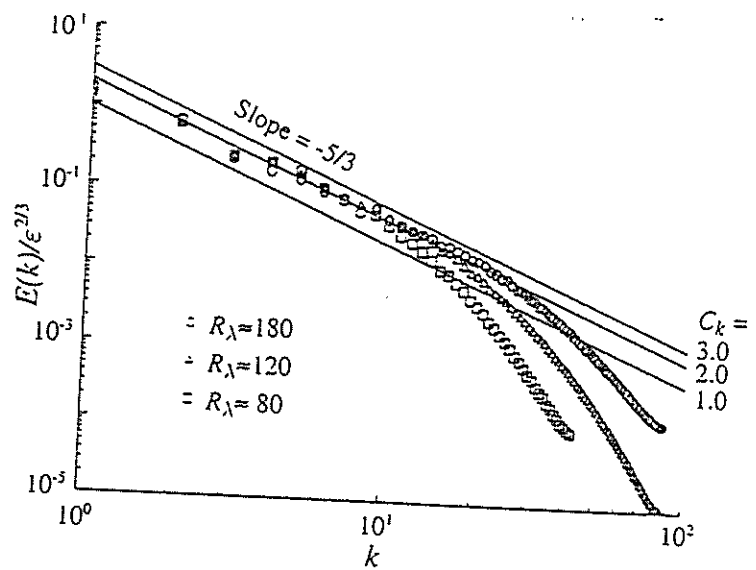


Fig. 5.9. Energy spectra in the space domain for three values of R_λ as indicated, obtained from a 256^3 computer simulation. Three different values for the Kolmogorov constant C_k are tried. Courtesy T. Sanada and K. Ishii.

Le spectre de vorticité

On a vu que $\Omega(k) = k^2 E(k)$

donc dans la zone inertielle $k_0 \ll k \ll k_v$

$$\Omega(k) = C \varepsilon^{2/3} k^{1/3}$$

et on s'attend à une décroissance de type exponentielle pour $k \gg k_v$ ($k^2 E(k) \rightarrow 0; k \rightarrow \infty$)

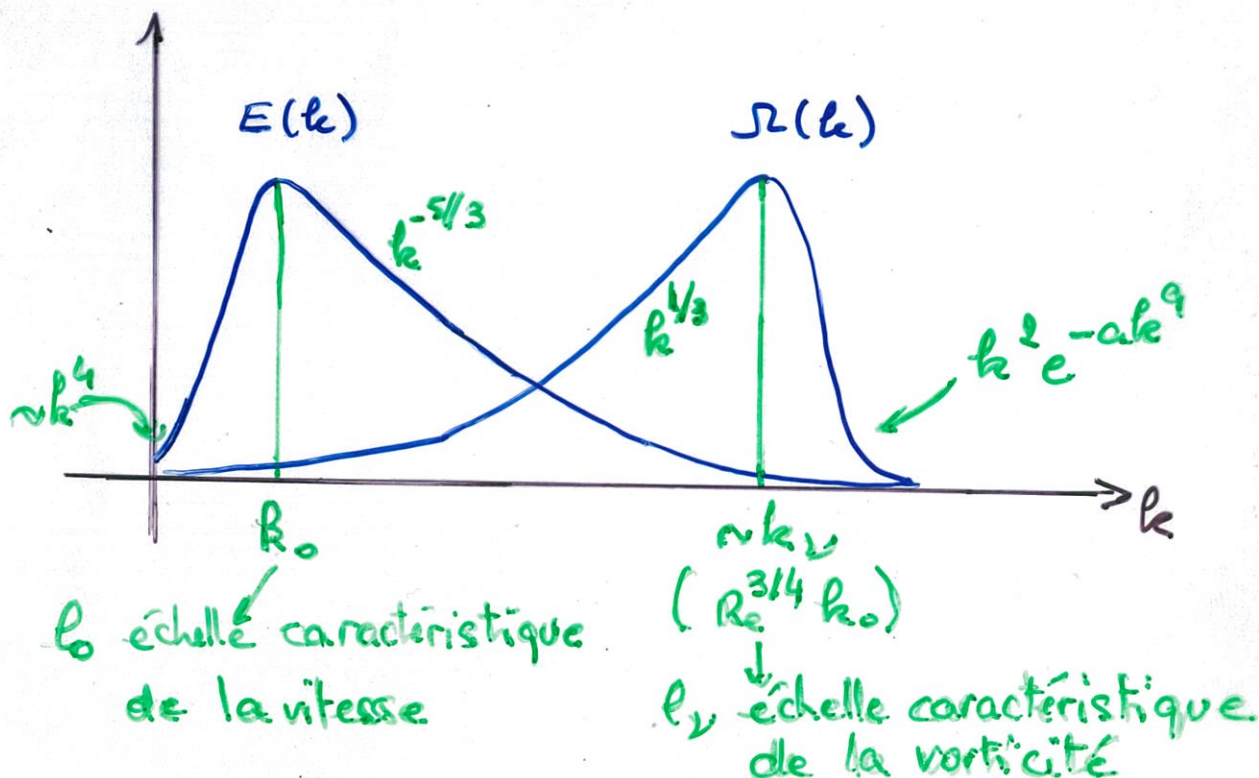
$\Omega(k)$ est maximum pour $k \sim k_v$

$$\rightarrow \langle \underline{\omega}^2 \rangle = 2 \int_0^{\infty} \Omega(k) dk \sim \int_{k_0}^{\alpha k_v} 2 C \varepsilon^{2/3} k^{1/3} dk$$

$$\langle \underline{\omega}^2 \rangle \sim 2 C \varepsilon^{2/3} \left[(\alpha k_v)^{4/3} - k_0^{4/3} \right] \frac{3}{4} \quad \text{avec } \alpha = O(1)$$

$$\text{avec } k_v \sim \left(\frac{\varepsilon}{\nu^3} \right)^{1/4} \rightarrow \langle \underline{\omega}^2 \rangle \sim 2 C \varepsilon^{2/3} \frac{3}{4} \alpha^{4/3} \frac{\varepsilon^{1/3}}{\nu} \sim \varepsilon/\nu$$

ce qui est consistant avec $\langle \underline{\omega}^2 \rangle = \varepsilon/\nu$ de l'éq. d'énergie pour un état stationnaire.



Leçon 6 : La théorie de Kolmogorov

- ★ **les hypothèses de Kolmogorov**
- ★ **l'équation de von Kármán-Howarth**
- ★ **la loi des "4/5" et des "4/3"**
- ★ **la loi des "5/3"**
- ★ **la loi des "10/7"**
- ★ **bilan d'énergie dans l'espace spectral et flux d'énergie**

Les hypothèses de Kolmogorov:

H1) Dans la limite des Reynolds ∞ ($\rho \ll l \ll l_0$) toutes les symétries possibles des eqs. de N.S. (habituellement brisées par le mécanisme de production de la turbulence) sont restaurées au sens statistique à petites échelles l ($l \ll l_0$) et loin des conditions aux limites, frontières.

ex. sur l'homogénéité, pour les incréments de vitesse

$$\delta \underline{v}(\underline{x}, \underline{l}) \equiv \underline{v}(\underline{x} + \underline{l}) - \underline{v}(\underline{x})$$

et $\delta \underline{v}(\underline{x}', \underline{l}) \equiv \underline{v}(\underline{x}' + \underline{l}) - \underline{v}(\underline{x}')$ avec $\underline{x}' = \underline{x} + \underline{r}$

ont les mêmes propriétés statistiques, i.e. les mêmes moments d'ordre p (en 1 ou plusieurs points) et les mêmes densités de probabilité ($l, r \ll l_0$)

idem pour la stationnarité et l'isotropie.

H2) Mêmes hypothèses que H1, l'écoulement est auto-similaire à toutes les échelles l ($l \ll l_0$), i.e. il possède un unique exposant d'échelle h

i.e. $\forall \underline{x}, \underline{l}, \lambda \underline{l} \ll l_0$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+$

$\delta \underline{v}(\underline{x}, \lambda \underline{l})$ a les mêmes propriétés statistiques que $\lambda^h \delta \underline{v}(\underline{x}, \underline{l})$ et $h = 1/3$.

⊙ dimensionnel

$$\langle [\delta v(l)]^2 \rangle \left[\frac{L}{T} \right]^2 ; \quad \varepsilon \left[\frac{L^2}{T^3} \right]$$

↓
taux de dissipation
d'énergie par unité de
masse

$$\rightarrow \langle [\delta v(l)]^2 \rangle = c \varepsilon^{2/3} l^{2/3}$$

où c est une cste universelle sans dimension.

→ objection de Landau: sur c

en $\langle \cdot \rangle$, ε peut varier sur des temps de l'ordre de la période des tourbillons de taille l_0 , et cette variation est différente pour des écoulements différents.

$$\langle [\delta v(\lambda l)]^2 \rangle = c \varepsilon^{2/3} \lambda^{2/3} l^{2/3} \stackrel{\text{stat.}}{=} \lambda^{2h} \langle [\delta v(l)]^2 \rangle$$

la seule possibilité est $h = 1/3$

→ on va dériver $h = 1/3$ autrement

H3 | Mêmes hypothèses que H1, l'écoulement turbulent possède un taux de dissipation moyen ε fini (et non nul) par unité de masse.

L'équation de von Kármán-Howarth.

pour une turbulence homogène, pleinement isotrope (isotrope avec invariance de parité)

la dérivation de telles lois fait intervenir :

* une partie cinématique

en écrivant les corrélations entre les composantes du champ en 2 points différents de l'écoulement et en réduisant la forme des tenseurs associés en tenant compte des conditions d'incompressibilité et de pleine isotropie

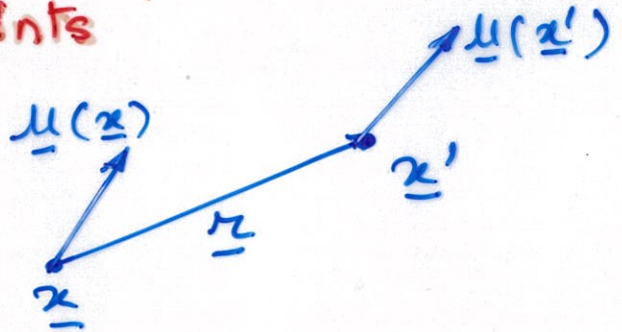
* une partie dynamique

en écrivant les équations du mouvement et de continuité en 2 points différents de l'écoulement et avec l'aide de l'homogénéité, en dérivant les conséquences des équations pour les fonctions scalaires définissant les tenseurs de corrélation

On considère une turbulence homogène, pleinement isotrope, incompressible

1) Forme générale des tenseurs pleinement isotropes d'ordre 1, 2 et 3 pour les corrélations des vitesses en deux points

$$\begin{cases} \underline{x} \text{ et } \underline{x}' = \underline{x} + \underline{r} \\ r = |\underline{r}| \end{cases}$$



$$1) \quad Q_i(\underline{r}) = A(r) r_i \stackrel{ex.}{=} \langle \rho(\underline{x}) u_i(\underline{x} + \underline{r}) \rangle$$

$$2) \quad R_{ij}(\underline{r}) = F(r) r_i r_j + G(r) \delta_{ij} = \langle u_i(\underline{x}) u_j(\underline{x} + \underline{r}) \rangle$$

$$3) \quad S_{ije}(\underline{r}) = A(r) r_i r_j r_e + B(r) (r_i \delta_{je} + r_j \delta_{ie}) + D(r) r_e \delta_{ij} \\ = \langle u_i(\underline{x}) u_j(\underline{x}) u_e(\underline{x} + \underline{r}) \rangle$$

avec : A, F, G, B, D fonctions scalaires arbitraires de r^2 , toutes fonctions paires de r (isotropie)

$$R_{ij}(\underline{r}) \text{ symétrique en } i, j \quad R_{ij}(\underline{r}) = R_{ji}(\underline{r})$$

$$S_{ije}(\underline{r}) \text{ symétrique en } i, j \quad S_{ije}(\underline{r}) = S_{jie}(\underline{r})$$

Expression de $Q_i(\underline{r})$ tenseur d'ordre 1 :

$$Q_i(\underline{r}) = A(r) r_i$$

exemple : le tenseur $\langle p(\underline{x}) u_i(\underline{x}') \rangle$

la condition de continuité $\forall \underline{u} = 0$ donne :

$$* \quad \frac{\partial Q_i(\underline{r})}{\partial r_i} = 3A + r \frac{\partial A}{\partial r} = 0 \quad \forall \underline{r}$$

$$\begin{aligned} \langle p(\underline{x}) \frac{\partial u_i(\underline{x}')}{\partial x'_i} \rangle = 0 &= \left\langle \frac{\partial p(\underline{x}) u_i(\underline{x}')}{\partial x'_i} \right\rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial x'_i} \langle p(\underline{x}) u_i(\underline{x}') \rangle \\ &= \frac{\partial}{\partial r_i} Q_i(\underline{r}) = \frac{\partial}{\partial r_i} (A(r) r_i) \\ &= \frac{\partial}{\partial r} A(r) \frac{\partial r}{\partial r_i} r_i + A(r) \delta_{ii} \\ &= \frac{r_i}{r} r_i \frac{\partial A(r)}{\partial r} + 3A(r) \\ &= r \frac{\partial A}{\partial r} + 3A = 0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial Q_i(r)}{\partial r_i} = 0 = \left(3 + r \frac{\partial}{\partial r} \right) A = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^3 A) = 0$$

$$\Rightarrow r^3 A = \text{cte} \quad ; \quad A = \frac{\text{cte}}{r^3} \quad \text{vrai } \forall r$$

Si on suppose la régularité de $A(r)$ à l'origine ($r=0$) ; i.e. en excluant la possibilité que des solutions singulières apparaissent en turbulence, la seule solution possible est : $A(r) = 0$

$$* \quad \Rightarrow \quad Q_i(\underline{r}) \equiv 0 \quad \left(\text{tenseur isotrope d'ordre 1} \right) \\ \text{incompressible}$$

Expression de $R_{ij}(\underline{r})$ (ordre 2):

$$R_{ij}(\underline{r}) = \langle u_i(\underline{x}) u_j(\underline{x}') \rangle = F(r) r_i r_j + G(r) \delta_{ij}$$

$\underline{x}' = \underline{x} + \underline{r}$

* condition de continuité: $(\nabla \cdot \underline{u} = 0)$

$$\frac{\partial R_{ij}(\underline{r})}{\partial r_i} = 0$$

$$\left\langle \frac{\partial u_i}{\partial x_i}(\underline{x}) u_j(\underline{x}') \right\rangle \stackrel{\nabla \cdot \underline{u} = 0}{=} 0 = \left\langle \frac{\partial u_i(\underline{x}) u_j(\underline{x}')}{\partial x_i} \right\rangle$$

\underline{x}' et \underline{x} indépendants

$$= \frac{\partial}{\partial x_i} \langle u_i(\underline{x}) u_j(\underline{x}') \rangle$$

$$= -\frac{\partial}{\partial r_i} \langle u_i(\underline{x}) u_j(\underline{x}') \rangle = 0$$

$$\Rightarrow \frac{\partial R_{ij}(\underline{r})}{\partial r_i} = 0 \quad \forall \underline{r}$$

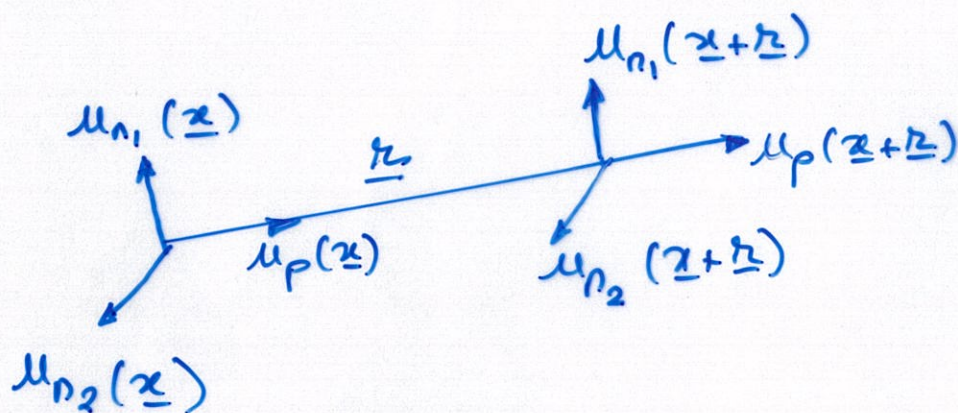
$$\frac{\partial R_{ij}(\underline{r})}{\partial r_i} = \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial r_i} F(r) r_i r_j + F(r) \frac{\partial r_i}{\partial r_i} r_j + F(r) r_i \frac{\partial r_j}{\partial r_i} \\ + \frac{\partial}{\partial r_i} G(r) \delta_{ij} \end{array} \right.$$

$$= \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial}{\partial r} F(r) \frac{r_i}{r} r_i r_j + F(r) \delta_{ii} r_j + F(r) r_i \delta_{ij} \\ + \frac{\partial}{\partial r} G(r) \frac{r_i}{r} \delta_{ij} \end{array} \right.$$

$$= \left(r \frac{\partial}{\partial r} F + 4F + \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial r} \right) r_j = 0 \quad \forall \underline{r}$$

$$\Rightarrow 4F + r \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial G}{\partial r} = 0$$

* Corrélations des vitesses longitudinales et latérales :



- { composantes longitudinales : u_p
 composantes latérales : u_{n_1}, u_{n_2} ($n_1 \equiv n_2$ par isotropie)

Dans ce référentiel :

$$\langle u_p(x) u_p(x+r) \rangle = r^2 F(r) + G(r) \equiv u^2 f(r)$$

$$\langle u_n(x) u_n(x+r) \rangle = G(r) \equiv u^2 g(r)$$

avec : $f(r), g(r)$: fonctions paires de r
 u = vitesse r.m.s de n'importe quelle
 } composante de la vitesse

$$u^2 = \langle u_p^2 \rangle = \langle u_n^2 \rangle = \frac{1}{3} \langle u_i u_i \rangle$$

$$R_{ij}(r) = F(r) r_i r_j + G(r) \delta_{ij}$$

dans le référentiel $\underline{r} = (r, 0, 0)$
 $f(r) \sim$ corrélation des vitesses $\parallel \bar{a} \underline{r}$
 $g(r) \sim$ " des vitesses $\perp \bar{a} \underline{r}$
 (les autres sont nulles)

$$\rightarrow \begin{cases} F = u^2 (f-g) / r^2 \\ G = u^2 g \end{cases} \quad (r^2 F + G = u^2 f)$$

+ condition d'incompressibilité $\Rightarrow g = f + \frac{1}{2} r f'$

$$\Rightarrow R_{ij}(r) = u^2 \left(\frac{f-g}{r^2} r_i r_j + g \delta_{ij} \right)$$

\Rightarrow remarque:

$i=j$ donne dans l'expression de $R_{ij}(r)$:

$$R_{ij}(r) = u^2 \left[-\frac{f'}{2r} r_i r_j + \left(f + \frac{r}{2} f' \right) \delta_{ij} \right]$$

$$\text{avec } f' = \frac{\partial f}{\partial r}(r)$$

$$R_{ii}(r) = u^2 \left[-\frac{f'}{2r} r_i^2 + \left(f + \frac{r}{2} f' \right) \delta_{ii} \right]$$

$$= u^2 [3f + r f'] = \underbrace{\left(3 + r \frac{\partial}{\partial r} \right)}_{\text{opérateur}} (u^2 f) \equiv 2R(r)$$

et opérateur

On a donc:

$$\begin{cases} R_{ij}(r) = u^2 \left(\frac{f-g}{r^2} r_i r_j + g \delta_{ij} \right) \\ g = f + \frac{1}{2} r \frac{\partial}{\partial r} f \end{cases}$$

$R_{ij}(r)$ est déterminé seulement par une fonction scalaire: le coefficient de corrélation des vitesses longitudinales. (f)

Tenseur isotrope d'ordre 3: $S_{ije}(\underline{r})$

$$* S_{ije}(\underline{r}) = \langle u_i(\underline{x}) u_j'(\underline{x}) u_e(\underline{x} + \underline{r}) \rangle$$

$$= \begin{cases} A(r) r_i r_j r_e + B(r) r_i \delta_{je} + C(r) r_j \delta_{ie} \\ + D(r) r_e \delta_{ij} \end{cases}$$

$$S_{ije}(\underline{r}) = S_{jie}(\underline{r}) \text{ symétrique en } i, j \rightarrow B(r) = C(r)$$

$$S_{ije}(\underline{r}) = A(r) r_i r_j r_e + B(r) (r_i \delta_{je} + r_j \delta_{ie}) + D(r) r_e \delta_{ij}$$

$$* \nabla \underline{u} = 0 \rightarrow \frac{\partial}{\partial r_e} S_{ije}(\underline{r}) = 0 \quad \forall \underline{r}$$

$$\rightarrow \begin{cases} 5A + r \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{2}{r} \frac{\partial B}{\partial r} = 0 \\ 2B + 3D + r \frac{\partial D}{\partial r} = 0 \end{cases}$$

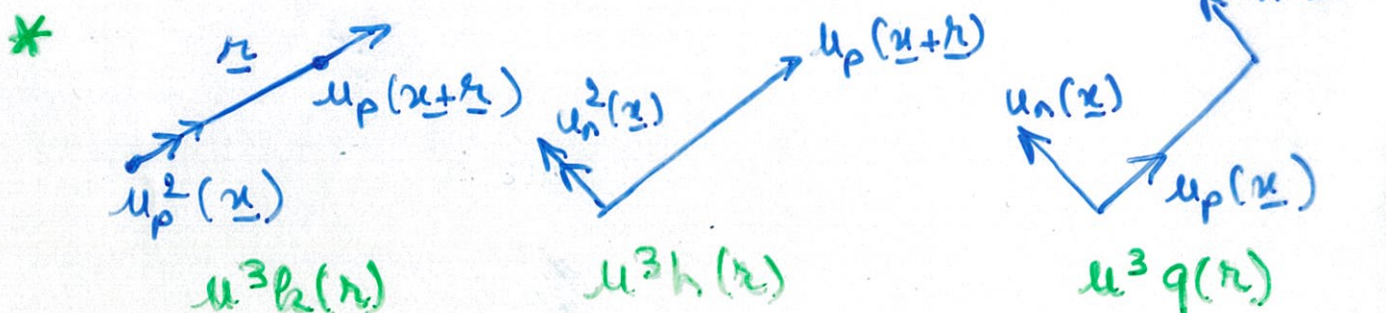
* donc, on a 3 inconnues et 2 équations : il manque une équation:

$$S_{iii}(\underline{r}) = \langle \underbrace{u_i(\underline{x}) u_i(\underline{x})}_{u_i^2(\underline{x}) \text{ scalaire}} u_e(\underline{x} + \underline{r}) \rangle = 0 \quad \forall \underline{r}$$

tenseur isotrope
d'ordre 1

$$S_{iii}(\underline{r}) = A(r) r^2 r_e + B(r) 2 r_i \delta_{ie} + D r_e \delta_{ii}$$

$$= (r^2 A(r) + 2B + 3D) r_e = 0 \quad \forall r_e$$



→ corrélations longitudinales et latérales.

$$\langle u_p^2(\underline{x}) u_p(\underline{x} + \underline{r}) \rangle = r(r^2 A + 2B + D) \equiv \mu^3 k(r)$$

$$\langle u_n^2(\underline{x}) u_p(\underline{x} + \underline{r}) \rangle = rD \equiv \mu^3 l(r)$$

$$\langle u_p(\underline{x}) u_n(\underline{x}) u_n(\underline{x} + \underline{r}) \rangle = rB \equiv \mu^3 q(r)$$

avec: $k(r), l(r), q(r)$ sont des fonctions impaires

$$\begin{cases} 5A + r \frac{\partial A}{\partial r} + \frac{2}{r} \frac{\partial B}{\partial r} = 0 \\ 2B + 3D + r \frac{\partial D}{\partial r} = 0 \\ r^2 A + 2B + 3D = 0 \end{cases}$$

$$\rightarrow S_{ije}(r) = \mu^3 \left[\underbrace{\frac{k - rk'}{2r^3}}_A r_i r_j r_e + \underbrace{\frac{2k + rk'}{4r}}_B (r_i \delta_{je} + r_j \delta_{ie}) - \underbrace{\frac{k}{2r}}_D r_e \delta_{ij} \right]$$

$$(k' = \frac{\partial k}{\partial r})$$

$k(r)$ est la seule fonction scalaire qui détermine les corrélations triples des vitesses.

remarque:

$$S_{iji}(r) = \frac{1}{2} \mu^3 \left[k' + \frac{4}{r} k \right] r_j \equiv \frac{1}{2} k(r) r_j$$

2) L'équation de von Kármán-Howarth (1938)

* On écrit les équations N.S. aux points \underline{x} et $\underline{x}' = \underline{x} + \underline{r}$, en notant $\underline{u}(\underline{x}) \equiv \underline{u}$ et $\underline{u}(\underline{x} + \underline{r}) \equiv \underline{u}'$

$$\begin{aligned} \underline{x} : \partial_t u_i &= - \frac{\partial u_i u_k}{\partial x_k} - \frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} \\ \underline{x}' : \partial_t u'_j &= - \frac{\partial u'_j u'_k}{\partial x'_k} - \frac{\partial p'}{\partial x'_j} + \nu \frac{\partial^2 u'_j}{\partial x'_k \partial x'_k} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \times u'_j \\ \times u_i \end{array} \right\}$$

* En ajoutant et en moyennant; on obtient

$$\begin{aligned} \langle \partial_t u_i u'_j \rangle &= - \left\langle u_i \frac{\partial u'_j u'_k}{\partial x'_k} + u'_j \frac{\partial u_i u_k}{\partial x_k} \right\rangle \\ &\quad - \left\langle u_i \frac{\partial p'}{\partial x'_j} + u'_j \frac{\partial p}{\partial x_i} \right\rangle \\ &\quad + \nu \left\langle u_i \frac{\partial^2 u'_j}{\partial x'_k \partial x'_k} + u'_j \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_k \partial x_k} \right\rangle \end{aligned}$$

* Remarques :

> la différentiation et la moyennisation permutent

$$\begin{aligned} > u_i \text{ est indépendante de } \underline{x}' \rightarrow \langle u_i \frac{\partial u'_j u'_k}{\partial x'_k} \rangle \\ &= \left\langle \frac{\partial u_i u'_j u'_k}{\partial x'_k} \right\rangle \end{aligned}$$

> $\langle u_i(\underline{x}) u_j(\underline{x}') \rangle$, $\langle u_i(\underline{x}) u_j(\underline{x}) u_k(\underline{x}') \rangle$
dépendent seulement de \underline{r} (homogénéité)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_k} \langle \cdot \rangle &\longrightarrow - \frac{\partial}{\partial x_k} \langle \cdot \rangle \\ 4 \quad \frac{\partial}{\partial x'_k} \langle \cdot \rangle &\longrightarrow \frac{\partial}{\partial x_k} \langle \cdot \rangle \end{aligned}$$

Ainsi l'équation précédente devient :

$$(*) \quad \partial_t R_{ij}(\underline{r}) = \frac{\partial}{\partial r_k} \left[\langle u_i u_k u'_j \rangle - \langle u_i u'_k u'_j \rangle \right] \\ + \left[\frac{\partial}{\partial r_i} \langle \rho u'_j \rangle - \frac{\partial}{\partial r_j} \langle \rho' u_i \rangle \right] \\ + 2\nu \frac{\partial^2 R_{ij}(\underline{r})}{\partial r_e \partial r_e}$$

- > les termes de pression sont identiquement nuls car ce sont des tenseurs solénoïdaux d'ordre 1
- > le terme non-linéaire est :

$$T_{ij}(\underline{r}) \equiv \frac{\partial S_{iej}(\underline{r})}{\partial r_k} - \frac{\partial S_{jli}(-\underline{r})}{\partial r_k}$$

- > en posant $i=j$ et en sommant sur toutes les valeurs de i , on obtient l'éq. de von Kármán-Howarth avec :

$$R_{ii}(\underline{r}) = u^2 (3f + rf') = 2R(r)$$

$$\nabla^2 R_{ii}(\underline{r}) = 2 \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) R(r)$$

$$T_{ii}(\underline{r}) = \frac{\partial}{\partial r_k} [S_{iei}(\underline{r}) - S_{iei}(-\underline{r})] = \left(r \frac{\partial}{\partial r} + 3 \right) k(r)$$

$$k(r) = u^3 \left(l' + \frac{4}{r} l \right)$$

$$\partial_t R(r) = \frac{1}{2} \left(r \frac{\partial}{\partial r} + 3 \right) k(r) + 2\nu \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) R(r)$$

→ une 1^{ère} intégrale de l'équation donne :

$$v_{KH}: \quad \partial_t \underbrace{(u^2 f)}_{\langle u_p(x) u_p(x+r) \rangle} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{4}{r} \right) \underbrace{(u^3 l)}_{\langle u_p^2(x) u_p(x+r) \rangle} + 2\nu \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) (u^2 f)$$

Précisions :

Prendre $i=j$ dans (*) donne :

$$\partial_t R_{ii}(r) = \frac{\partial}{\partial r_k} [S_{i i i}(r) - S_{i i i}(-r)] + 2\nu \frac{\partial}{\partial r_e} \left(\frac{\partial}{\partial r_e} R_{ii}(r) \right)$$

or : • $R_{ii}(r) = u^2 (3f + r f') = (3 + r \frac{\partial}{\partial r})(u^2 f) \equiv 2R(r)$

$$\begin{aligned} \bullet \frac{\partial}{\partial r_e} \left(\frac{\partial}{\partial r_e} R(r) \right) &= \frac{\partial}{\partial r_e} \left(\frac{\partial}{\partial r} R \frac{r_e}{r} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial r_e} \left(\frac{\partial R}{\partial r} \right) \frac{r_e}{r} + \frac{\partial R}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r_e} \left(\frac{r_e}{r} \right) \\ &= \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} \frac{r_e}{r} \frac{r_e}{r} + \frac{\partial R}{\partial r} \frac{1}{r} \delta_{ee} + \frac{\partial R}{\partial r} \frac{r_e}{r} \underbrace{\frac{\partial}{\partial r_e} \left(\frac{1}{r} \right)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) \frac{\partial r}{\partial r_e} \\ &= -\frac{1}{r^2} \cdot \frac{r_e}{r} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial r_e} \left(\frac{\partial}{\partial r_e} R(r) \right) = \frac{\partial^2 R}{\partial r^2} + \frac{3}{r} \frac{\partial R}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial R}{\partial r}$$

$$\left. \begin{aligned} \bullet \left\{ \begin{aligned} S_{i i i}(r) &\equiv \frac{1}{2} k(r) r_{i j}^k \\ S_{i i i}(-r) &= -\frac{1}{2} k(r) r_{i j}^k \end{aligned} \right\} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} S_{i i i}(r) - S_{i i i}(-r) &= \\ k(r) r_{i j}^k &= \\ \left[\frac{\partial}{\partial r} + \frac{4}{r} \right] (u^2 k) r_{i j}^k & \end{aligned}$$

En remplaçant dans l'équation ;

$$\partial_t (2R) = \left(r \frac{\partial}{\partial r} k + 3k \right) + 2\nu \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) (2R)$$

$$\partial_t \underline{R} = \frac{1}{2} \left(r \frac{\partial}{\partial r} + 3 \right) k + 2\nu \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} \right) \underline{R}$$

$$\underbrace{\left(3 + r \frac{\partial}{\partial r} \right) (u^2 f)}_{\text{opérateur } \mathcal{A}} \quad \mathcal{A} \quad \mathcal{A} (u^2 f)$$

opérateur \mathcal{A}

remarque : avec ;

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial n^2} + \frac{4}{n} \frac{\partial}{\partial n} \right) \left(n \frac{\partial}{\partial n} + 3 \right) = \left(n \frac{\partial}{\partial n} + 3 \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial n^2} + \frac{4}{n} \frac{\partial}{\partial n} \right)$$

→ une me intégrale de l'équation précédente donne :

$$\partial_t (u^2 f) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial n} + \frac{4}{n} \right) (u^3 k) + 2v \left(\frac{\partial^2}{\partial n^2} + \frac{4}{n} \frac{\partial}{\partial n} \right) (u^2 f)$$

Eq. VKH.

avec :

$$\begin{cases} u^2 f = \langle u_p(x) u_p(x+n) \rangle \\ u^3 k = \langle u_p(x) u_p(x) u_p(x+n) \rangle \end{cases}$$

s'écrit aussi :

$$\partial_t \langle u_p(x) u_p(x+n) \rangle = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial n} + \frac{4}{n} \right) \langle u_p^2(x) u_p(x+n) \rangle + 2v \left(\frac{\partial^2}{\partial n^2} + \frac{4}{n} \frac{\partial}{\partial n} \right) \langle u_p(x) u_p(x+n) \rangle$$

La loi des "4/5" de Keldysh :

On définit les fonctions de structure :

* d'ordre 2 :

$$\begin{aligned} B_{ia}(\underline{r}) &\equiv \langle \delta u_i(\underline{r}) \delta u_a(\underline{r}) \rangle \\ &= \langle (u_i(\underline{r}+\underline{r}) - u_i(\underline{r})) (u_a(\underline{r}+\underline{r}) - u_a(\underline{r})) \rangle \\ &= \langle u_i(\underline{r}+\underline{r}) u_a(\underline{r}+\underline{r}) \rangle - \langle u_i(\underline{r}) u_a(\underline{r}+\underline{r}) \rangle \\ &\quad - \langle u_i(\underline{r}+\underline{r}) u_a(\underline{r}) \rangle + \langle u_i(\underline{r}) u_a(\underline{r}) \rangle \\ &\stackrel{h}{=} 2 \langle u_i(\underline{r}) u_a(\underline{r}) \rangle - R_{ik}(\underline{r}) - R_{ki}(\underline{r}) \\ &= 2 \langle u_i(\underline{r}) u_a(\underline{r}) \rangle - 2 R_{ia}(\underline{r}) \end{aligned}$$

→ en particulier : (p = composante // \vec{a} \underline{r}) :

$$\begin{aligned} B_{pp}(\underline{r}) &= 2 \langle u_p(\underline{r}) u_p(\underline{r}) \rangle - 2 \langle u_p(\underline{r}) u_p(\underline{r}+\underline{r}) \rangle \\ &\Rightarrow \langle u_p(\underline{r}) u_p(\underline{r}+\underline{r}) \rangle = -\frac{1}{2} B_{pp}(\underline{r}) + \langle u_p^2(\underline{r}) \rangle \end{aligned}$$

* d'ordre 3 :

$$\begin{aligned} B_{iie}(\underline{r}) &\equiv \langle \delta u_i(\underline{r}) \delta u_e(\underline{r}) \delta u_e(\underline{r}) \rangle \\ &= 2 S_{iie}(\underline{r}) + 2 S_{iei}(\underline{r}) + 2 S_{iee}(\underline{r}) \end{aligned}$$

→ en particulier :

$$\begin{aligned} B_{ppp}(\underline{r}) &= 6 \langle u_p^2(\underline{r}) u_p(\underline{r}+\underline{r}) \rangle \\ &\Rightarrow \langle u_p^2(\underline{r}) u_p(\underline{r}+\underline{r}) \rangle = \frac{1}{6} B_{ppp}(\underline{r}). \end{aligned}$$

Remarque : $\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \langle u_i(\underline{r}) u_i(\underline{r}) \rangle = -\varepsilon$
et $\langle u_p^2(\underline{r}) \rangle = \frac{1}{3} \langle u_i(\underline{r}) u_i(\underline{r}) \rangle$ isotropie.

et donc $\frac{\partial E}{\partial t} = -\varepsilon = \frac{3}{2} \frac{\partial}{\partial t} \langle \mu_p^2(\underline{x}) \rangle$

en remplaçant dans l'équation V.K.H; on obtient

$$\partial_t \left[-\frac{1}{2} B_{pp}(\underline{x}) + \langle \mu_p^2(\underline{x}) \rangle \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial n} + \frac{4}{n} \right) \left[\frac{1}{6} B_{ppp}(\underline{x}) \right]$$

$$\left. \vphantom{\partial_t} \right\} + 2\nu \left(\frac{\partial^2}{\partial n^2} + \frac{4}{n} \frac{\partial}{\partial n} \right) \left(-\frac{1}{2} B_{pp}(\underline{x}) \right)$$

soit en utilisant la remarque

$$-\frac{1}{2} \partial_t B_{pp} - \frac{2}{3} \varepsilon = \frac{1}{6} \frac{1}{n^4} \frac{\partial}{\partial n} (n^4 B_{ppp}) - \nu \frac{1}{n^4} \frac{\partial}{\partial n} (n^4 \frac{\partial}{\partial n} B_{pp})$$

sous les hypothèses suivantes:

H1 on peut prendre la limite $t \rightarrow \infty$ (état stationnaire) et dans cette limite (ε fixe); ε est fini par unité de masse.

H2 on peut ensuite prendre la limite $\nu \rightarrow 0$ (ε restant fixe), on reste dans la zone inertielle où ν n'a pas d'influence

\Rightarrow dans la zone inertielle:

$$-\frac{2}{3} \varepsilon = \frac{1}{6} \frac{1}{n^4} \frac{\partial}{\partial n} (n^4 B_{ppp})$$

soit $B_{ppp} = \langle (\delta \mu_p(\underline{x}))^3 \rangle = -\frac{4}{5} \varepsilon n$ "Loi des 4/5"

nota: en considérant le terme de forçage dans les équations de N.S., on utilise;

H3 le terme de forçage n'agit qu'à grande échelle, et donc s'élimine

La loi des "4/3" :

On considère :

$$\begin{aligned} B_{nnp}(\underline{r}) &= 2 S_{nnp}(\underline{r}) + 2 S_{npp}(\underline{r}) + 2 S_{npp}(\underline{r}) \\ &= \frac{4}{3} S_{nnp}(\underline{r}) + 4 S_{npp}(\underline{r}) \\ &= 2\pi D + 4\pi B \end{aligned}$$

(m composante $\perp \underline{a} \underline{r}$ ($n_1 \sim n_2$); p composante $\parallel \underline{a} \underline{r}$)

l'incompressibilité donne $2B + 3D + r \frac{\partial D}{\partial r} = 0$

$$\text{i.e. } B = -\frac{3}{2} D - \frac{1}{2} r \frac{\partial D}{\partial r}$$

donc :

$$B_{nnp} = 2\pi D + 4\pi \left[-\frac{3}{2} D - \frac{1}{2} r \frac{\partial D}{\partial r} \right] = -4\pi D - 2\pi^2 \frac{\partial D}{\partial r}$$

$$B_{nnp} = -\frac{2}{\partial r} [2\pi^2 D]$$

$$\text{or } B_{ppp} = 6 S_{ppp} = -6(2\pi D) \Rightarrow -2\pi D = \frac{1}{6} B_{ppp}$$

on a ainsi :

$$B_{nnp} = \frac{1}{6} \frac{\partial}{\partial r} (r B_{ppp})$$

et dans la zone inertielle $B_{nnp} = \frac{1}{6} \frac{\partial}{\partial r} \left(-\frac{4}{5} \varepsilon r^2 \right) = -\frac{4}{15} \varepsilon r$

On considère maintenant la quantité $\langle \delta u_p (\delta u_i)^2 \rangle$

$$\langle \delta u_p (\delta u_i)^2 \rangle = \langle \delta u_p (\delta u_p^2 + \delta u_n^2 + \delta u_n^2) \rangle$$

$$= B_{ppp} + 2 B_{pnn}$$

→ Dans la zone inertielle (mêmes limites que dans le cas de la loi des 4/5)

$$\langle \delta u_p (\delta u_i)^2 \rangle = -\frac{4}{5} \varepsilon r - 2 \cdot \frac{4}{15} \varepsilon r$$

$$\boxed{\langle \delta u_p (\delta u_i)^2 \rangle = -\frac{4}{3} \varepsilon r} \quad \text{"Loi des 4/3"}$$

La loi des "5/3"

- * A partir de la loi des "4/5", notée ici :

$$\langle (\delta v_{||}(\underline{e}))^3 \rangle = -\frac{4}{5} \varepsilon \ell$$

dans la zone inertielle $\ell_2 \ll \ell \ll \ell_0$

- * L'hypothèse d'auto-similarité :

$$\delta v(\underline{x}, \lambda \underline{e}) \stackrel{\text{stat.}}{=} \lambda^h \delta v(\underline{x}, \underline{e})$$

donne :

$$\langle (\delta v_{||}(\lambda \underline{e}))^3 \rangle = \lambda^{3h} \langle (\delta v_{||}(\underline{e}))^3 \rangle = -\frac{4}{5} \varepsilon (\lambda \ell)$$

⇒ seule possibilité $h = 1/3$

- * Pour les fonctions de structures d'ordre p ; $S_p \equiv \langle [\delta v_{||}(\underline{e})]^p \rangle$
comme $(\varepsilon \ell)^{p/3}$ a la même dimension que S_p , on a :

$$S_p(\ell) = C_p \varepsilon^{p/3} \ell^{p/3}$$

($C_p = \text{cte}$ sans dimension; indépendante de Reynolds, puisque $Re \rightarrow \infty$ limite est déjà prise)

- * Pour $p=2$ $S_2(\ell) = C_2 \varepsilon^{2/3} \ell^{2/3}$

$$\text{on } k E(k) \sim S_2(\ell) = \langle (\delta v_{||}(\underline{e}))^2 \rangle \sim \varepsilon^{2/3} \ell^{2/3}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E(k) = C \varepsilon^{2/3} k^{-5/3} = C \varepsilon^{2/3} \ell^{-5/3} \\ \ell_0 \ll \ell \ll \ell_2. \end{array} \right.$$

"Loi des 5/3"

Remarques = lien entre la fonction spectrale $E(k)$ et le tenseur de corrélation d'ordre 2

* on rappelle que, dans le cas isotrope, on définit:

$$\begin{aligned} \frac{E(k)}{2k^2\pi} &= \phi_{ii}(k) = \frac{1}{8\pi^3} \int \underbrace{R_{ii}(r)}_{\equiv 2R(r)} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} \\ &= \frac{1}{8\pi^3} \int_0^\infty 2R(r) dr \int_0^\pi r d\theta \int_0^{2\pi} r \sin\theta d\varphi e^{-ikr \cos\theta} \\ \frac{E(k)}{2\pi k^2} &= \frac{1}{8\pi^3} \int_0^\infty 2R(r) r^2 dr \underbrace{\int_0^\pi \sin\theta e^{-ikr \cos\theta} d\theta}_{\left[\frac{e^{-ikr \cos\theta}}{ikr} \right]_0^\pi} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \\ &= \frac{2}{kr} \sin kr \end{aligned}$$

on obtient donc: $E(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty R(r) kr \sin kr dr$

* de même, avec $R_{ii}(r) = 2R(r) = \int \phi_{ii}(k) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{k}$

on obtient: $R(r) = \int_0^\infty E(k) \frac{\sin kr}{kr} dk$

* en remarquant que $2R(r) \equiv (3 + r \frac{\partial}{\partial r})(u^2 f)$, avec $u^2 f(r) \equiv R_{pp}(r)$, on peut montrer que:

$$R_{pp}(r) = R_{pp}(r) = \int_0^\infty 2E(k) \frac{1}{k^2 r^2} \left[\frac{\sin kr}{kr} - \cos kr \right] dk$$

* de même, il existe une relation entre la fonction de structure $B_{pp}(r)$ et $E(k)$ (cf. exercices).

Remarques = lien entre la fonction spectrale $E(k)$ et le tenseur de corrélation d'ordre 2

* on rappelle que, dans le cas isotrope, on définit:

$$\begin{aligned} \frac{E(k)}{2k^2\pi} &= \phi_{ii}(k) = \frac{1}{8\pi^3} \int \underbrace{R_{ii}(r)}_{\equiv 2R(r)} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{r} \\ &= \frac{1}{8\pi^3} \int_0^\infty 2R(r) dr \int_0^\pi r d\theta \int_0^{2\pi} r \sin\theta d\varphi e^{-ikr \cos\theta} \\ \frac{E(k)}{2\pi k^2} &= \frac{1}{8\pi^3} \int_0^\infty 2R(r) r^2 dr \underbrace{\int_0^\pi \sin\theta e^{-ikr \cos\theta} d\theta}_{\left[\frac{e^{-ikr \cos\theta}}{-ikr} \right]_0^\pi} \underbrace{\int_0^{2\pi} d\varphi}_{2\pi} \\ &= \frac{2}{kr} \sin kr \end{aligned}$$

on obtient donc: $E(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty R(r) kr \sin kr dr$

* de même, avec $R_{ii}(r) = 2R(r) = \int \phi_{ii}(k) e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{r}} d\mathbf{k}$

on obtient: $R(r) = \int_0^\infty E(k) \frac{\sin kr}{kr} dk$

* en remarquant que $2R(r) \equiv (3 + r \frac{\partial}{\partial r})(u^2 f)$, avec $u^2 f(r) \equiv R_{pp}(r)$, on peut montrer que:

$$R_{pp}(r) = R_{pp}(r) = \int_0^\infty 2E(k) \frac{1}{k^2 r^2} \left[\frac{\sin kr}{kr} - \cos kr \right] dk$$

* de même, il existe une relation entre la fonction de structure $B_{pp}(r)$ et $E(k)$ (cf. exercices).

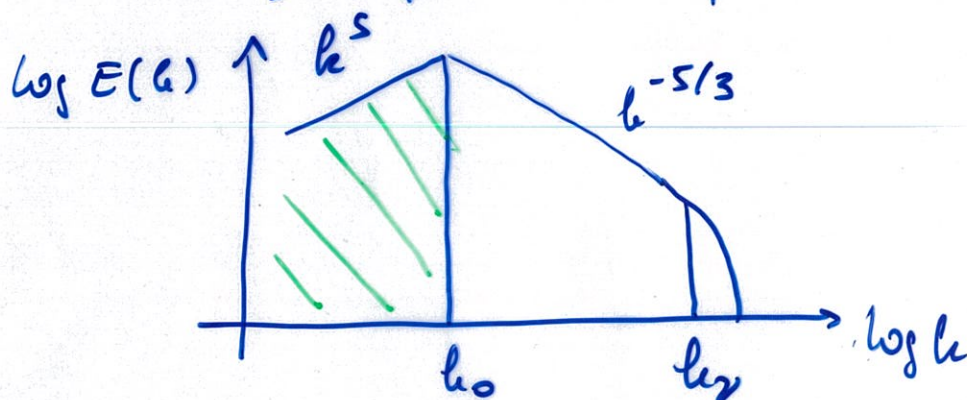
La loi des "10/7" sur le déclin temporel de l'énergie :

* On considère maintenant un écoulement dans lequel l'agitation (proue) est communiquée seulement à l'instant initial, l'écoulement évolue ensuite par lui-même (régime de déclin temporel)

• On suppose un spectre d'énergie de la forme :

$$E(k) \sim k^s \text{ pour } k \rightarrow 0 \quad (k \ll k_0)$$

avec $s > 0$; et pour un Reynolds $Re \gg 1$



On suppose qu'il existe un intervalle de temps ΔT
 $\Delta T = [t_* \leq t \leq t_{diss}]$ pendant lequel les grandes échelles prédominent ("principe de la permanence des grandes échelles") ; alors $E(k) \sim k^s$ ($k \rightarrow 0$) domine l'énergie cinétique totale :

$$E = \frac{1}{2} \langle \underline{v}^2 \rangle = \frac{1}{2} v_0^2 \sim l_0^{-(s+1)}$$

avec v_0 vitesse rms associée à l_0 l'échelle intégrale

qui donne : $v_0^2 l_0^{s+1} \sim \text{cte}$

- Supposons maintenant que l'échelle intégrale et l'énergie suivent une loi auto-similaire en temps

$$\begin{cases} l_0 \sim t^\beta \\ v_0^2 \sim t^{-\alpha} \end{cases}$$

dans l'intervalle ΔT ; i.e. après que l'énergie commence à décroître (t_*) et avant la période finale de dissipation (t_{diss})

* à partir de $v_0^2 l_0^{s+1} \sim \text{cte} \rightarrow -\alpha + \beta(s+1) = 0$

* le taux de dissipation d'énergie est donné par:

$$\frac{dE}{dt} \sim \frac{d}{dt} v_0^2 \sim -\varepsilon \sim \frac{v_0^2}{t_{NL} l_0} \sim \frac{v_0^3}{l_0}$$

(avec $t_{NL} l_0$ le temps de retournement à l'échelle l_0 ; $\frac{l_0}{v_0}$)

$$\frac{d}{dt} v_0^2 \sim \frac{v_0^3}{l_0} \sim t^{-\frac{3}{2}\alpha} t^{-\beta} \sim t^{-(\alpha+1)}$$

donne $\frac{3}{2}\alpha + \beta = \alpha + 1$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{2(s+1)}{s+3}; \quad \beta = \frac{2}{s+3}$$

$s=4$: $E(t) \sim t^{-10/7}$; $l_0 \sim t^{2/7}$ (Kolmogorov 1941)

$s=2$: $E(t) \sim t^{-6/5}$; $l_0 \sim t^{2/5}$ (Saltzman 1967)

(note: $Re \sim \frac{u_0 l_0}{\nu} \sim t^{-\alpha/2 + \beta} \sim t^{(s-1)/(s+3)}$)

cas particulier: $\beta=0$; l'échelle intégrale est constante; alors on a seulement $\frac{dE}{dt} \sim t^{-\alpha-1} \sim t^{-3\alpha/2} \Rightarrow \alpha=2$
 $E \sim t^{-2}$ (vérifiée en Labo.)

Bilan d'énergie dans l'espace spectral et flux d'énergie:

On ré-écrit l'équation de vkh sous la forme:

$$\partial_t \frac{1}{2} \langle \underline{v}(\underline{x}) \underline{v}(\underline{x}+\underline{r}) \rangle = \frac{1}{4} \nabla_{\underline{r}} \langle |\delta \underline{v}(\underline{r})|^2 \delta \underline{v}(\underline{r}) \rangle + \nu \nabla_{\underline{r}}^2 \langle \underline{v}(\underline{x}) \cdot \underline{v}(\underline{x}+\underline{r}) \rangle + \langle \underline{v}(\underline{x}) \cdot \frac{f(\underline{x}+\underline{r}) + f(\underline{x}-\underline{r})}{2} \rangle$$

terme de force.

en prenant la transformée de Fourier par rapport à \underline{r} il vient:

$$(1) \quad \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\underline{r} \partial_t \frac{1}{2} \langle \underline{v}(\underline{x}) \underline{v}(\underline{x}+\underline{r}) \rangle \xrightarrow{e^{-i\underline{k} \cdot \underline{r}}} \frac{1}{(2\pi)^3} \int d\underline{r} e^{-i\underline{k} \cdot \underline{r}} \left[\frac{1}{4} \nabla_{\underline{r}} \langle |\delta \underline{v}(\underline{r})|^2 \delta \underline{v}(\underline{r}) \rangle + \nu \nabla_{\underline{r}}^2 \langle \underline{v}(\underline{x}) \underline{v}(\underline{x}+\underline{r}) \rangle + \langle \underline{v}(\underline{x}) \frac{f(\underline{x}+\underline{r}) + f(\underline{x}-\underline{r})}{2} \rangle \right]$$

En définissant:

$$\mathcal{E}(\underline{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{2} \langle \underline{v}(\underline{x}) \underline{v}(\underline{x}+\underline{r}) \rangle e^{-i\underline{k} \cdot \underline{r}} d\underline{r}$$

$$\mathcal{F}(\underline{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \langle \underline{v}(\underline{x}) \frac{f(\underline{x}+\underline{r}) + f(\underline{x}-\underline{r})}{2} \rangle e^{-i\underline{k} \cdot \underline{r}} d\underline{r}$$

$$\mathcal{T}(\underline{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int \frac{1}{4} \nabla_{\underline{r}} \langle |\delta \underline{v}(\underline{r})|^2 \delta \underline{v}(\underline{r}) \rangle e^{-i\underline{k} \cdot \underline{r}} d\underline{r}$$

$$(1) \text{ s'écrit: } \frac{\partial}{\partial t} \mathcal{E}(\underline{k}) = \mathcal{T}(\underline{k}) - 2\nu k^2 \mathcal{E}(\underline{k}) + \mathcal{F}(\underline{k}) \quad (2)$$

Dans le cas isotrope, les quantités ne dépendent plus de la direction de \underline{k} mais de $k = |\underline{k}|$, en intégrant sur les angles, on définit :

$$E(k) = 4\pi k^2 \mathcal{E}(k)$$

$$F(k) = 4\pi k^2 \mathcal{F}(k)$$

$$T(k) = 4\pi k^2 \mathcal{T}(k)$$

et (2) s'écrit alors :

$$\frac{\partial}{\partial t} \underbrace{E(k)}_{\text{énergie}} = \underbrace{T(k)}_{\text{transfert non-linéaire}} - \underbrace{2\nu k^2 E(k)}_{\text{dissipation}} + \underbrace{F(k)}_{\text{forçage}}$$

On définit le flux d'énergie $\Pi(k)$ afin de quantifier le "taux de cascade" (Richardson) :

$$\Pi(k) = - \int_0^k T(k) dk = - \int \mathcal{T}(k) dk$$

de façon à ce que $T(k) = - \frac{\partial}{\partial k} \Pi(k)$

le flux d'énergie a pour expression :

$$\Pi(k) = + \frac{1}{(2\pi)^3} \int_{|\underline{k}'| < k} d\underline{k}' \int \left[-\frac{1}{4} \nabla_{\underline{r}} \cdot \langle (\delta \underline{u}(\underline{r}))^2 \delta \underline{u}(\underline{r}) \rangle \right] e^{-i\underline{k} \cdot \underline{r}} d\underline{r}$$

$E(k)$
(contribution des termes non linéaires)

$\Pi(k)$ peut s'écrire plus simplement :

$$\Pi(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty dr \frac{\sin(kr)}{r} \left(1 + r \frac{\partial}{\partial r}\right) E(r)$$

en utilisant la transformée de Fourier
d'une fonction isotrope:

$$\hat{f}(\underline{k}) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int f(\underline{r}) e^{-i\underline{k} \cdot \underline{r}} d\underline{r}$$

$$\text{et } f(\underline{r}) = \int \hat{f}(\underline{k}) e^{i\underline{k} \cdot \underline{r}} d\underline{k}$$

s'écrivent pour une fonction isotrope, en
coordonnées sphériques (r ou k , θ , φ)

$$f(\underline{r}) = f(r) = \int_0^\infty dk \int_0^\pi k d\theta \int_0^{2\pi} k \sin\theta d\varphi e^{+i\underline{k} \cdot \underline{r}} \hat{f}(k)$$

(idem pour $\hat{f}(k)$)

$$\text{qui donne : } \left\{ \begin{array}{l} f(r) = \int_0^\infty 4\pi k^2 \frac{\sin kr}{kr} \hat{f}(k) dk \\ \hat{f}(k) = \frac{1}{(2\pi)^3} \int_0^\infty 4\pi r^2 \frac{\sin kr}{kr} f(r) dr. \end{array} \right.$$

et: en notant $F(k) = 4\pi k^2 \hat{f}(k)$

on obtient $F(k) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty kr \sin(kr) f(r) dr$

Leçon 7 : Fonctions de structures et exposants d'échelles

★ **définitions**

★ **résultats exacts**

★ **résultats expérimentaux**

★ **caractérisation de l'intermittence**

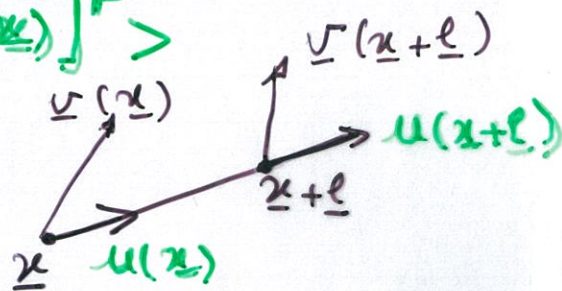
★ **modèles d'intermittence**

Définitions

Les statistiques en 2 points sont décrites à l'aide des moments d'ordre p des différences (incrément) de vitesse sur une distance $l \equiv$ "fonctions de structures d'ordre p ".

$$\langle \delta v_l^p \rangle \equiv \langle [u(x+l) - u(x)]^p \rangle$$

$$\text{avec } \begin{cases} u = \underline{v} \cdot \frac{l}{e} \\ l_v \ll l \ll l_0 \end{cases}$$



(incrément longitudinal)

Supposons que, dans la zone inertielle,

$$\langle \delta v_l^p \rangle \sim l^{\zeta_p}; \quad \zeta_p = \text{exposant d'échelle}$$

Propriétés exactes des ζ_p :

- 1) Si les fluctuations de vitesse sont bornées (en espace, et en temps) par u_{\max} (supposée finie); alors:

$$\longrightarrow \zeta_{2p+2} \geq \zeta_{2p} \quad (p=1, 2, 3, \dots)$$

en effet: $|\delta v_l| = |u(x+l) - u(x)| \leq 2 u_{\max}$.

$$\langle (\delta v_l)^{2p+2} \rangle \leq 4 u_{\max}^2 \langle (\delta v_l)^{2p} \rangle$$

$$\left. \begin{array}{l} \langle \delta v_l^{2p} \rangle \sim l^{\zeta_{2p}} \\ l_v \ll l \ll l_0 \end{array} \right\} \longrightarrow \frac{\langle (\delta v_l)^{2p} \rangle}{v_0^{2p}} \approx \underbrace{A_{2p}}_{\text{cte } > 0} \left(\frac{l}{l_0} \right)^{\zeta_{2p}}$$

cte > 0 , indépendante du Reynolds

$$\langle (\delta v_e)^{2p+2} \rangle \leq 4 u_{\max}^2 \langle (\delta v_e)^{2p} \rangle$$

$$v_0^{2p+2} A_{2p+2} \left(\frac{l}{l_0}\right)^{\zeta_{2p+2}} \leq 4 u_{\max}^2 v_0^{2p} A_{2p} \left(\frac{l}{l_0}\right)^{\zeta_{2p}}$$

$$\frac{u_{\max}^2}{v_0^2} \geq \frac{1}{4} \frac{A_{2p+2}}{A_{2p}} \left(\frac{l}{l_0}\right)^{(\zeta_{2p+2} - \zeta_{2p})} \quad (l_2 \ll l \ll l_0)$$

Faisons maintenant $l_2/l_0 \rightarrow 0$ (i.e. $\nu \rightarrow 0, Re \rightarrow \infty$) et $l/l_0 \rightarrow 0$ avec l/l_2 fixé; si $\zeta_{2p+2} \leq \zeta_{2p}$ alors $u_{\max} \rightarrow \infty$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

$$2) \rightarrow \zeta_{p+q} \geq \frac{1}{2} (\zeta_{2p} + \zeta_{2q}) \quad \forall p, q > 0$$

$$\text{en effet: } \langle |\delta u(e)|^{p+q} \rangle \leq \left[\langle |\delta u(e)|^{2p} \rangle \langle |\delta u(e)|^{2q} \rangle \right]^{1/2}$$

par l'inégalité de Schwarz

$$\text{soit: } v_0^{p+q} A_{p+q} \left(\frac{l}{l_0}\right)^{\zeta_{p+q}} \leq v_0^{\frac{2p}{2}} A_{2p}^{1/2} \left(\frac{l}{l_0}\right)^{\zeta_{2p}/2} v_0^{\frac{2q}{2}} A_{2q}^{1/2} \left(\frac{l}{l_0}\right)^{\zeta_{2q}/2}$$

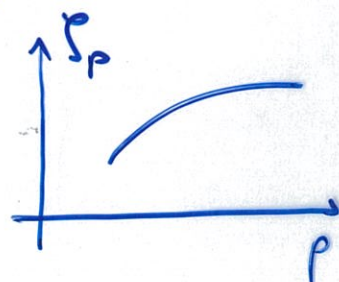
$$A_{p+q} \left(\frac{l}{l_0}\right)^{\zeta_{p+q}} \leq A_{2p}^{1/2} A_{2q}^{1/2} \left(\frac{l}{l_0}\right)^{\frac{1}{2}(\zeta_{2p} + \zeta_{2q})}$$

$$\left(\frac{l}{l_0}\right)^{\zeta_{p+q} - \frac{1}{2}(\zeta_{2p} + \zeta_{2q})} \leq \frac{A_{2p}^{1/2} A_{2q}^{1/2}}{A_{p+q}}$$

En faisant à nouveau $l/l_0 \rightarrow 0$, comme précédemment, on obtient: $\zeta_{p+q} \geq \frac{1}{2} (\zeta_{2p} + \zeta_{2q})$

$$\text{avec } \begin{cases} p+q = p_0 \\ 2p = p_0 + h \\ 2q = p_0 - h \end{cases}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \zeta_p}{d^2 p} \leq 0$$



Résultats expérimentaux

La phénoménologie de Kolmogorov conduit à :

$$\langle (\delta v_e)^p \rangle = C_p (\varepsilon l)^{p/3}$$

avec la relation exacte, dans la zone inertielle,

$$\langle (\delta v_e)^3 \rangle = -\frac{4}{5} \varepsilon l$$

ce qui donne pour les exposants d'échelle la loi linéaire :

$$\zeta_p = p/3 \quad \forall p \geq 0$$

Or expérimentalement, et numériquement, les fonctions de structures modifiées

$$\langle |\delta v_e|^p \rangle = \langle |u(x+l) - u(x)|^p \rangle$$

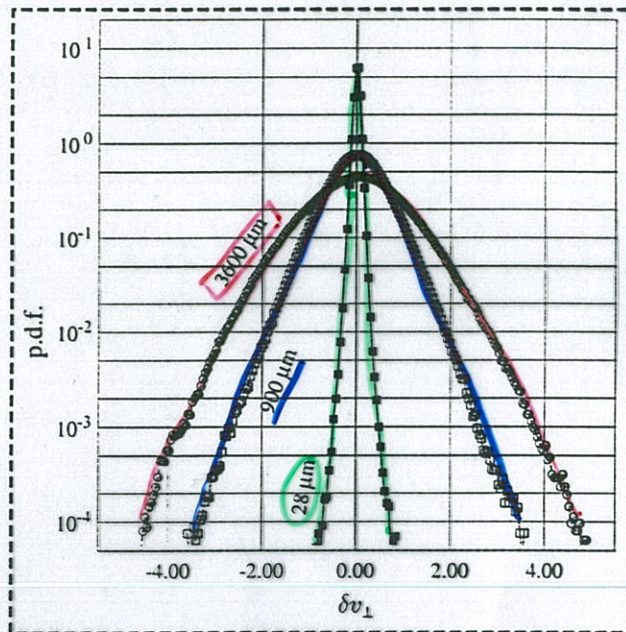
ne suivent pas cette loi linéaire ; ils s'en écartent d'autant plus que p croît.

→ nombreuses tentatives pour décrire le comportement non linéaire des ζ_p quand $p \uparrow$

Alors, qu'est ce qui ne marche pas dans la théorie de Kolmogorov ?!

- > On pense que c'est l'intermittence qui apporte les corrections aux exposants d'échelle
- > lié à l'observation que les structures à petite échelle sont rares en espace comme en temps intenses.

Les p.d.f. des incréments de vitesse dépendent elles de l'échelle.



(U. Frisch, 1995)

Pdf des incréments transverses dans un jet turbulent obtenus par la technique RELIEF de marquage de l'écoulement (A. Nouillez et al.). Echelle de Kolmogorov $\eta = 16 \mu\text{m}$

→ Quand $l \downarrow$, les pdf sont de moins en moins gaussiennes i.e. des fluctuations très intenses du champ deviennent plus probables quand l'échelle décroît, à cause de la forte localisation des structures intenses.

- ANSELI
- ASHUR
- BACRY
- Cc*
- BASDE
- BENZI
- BRACH
- J.*
- BRACH
- CASTA
- CURRY
- FRISCI
- GOTTI
- R*
- HERR
- KERR
- KERR
- KOLM
- KOLM
- KRAI
- KRAI
- LEGR
- LUNI
- McW
- MONI
- NELP
- NOVI
- OBOU
- ORSZ
- ORSZ
- PARI
- PAT
- SCHU
- SHE
- SHE
- SIGG
- SIGG
- TEN
- TSI
- VAN
- VIE
- VIE
- YAI

$\delta v_x(r)$
 $r = 0.05$
 proche
 de l'échelle
 de dissipation

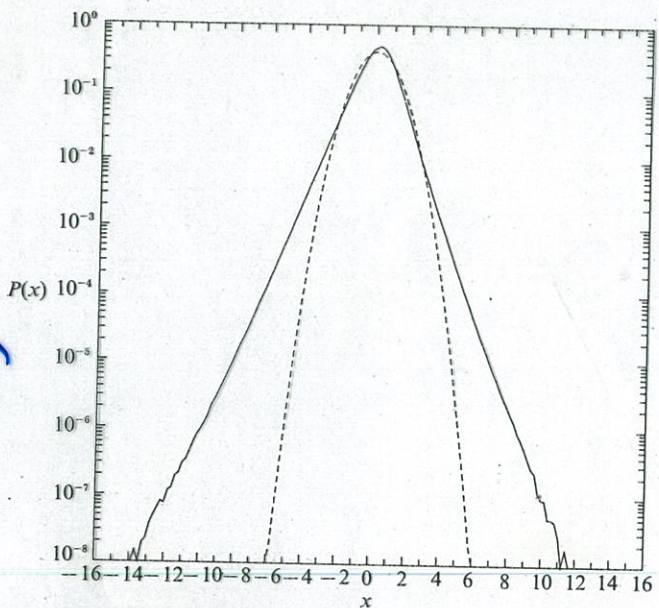


FIGURE 7. Probability distribution of $\delta v_x(r) = v_x(x+r) - v_x(x)$ for $r = 0.05$ (a dissipation scale), normalized so that $\sigma = 1$, shown together with a Gaussian distribution (dashed line).

$r = 0.39$
 échelle
 inertielle

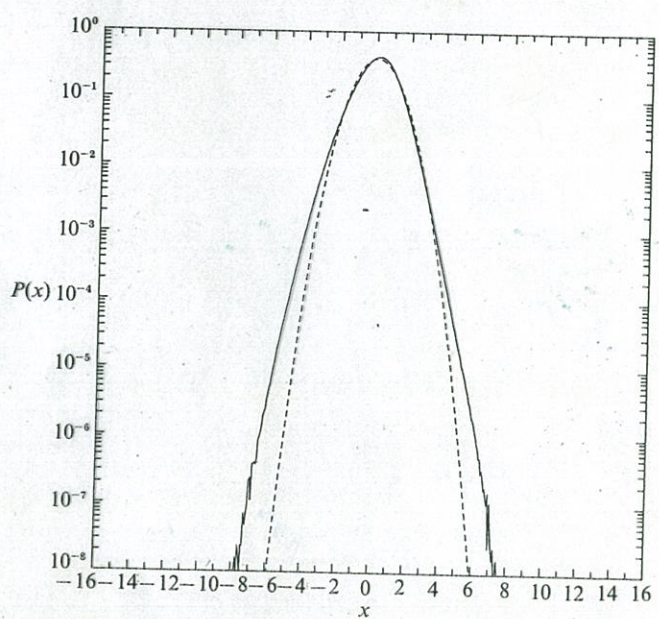


FIGURE 8. Same as figure 7 with $r = 0.39$, a typical inertial-range scale.

Kraichnan (1990) has obtained them from a closure model. This curvature is more pronounced for the distribution of lateral derivatives $\partial_y v_x$, shown in figure 2. It is known (see for instance She *et al.* 1988) that the large wings of these distributions are due mainly to small-scale velocity fluctuations. It is therefore important to know whether the non-exponential wings could come from a lack of resolution in the calculation. We have recomputed the distribution with a velocity field obtained by filtering the highest wavenumbers so that the non-physical tail (figure 2) disappears.

(from U. Frisch, 1995)

• experimental data

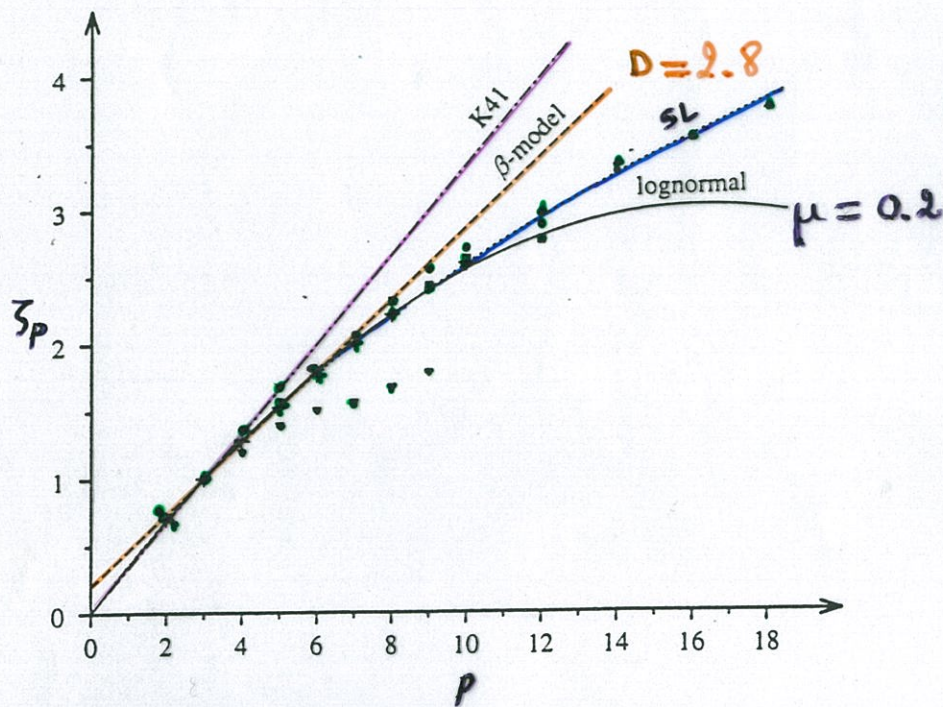


Fig. 8.8. Exponent ζ_p of structure functions in the time domain of order p vs p . Inverted white triangles: data from Van Atta and Park (1972); black circles, white squares and black triangles: data from Anselmetti, Gagne, Hopfinger and Antonia (1984) with $R_\lambda = 515, 536, 852$, respectively; + signs: S1 data processed by 'ESS' (see p. 132). Straight chain line: $\zeta_p = p/3$ (K41); dashed line: β -model (eq. (8.31)) with $D = 2.8$; solid line: lognormal model (eq. (8.122)) with $\mu = 0.2$; dotted line: log-Poisson model (eq. (8.141)).

K41 : $\zeta_p = p/3$

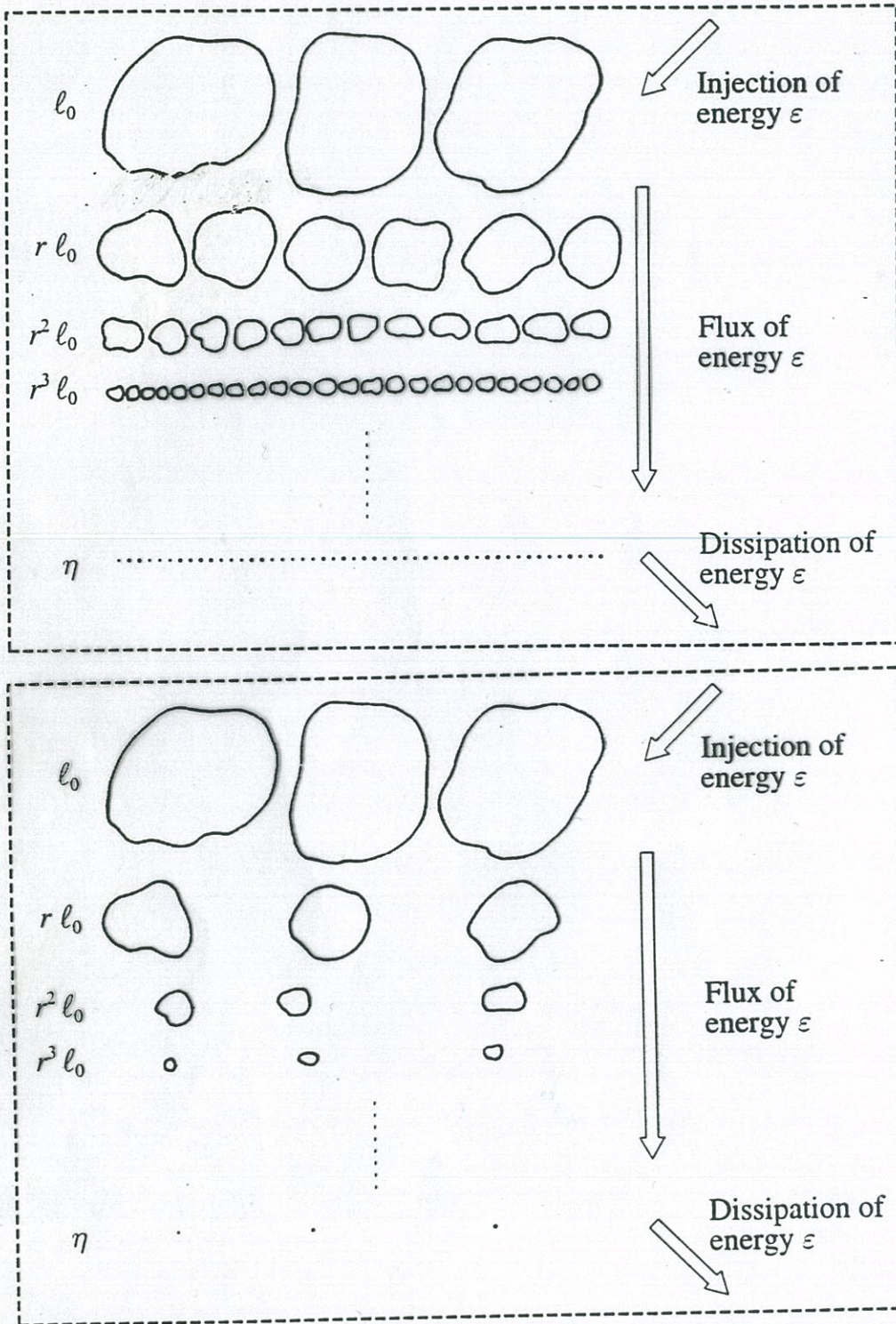
Lognormal : $\zeta_p = p/3 + \frac{\mu}{18} (3p - p^2)$ (Kolmogorov-Obukhov 1962)

β -model : $\zeta_p = p/3 + (3-D)(1-p/3)$ (Frisch et al. 1978)

SL : $\zeta_p = p/9 + 2(1 - (2/3)^{p/3})$ (She & Lévéque 1994)

interprétation:

Cascade de Richardson modifiée



→ transport sporadique = seule une petite fraction des tourbillons à petite échelle ($l \ll l_0$) est "active" pour effectuer le transfert d'énergie, les autres restant au repos.

Caractérisation de l'intermittence

- ▶ détermination des exposants d'échelle S_p et caractérisation de leur écart à la loi linéaire $p/3$
- ▶ écart à la gaussiannité des p.d.f quand l'échelle décroît, caractérisation des p.d.f. par leur dépendance en échelle.

La source fondamentale du problème avec la théorie K41 est que, dans un volume \mathcal{V}_ℓ , ce n'est pas la dissipation moyenne ε qui est significative mais la dissipation locale $\varepsilon(\underline{x})$ moyennée sur ce volume \mathcal{V}_ℓ : ε_ℓ

$$\varepsilon(\underline{x}, t) = \frac{\nu}{2} (\partial_j u_i + \partial_i u_j)^2$$

$$\varepsilon_\ell(\underline{x}, t) = \langle \varepsilon(\underline{x}, t) \rangle_{\mathcal{V}_\ell}$$

avec \mathcal{V}_ℓ , par ex., une sphère de centre \underline{x} et de rayon ℓ

$\langle \varepsilon_\ell^p(\underline{x}) \rangle$ dépend seulement de ℓ (par homogénéité) et on suppose :

$$\langle \varepsilon_\ell^p(\underline{x}) \rangle \sim \ell^{\zeta_p}$$

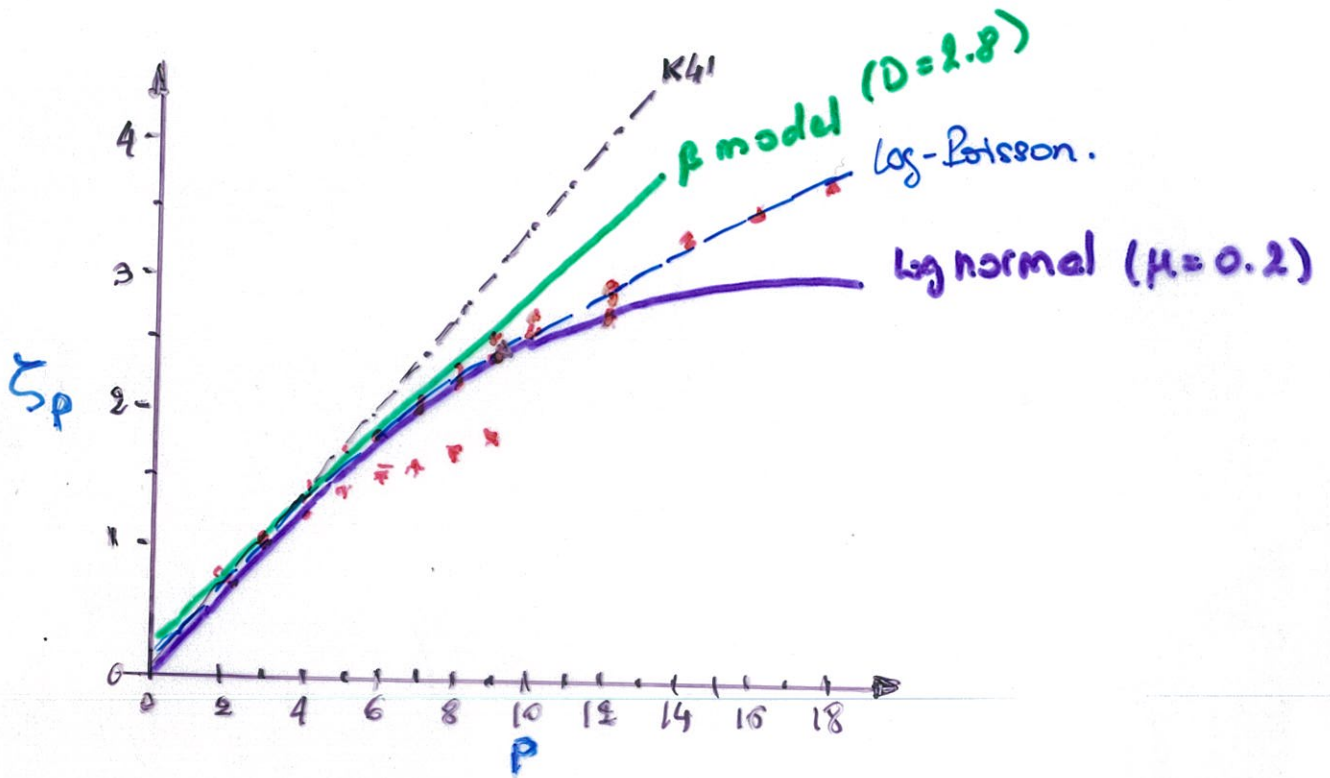
⊕ (Refined Similarity Hypothesis, Kolmogorov, 1962)

$$\varepsilon_\ell \sim \frac{(\delta v_\ell)^2}{t_\ell} \sim \frac{(\delta v_\ell)^3}{\ell} ; \delta v_\ell \text{ a les mêmes lois d'échelle que } (\ell \varepsilon_\ell)^{1/3}$$

$$\langle \delta v_\ell^p \rangle \sim (\ell \varepsilon_\ell)^{p/3} \sim \ell^{p/3} \ell^{\zeta_{p/3}}$$

$$\Rightarrow \zeta_p = p/3 + \zeta_{p/3}$$

→ modélisations des $\zeta_{p/3}$ donnent lieu à des modèles d'intermittence basés sur la dissipation (Kolmogorov - Obukhov, 1962 ; modèles de dissipation multifractale, She-Lévêque, 1994).



$$\zeta_p = p/3 \quad (\text{K41})$$

$$\zeta_p = \frac{p}{3} + (3-D)(1 - \frac{p}{3})$$

$$\zeta_p = \frac{p}{3} + \frac{\mu}{18}(3p - p^2)$$

$$\zeta_p = p/9 + 2 - (2/3)^{p/3}$$

β -model
(Frisch et al., 1928)

log-normal (μ)
(Kolmogorov-Oslovkov, 67)

log-normal poisson
(She-Levêque 1994)

Le β -modèle comme exemple de corrections à la loi $p/3$ de Kolmogorov

- Soit une succession d'échelles: $l_n = l_{n-1}/2 = 2^{-n} l_0$ et une cascade d'énergie au travers de ces échelles :

$$l_0 \longrightarrow l_1 \xrightarrow{(1/2 l_0)} l_2 \xrightarrow{(1/4 l_0)} \dots \longrightarrow l_n$$

- et le fait que les tourbillons d'échelle l_n ne remplissent pas tout l'espace \mathcal{V}_0 , mais seulement une fraction du volume \mathcal{V}_n :

$$\mathcal{V}_n \sim \beta \mathcal{V}_{n-1} \sim \beta^n \mathcal{V}_0 \quad \text{avec } 0 < \beta < 1$$

- > chaque "parent" d'échelle l_n va donner naissance à N tourbillons d'échelle l_{n+1} :

$$N l_{n+1}^3 \sim \mathcal{V}_{n+1} \sim \beta \mathcal{V}_n \sim \beta l_n^3$$

$$N (l_n/2)^3 \sim \beta l_n^3 \longrightarrow N = 2^3 \beta$$

- > quand $n \uparrow$ ($l_n \downarrow$); l'excitation turbulente se concentre dans une fraction d'espace de plus en plus petite, en fait sur un fractal S' de dimension:

$$D = \ln_2 N = 3 + \ln_2 \beta \iff 3 - D = \ln_2 \left(\frac{1}{\beta} \right)$$

$$\text{ou } \frac{\mathcal{V}_n}{\mathcal{V}_0} \sim \beta^n = \beta^{\ln_2(l_0/l_n)} = \left(\frac{l_n}{l_0} \right)^{3-D}; \quad 3-D = \ln_2 \left(\frac{1}{\beta} \right)$$

remarque = $D = 2$ ($N = 4$) le fractal à la même dimension qu'une surface dans l'écoulement
 $D = 1$ ($N = 2$) " qu'une courbe
 $D = 0$ ($N = 0$) " qu'un point

> l'énergie cinétique à l'échelle l_n : $k_m \sim \beta^n u_n^2$

(puisque les tourbillons actifs occupent seulement le volume V_n ; fraction β^n du volume)

• le temps caractéristique à l_n : $t_m \sim \frac{l_n}{u_n}$

• taux de transfert d'énergie aux tourbillons de taille l_n :

$$\varepsilon_m \sim \frac{k_m}{t_m} \sim \frac{\beta^n u_n^3}{l_n} \sim \varepsilon \sim \frac{u_0^3}{l_0}$$

comme dans k41 classique.

remarques = $u_n \sim (\varepsilon l_n \beta^{-n})^{1/3}$

$$u_n \sim \left(\frac{u_0^3}{l_0} l_n \frac{1}{\beta^n} \right)^{1/3} \sim u_0 \left(\frac{l_n}{l_0} \right)^{1/3} \left(\frac{l_0}{l_n} \right)^{\frac{3-D}{3}}$$

$$\sim u_0 \left(\frac{l_n}{l_0} \right)^{\frac{1}{3} - \frac{3-D}{3}}$$

→ donc on considère en fait que :

$$u_n \sim l_n^h \text{ avec } h = \frac{1}{3} - \frac{3-D}{3}$$

→ On obtient pour le spectre d'énergie :

$$k_m \sim \beta^n u_n^2 \sim \beta^n (\rho_m \varepsilon \beta^{-n})^{2/3} \sim \varepsilon^{2/3} l_n^{2/3} \left(\frac{l_n}{l_0} \right)^{\frac{3-D}{3}}$$

or $k_m \sim l_n \varepsilon(l_m)$ ($l_m \sim \frac{1}{l_n}$)

soit $E(l) \sim \varepsilon^{2/3} l^{-5/3} (l/l_0)^{-\left(\frac{3-D}{3}\right)}$

(qui donne k_4 pour $D=3$.)

→ Pour les fonctions de structures d'ordre p :
 $u_n \sim$ différence typique de vitesse sur une distance l_n .

$$\begin{aligned} \langle (\delta u_n)^p \rangle &\sim \beta^m u_n^p \sim \beta^m (l_n \varepsilon \beta^{-m})^{p/3} \sim (\varepsilon l_n)^{p/3} \beta^{(1-p/3)m} \\ &\sim \varepsilon^{p/3} l_n^{p/3} \left(\frac{l_n}{l_0}\right)^{(1-p/3)(3-D)} \sim l_n^{\zeta_p} \end{aligned}$$

soit $\zeta_p = p/3 + \underbrace{(3-D)(1-p/3)}_{\text{correction à } k_4} = p k + (3-D)$

Notes:

Généralisation du β -modèle ; au modèle bi-fractal ou multifractal

- β -modèle $\delta u_\ell(x) \sim \ell^h$ sur un ensemble S de dimension D
- bi-fractal $\left\{ \begin{array}{l} \delta u_\ell(x) \sim \ell^{h_1} \quad x \in S_1 ; \dim S_1 = D_1 \\ \delta u_\ell(x) \sim \ell^{h_2} \quad x \in S_2 ; \dim S_2 = D_2 \end{array} \right.$
 $\rightarrow \zeta_p = \min(p h_1 + 3 - D_1, p h_2 + 3 - D_2)$
- multi-fractal $\left\{ \begin{array}{l} \forall h \in [h_{\min}, h_{\max}] \text{ pour } x \in S'_h ; \text{ avec} \\ \dim S'_h = D(h) \\ \delta u_\ell(x) \sim \ell^h. \end{array} \right.$
 $\rightarrow \zeta_p = \lim_{\ell \rightarrow 0} \frac{\ln S_p(\ell)}{\ln \ell} = \inf_h [p h + 3 - D(h)]$

($S_p(\ell) \equiv$ fonction de structure d'ordre p)

Modèle She-Lévy (1994) ou log-Poisson:

basé sur l'existence d'une hiérarchie pour les puissances successives de la dissipation d'énergie à une échelle l

\leadsto apparemment sans paramètre ajustable

$$\zeta_p = p/3 + 2(1 - (2/3)^{p/3})$$

en fait, dépend de 2 paramètres:

$$\zeta_p = \frac{p}{3}(1-\alpha) + C_0(1-\beta^{p/3})$$

avec β = exposant d'échelle de la hiérarchie

α = exposant anormal du temps caractéristique des structures les plus intermittentes

C_0 = codimension des structures dissipatives

$$C_0 = \frac{\alpha}{1-\beta} \quad 0 < \beta < 1$$

$$\text{NS 3D} : \alpha = 2/3 = \beta \quad (\text{k41})$$

$$C_0 = 2 \quad (\text{co-dim. filaments})$$

Extension du modèle à la MHD:

k41, $C_0 = 1$ (structures dissipatives \equiv nappes)

$$\zeta_p = p/3 + \left[1 - \left(\frac{1}{3}\right)^{p/3}\right]$$

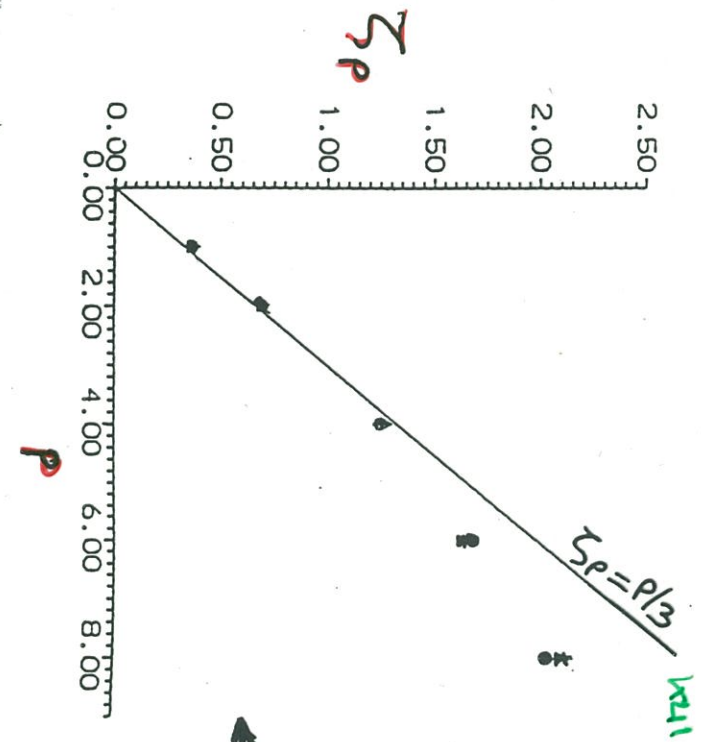
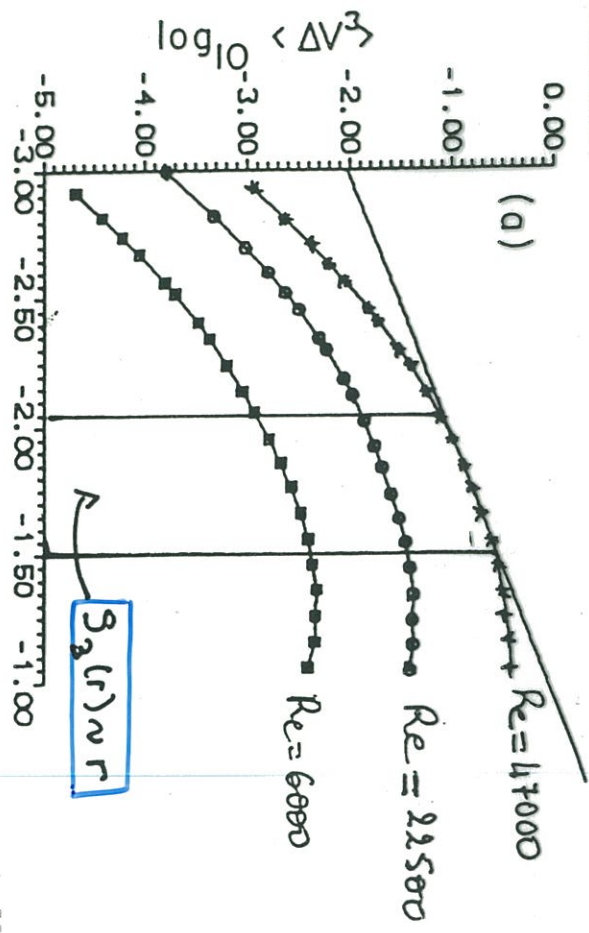
Ik, $C_0 = 1$

$$\zeta_p = p/8 + \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{p/4}\right]$$

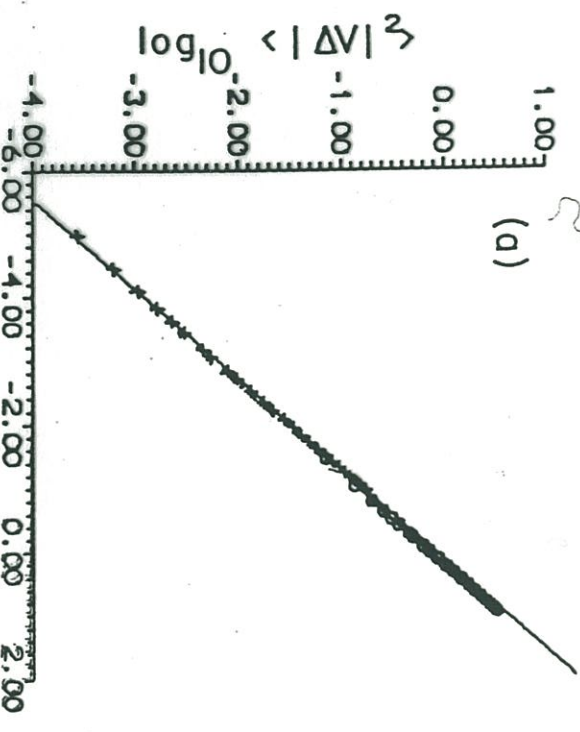
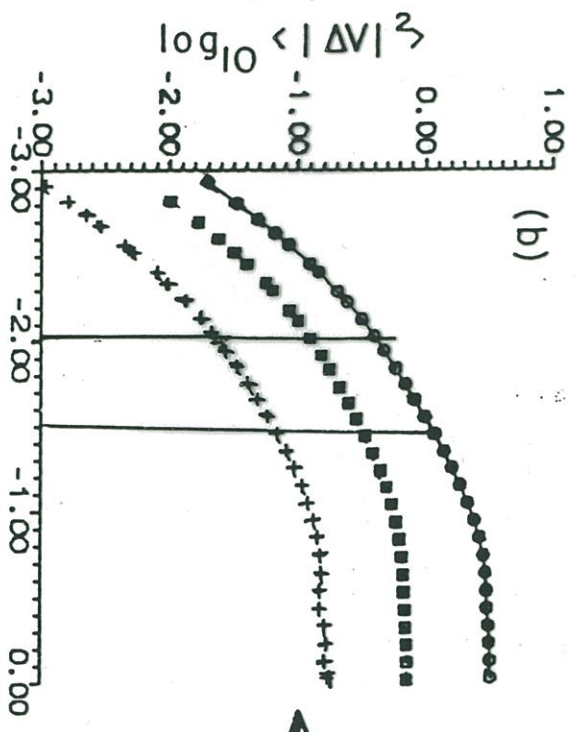
Général: $\zeta_p = \frac{p}{g}(1-\alpha) + C_0(1-\beta^{p/g})$

($g=3$ k41, $g=4$ Ik)

$\langle \delta u_L^p(n) \rangle$



$\langle \delta u_L^2(n) \rangle$



$\log_{10} r$

$\log_{10} \langle \delta u_L^3 \rangle$

ESS

ESS

Experimental data.

(ESS, Benzi et al., 93)

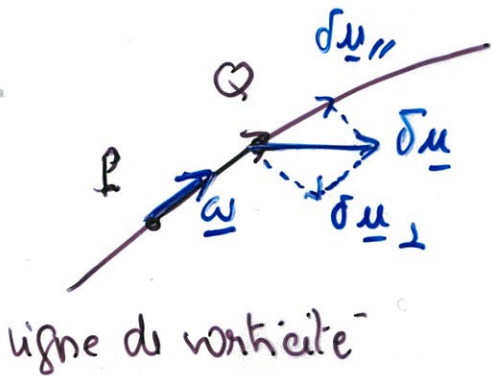
Leçon 8 : Turbulence et vorticité

- ★ création de la vorticité**
- ★ théorème de Kelvin**
- ★ conservation de la vorticité potentielle d'Ertel**
- ★ moment dipolaire d'une tache de vorticité**
- ★ simulations numériques directes et expériences**
- ★ formation de tubes et de nappes de vorticité**

Création de la vorticité $\underline{\omega} = \nabla \times \underline{u}$

$$\frac{D\underline{\omega}}{Dt} = \partial_t \underline{\omega} + (\underline{u} \cdot \nabla) \underline{\omega} = (\underline{\omega} \cdot \nabla) \underline{u} + \nu \Delta \underline{\omega}$$

advection de $\underline{\omega}$ par \underline{u}
terme de torsion-étirement
diffusion moléculaire de $\underline{\omega}$



$PQ = \delta \underline{l}$ vecteur-élément de ligne matérielle
 $\delta \underline{u}$ vitesse du fluide à Q relative à celle de P

$\underline{\omega}$ est assimilé à un élément de vecteur $\delta \underline{l}$ coïncidant instantanément avec une portion de ligne de vorticité ; $\frac{d \delta \underline{l}}{dt} = \delta \underline{l} \cdot \nabla \underline{u} \approx \underline{\omega} \cdot \nabla \underline{u}$

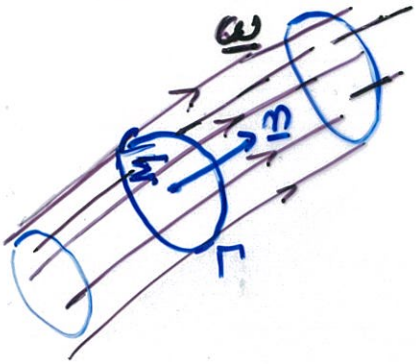
le changement de la vorticité par le terme $(\underline{\omega} \cdot \nabla) \underline{u}$ est le même que celui d'un vecteur-élément de ligne matérielle
 ↪ variation de $\underline{\omega}$: 1) rotation-rigide de $\delta \underline{l}$ par $\delta \underline{u} \perp \underline{\omega}$
 2) étirement ou contraction par $\delta \underline{u} \parallel \underline{\omega}$

ou point de vue tensoriel :

$$\underline{\omega} \cdot \nabla \underline{u} |_{\cdot} = \omega_j \partial_j u_i = \omega_j S_{ij} + \omega_j R_{ij} = \frac{1}{2} \omega_j (\partial_j u_i + \partial_i u_j) + \frac{1}{2} \omega_j (\partial_j u_i - \partial_i u_j)$$

Tenseur des déformations
Tenseur de rotation

Théorème de Kelvin pour la circulation (1869)



$$C = \oint_{\Gamma} \underline{u} \cdot d\underline{\ell} = \int_{\Sigma} (\nabla \times \underline{u}) \cdot \underline{n} \, d\sigma \quad (\text{Stokes})$$

$$C = \underbrace{\oint_{\Gamma} \underline{u} \cdot d\underline{\ell}}_{\text{circulation de } \underline{u}} = \int_{\Sigma} \underbrace{\underline{\omega} \cdot \underline{n} \, d\sigma}_{\text{force (intensité) du tube de vorticité}} \quad (\text{Stokes})$$

$$\frac{dC}{dt} = ?$$

on note que $\frac{D}{Dt} (\underline{u} \cdot d\underline{\ell}) = d\underline{\ell} \frac{D\underline{u}}{Dt} + \underline{u} \frac{Dd\underline{\ell}}{Dt} = d\underline{\ell} \frac{D\underline{u}}{Dt} + \frac{1}{2} d\underline{\ell} \nabla \underline{u}^2$

avec l'équation du mouvement:

$$\frac{D\underline{u}}{Dt} = -\nabla p + \nu \Delta \underline{u} + \underline{F}$$

on obtient :

$$\frac{dC}{dt} = \oint_{\Gamma} \underline{F} \cdot d\underline{\ell} + \oint_{\Gamma} -\nabla p \cdot d\underline{\ell} + \oint_{\Gamma} \nu \Delta \underline{u} \cdot d\underline{\ell} + \oint_{\Gamma} \frac{1}{2} \nabla \underline{u}^2 \cdot d\underline{\ell}$$

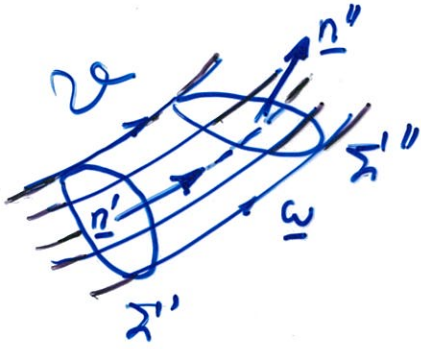
si \underline{F} s'écrit $-\nabla \psi$ (fonction monovaleur de la position, ex. la gravité)

alors
$$\frac{dC}{dt} = \oint_{\Gamma} \nu \Delta \underline{u} \cdot d\underline{\ell} = -\oint_{\Gamma} \nu \nabla \times \underline{\omega} \cdot d\underline{\ell}$$

(en utilisant $\Delta \underline{u} = \nabla(\nabla \cdot \underline{u}) - \nabla \times (\nabla \times \underline{u}) = -\nabla \times \underline{\omega}$ pour $\nabla \cdot \underline{u} = 0$)

quand $\nu = 0$: la circulation de \underline{u} sur n'importe quel courbe fermée est invariante et l'intensité d'un tube de vorticité (entouré par cette courbe) est invariante

Remarque = la force d'un tube de vorticité ne dépend pas de la surface ouverte Σ' , ni donc de r



$$-\int_{\Sigma'} \underline{\omega}' \cdot \underline{n}' d\sigma' + \int_{\Sigma''} \underline{\omega}'' \cdot \underline{n}'' d\sigma'' = \int_{\Sigma} \nabla \cdot \underline{\omega} d\tau = 0$$

↑
 $\nabla \cdot \underline{\omega} = 0$

(ostrogradsky)

Conservation de la vorticité potentielle d'Ertel
— écoulement compressible — $\underline{\omega} \nabla \theta / \rho$

soit θ une fonction thermodynamique dans un fluide homogène : θ dépend seulement de 2 variables thermodynamiques indépendantes, par ex. $\theta(p, \rho)$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\underline{\omega} \cdot \nabla \theta) = \nabla \theta \frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} + \underline{\omega} \cdot \frac{\partial \nabla \theta}{\partial t}$$

en utilisant : $\dot{\theta} \equiv \frac{D\theta}{Dt} = \frac{\partial \theta}{\partial t} + (\underline{u} \cdot \nabla) \theta$ et $\nabla \dot{\theta} = \frac{\partial}{\partial t} \nabla \theta + \nabla (\underline{u} \cdot \nabla \theta)$

et $\frac{\partial \underline{\omega}}{\partial t} = -\nabla \times (\underline{\omega} \times \underline{u}) + \nu \Delta \underline{\omega}$

on peut écrire :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\underline{\omega} \cdot \nabla \theta) = \nabla \theta \cdot [-\nabla \times (\underline{\omega} \times \underline{u}) + \nu \Delta \underline{\omega}] + \underline{\omega} \cdot [\nabla \dot{\theta} - \nabla (\underline{u} \cdot \nabla \theta)]$$

or on peut montrer que :

$$-\nabla \theta \cdot (\nabla \times (\underline{\omega} \times \underline{u})) = \nabla \cdot (\nabla \theta \times (\underline{\omega} \times \underline{u}))$$

(avec $\nabla \cdot (A \times B) = \nabla \times A \cdot B - \nabla \times B \cdot A$; $A = \nabla \theta$ et $B = \underline{\omega} \times \underline{u}$)

$$\begin{aligned}
 -\nabla \cdot (\nabla \theta (\underline{\omega} \times \underline{u})) &= \nabla \cdot ((\nabla \theta \cdot \underline{u}) \cdot \underline{\omega}) - \nabla \cdot ((\nabla \theta \cdot \underline{\omega}) \cdot \underline{u}) \\
 &= (\nabla \theta \cdot \underline{u}) \nabla \cdot \underline{\omega} + \underline{\omega} \cdot \nabla (\nabla \theta \cdot \underline{u}) \\
 &\quad - [(\nabla \theta \cdot \underline{\omega}) \nabla \cdot \underline{u} + \underline{u} \cdot \nabla (\nabla \theta \cdot \underline{\omega})]
 \end{aligned}$$

ce qui conduit à :

$$\frac{D(\underline{\omega} \nabla \theta)}{Dt} = \frac{\partial (\underline{\omega} \cdot \nabla \theta)}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla (\underline{\omega} \nabla \theta) = -(\nabla \theta \cdot \underline{\omega}) \nabla \cdot \underline{u} + \underline{\omega} \nabla \theta + \nu \Delta \underline{\omega} \nabla \theta$$

Pour la quantité $\frac{\underline{\omega} \cdot \nabla \theta}{\rho}$; on obtient donc :

$$\begin{aligned}
 \frac{D}{Dt} \left(\frac{\underline{\omega} \cdot \nabla \theta}{\rho} \right) &= \frac{1}{\rho} \frac{D}{Dt} (\underline{\omega} \cdot \nabla \theta) + (\underline{\omega} \cdot \nabla \theta) \underbrace{\frac{D}{Dt} \left(\frac{1}{\rho} \right)}_{-\frac{1}{\rho^2} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \underline{u} \cdot \nabla \rho \right) = \frac{1}{\rho} \nabla \cdot \underline{u}} \\
 &\quad \left(\text{eq. de continuité } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \underline{u}) = 0 \right)
 \end{aligned}$$

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\underline{\omega} \cdot \nabla \theta}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} \left[-(\nabla \theta \cdot \underline{\omega}) \nabla \cdot \underline{u} + \underline{\omega} \nabla \theta + \nu \Delta \underline{\omega} \nabla \theta \right] + \frac{1}{\rho} (\underline{\omega} \cdot \nabla \theta) \nabla \cdot \underline{u}$$

$$\text{soit } \frac{D}{Dt} \left(\frac{\underline{\omega} \cdot \nabla \theta}{\rho} \right) = \frac{\underline{\omega} \nabla \theta}{\rho} + \nu \frac{\Delta \underline{\omega} \nabla \theta}{\rho}$$

Si on choisit θ de façon à ce qu'il représente le chauffage exercé sur une parcelle du fluide, alors en absence de chauffage et de diffusion moléculaire ; on obtient la conservation de la vorticité potentielle d'Értel :

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\underline{\omega} \cdot \nabla \theta}{\rho} \right) = 0.$$

(invariant particulière).

Propriétés de la vorticité pour un écoulement incompressible non-visqueux, énoncées pour la 1^{ère} fois par Helmholtz (1858)

- ▶ les particules fluides initialement sans vorticité ne peuvent acquérir de la vorticité
- ▶ les particules fluides situées sur une ligne de vorticité à un instant donné, resteront à tout temps sur une ligne de vorticité. En d'autres termes, on peut dire que les lignes et les tubes de vorticité se déplacent avec le fluide
- ▶ l'intensité d'un tube de vorticité ne varie pas au cours du temps avec le mouvement du fluide

La loi de Biot-Savart

Considérons $\underline{u}(\underline{x}, t)$ la vitesse instantanée associée à un champ de vorticité localisé ; i.e. si

$$\exists R \text{ tel que } |\underline{\omega}(\underline{x})| e^{-r/R} \xrightarrow{r=|\underline{x}| \rightarrow \infty} 0$$

i.e. $|\underline{\omega}|$ est exponentiellement petite en dehors d'une sphère de rayon R ("tache de vorticité")

Si la vorticité est localisée à $t=0$, alors elle le reste pour tout temps fini, puisque les seuls changements pour $\underline{\omega}$ sont l'advection et la diffusion, aucun d'eux ne peuvent créer de la vorticité à l'infini

Soit $\underline{A}(\underline{x})$ le potentiel vecteur de $\underline{u}(\underline{x})$, satisfaisant

$$\underline{u} = \nabla \times \underline{A} ; \nabla \cdot \underline{A} = 0 ; |\underline{A}| \rightarrow 0, r=|\underline{x}| \rightarrow \infty$$

$$\text{alors } \underline{\omega} = \nabla \times \underline{u} = -\Delta \underline{A} \quad (*)$$

La solution de l'équation de Poisson (*) s'écrit :

$$\underline{A}(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\underline{\omega}(\underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|} d\underline{x}' \quad \left(\int \text{ sur tout l'espace} \right)$$

et donc :

$$\underline{u}(\underline{x}) = \nabla_{\underline{x}} \times \underline{A}(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \nabla_{\underline{x}} \times \left(\frac{\underline{\omega}(\underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|} \right) d\underline{x}'$$

$$= \frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|} \underbrace{\nabla_{\underline{x}} \times (\underline{\omega}(\underline{x}'))}_{=0} d\underline{x}' - \frac{1}{4\pi} \int \underline{\omega}(\underline{x}') \times \nabla_{\underline{x}} \left(\frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|} \right) d\underline{x}'$$

(\underline{x} et \underline{x}' indépendants)

$$= -\frac{1}{4\pi} \int \underline{\omega}(\underline{x}') \times \nabla_{\underline{x}} \left(\frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|} \right) d\underline{x}'$$

on obtient ainsi la vitesse créée par la vorticité

$$\underline{u}(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\underline{\omega}(\underline{x}') \times (\underline{x} - \underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|^3} d\underline{x}'$$

exemple = si $\underline{\omega} = (0, 0, \omega_z) \longrightarrow \underline{u} = (u_x, u_y, 0)$
 i.e. \underline{u} associée à $\underline{\omega}$ est dans le plan \perp à $\underline{\omega}$

Le Moment dipolaire d'une tache de vorticité

$$\text{Soit } \underline{u}(\underline{x}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\underline{\omega}(\underline{x}') \times (\underline{x} - \underline{x}')}{|\underline{x} - \underline{x}'|^3} d\underline{x}'$$

quand $r = |\underline{x}| \longrightarrow \infty$.

les termes dominants de l'intégrande viennent de régions $|\underline{x}'| < R$; et on utilise le développement de Taylor :

$$\frac{1}{|\underline{x} - \underline{x}'|} = \frac{1}{r} - (\underline{x}' \cdot \nabla) \frac{1}{r} + \frac{1}{2} (\underline{x}' \cdot \nabla)^2 \frac{1}{r} - \dots$$

pour $r \longrightarrow \infty$; on a donc pour $\underline{A}(\underline{x})$

$$\underline{A}(\underline{x}) \sim \frac{1}{4\pi r} \int \underline{\omega}(\underline{x}') d\underline{x}' - \frac{1}{4\pi} \int \underline{\omega}(\underline{x}') \cdot (\underline{x}' \cdot \nabla) \frac{1}{r} d\underline{x}'$$

$$\text{i.e. } A_i(\underline{x}) \sim \frac{1}{4\pi r} \int \underbrace{\omega_j(\underline{x}')}_{\equiv \omega'_j} d\underline{x}' - \frac{1}{4\pi} \int \omega'_j x'_j \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{1}{r} \right) d\underline{x}'$$

or, on remarque:

$$1) \int \omega'_j d\underline{x}' \stackrel{\uparrow}{=} \int \frac{\partial}{\partial x'_j} (\omega'_j x'_j) d\underline{x}' = \int_{S_\infty} (\omega'_j x'_j) n_j ds'_j = 0$$

\uparrow
 $\nabla \cdot \underline{\omega} = 0$

\uparrow
 $|\underline{\omega}| = O(e^{-\mu R})$
 $\text{et } r \longrightarrow \infty$

$$2) \omega'_i x'_j = \frac{1}{2} (\omega'_i x'_j + \omega'_j x'_i) + \frac{1}{2} (\omega'_i x'_j - \omega'_j x'_i)$$

$$\int (\omega'_i x'_j + \omega'_j x'_i) d\underline{x}' = \int \frac{\partial}{\partial x'_k} (\omega'_k x'_i x'_j) d\underline{x}' = \int_{\infty} (\omega'_k x'_i x'_j) n_k dS' = 0$$

ce qui donne pour $A_i(\underline{x})$:

$$A_i(\underline{x}) \sim -\frac{1}{4\pi} \int \frac{1}{2} (\omega'_i x'_j - \omega'_j x'_i) \frac{\partial}{\partial x'_j} \left(\frac{1}{r} \right) d\underline{x}'$$

$$\sim -\frac{1}{8\pi} \frac{\partial}{\partial x'_j} \left(\frac{1}{r} \right) \int (\omega'_i x'_j - \omega'_j x'_i) d\underline{x}'$$

ou en posant $\underline{\mu} = \frac{1}{8\pi} \int (\underline{x} \times \underline{\omega}) d\underline{x}$; $\underline{A}(\underline{x}) \sim -(\underline{\mu} \times \nabla) \frac{1}{r}$

on obtient alors pour $\underline{u} = \nabla \times \underline{A}$;

$$\underline{u} = \nabla \times \underline{A} \sim (\underline{\mu} \cdot \nabla) \nabla \left(\frac{1}{r} \right) \sim \nabla (\underline{\mu} \cdot \nabla) \frac{1}{r}$$

et donc un comportement $O(r^{-3})$ pour $|\underline{u}|$ quand $r \rightarrow \infty$, caractéristique d'un champ de vitesse dipôle. Bien que $\underline{\omega}$ soit localisée, par hypothèse, \underline{u} ne l'est pas.

Simulations numériques directes et expériences

Spatial structure and statistics of homogeneous turbulence

13

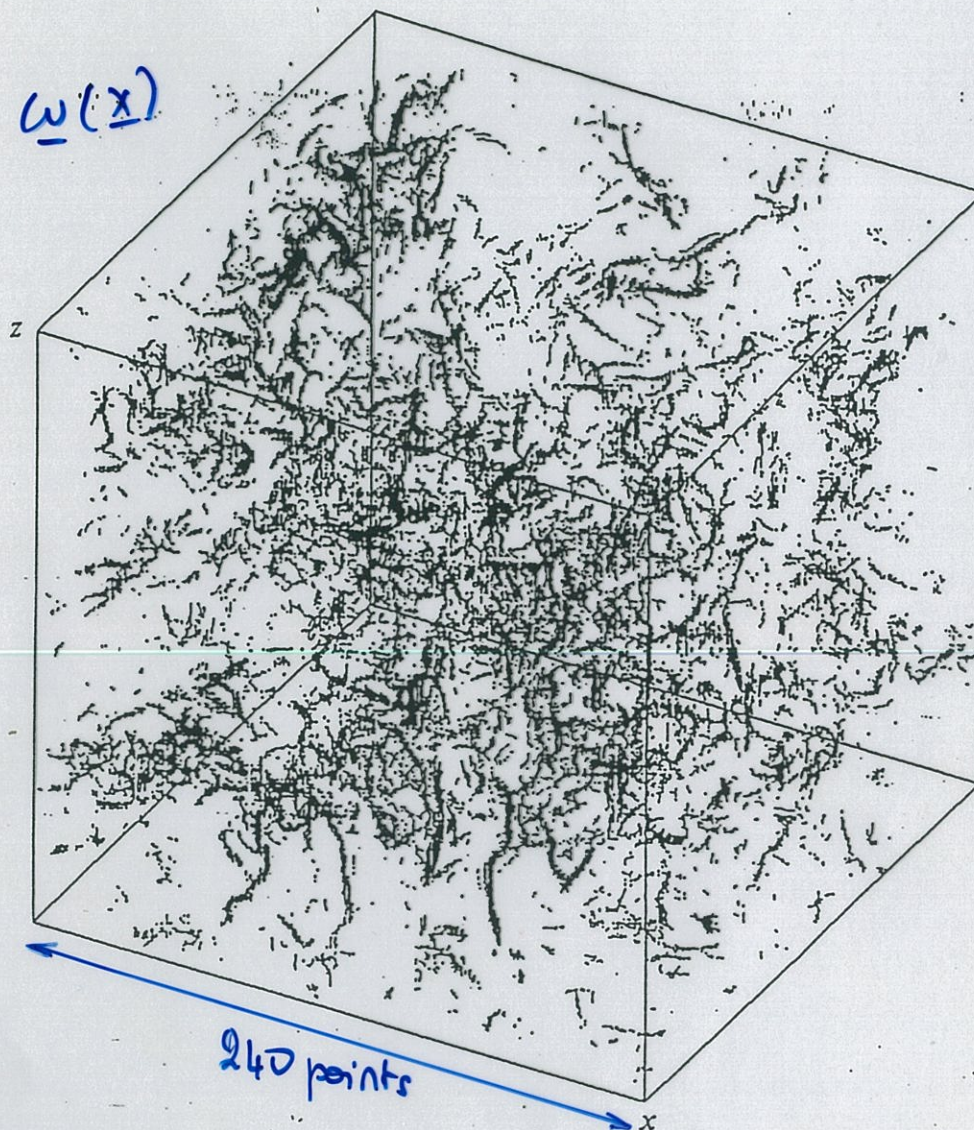


FIGURE 13. View of the vorticity field, represented by a vector of length proportional to the vorticity amplitude at each grid point. Only vectors larger than a given threshold value are shown.

Q MENEGUZZI
25, 1 (1991)

résolution $(240)^3$

$R_\lambda \sim 150$

$Re \sim 1000$

$\omega(x)$

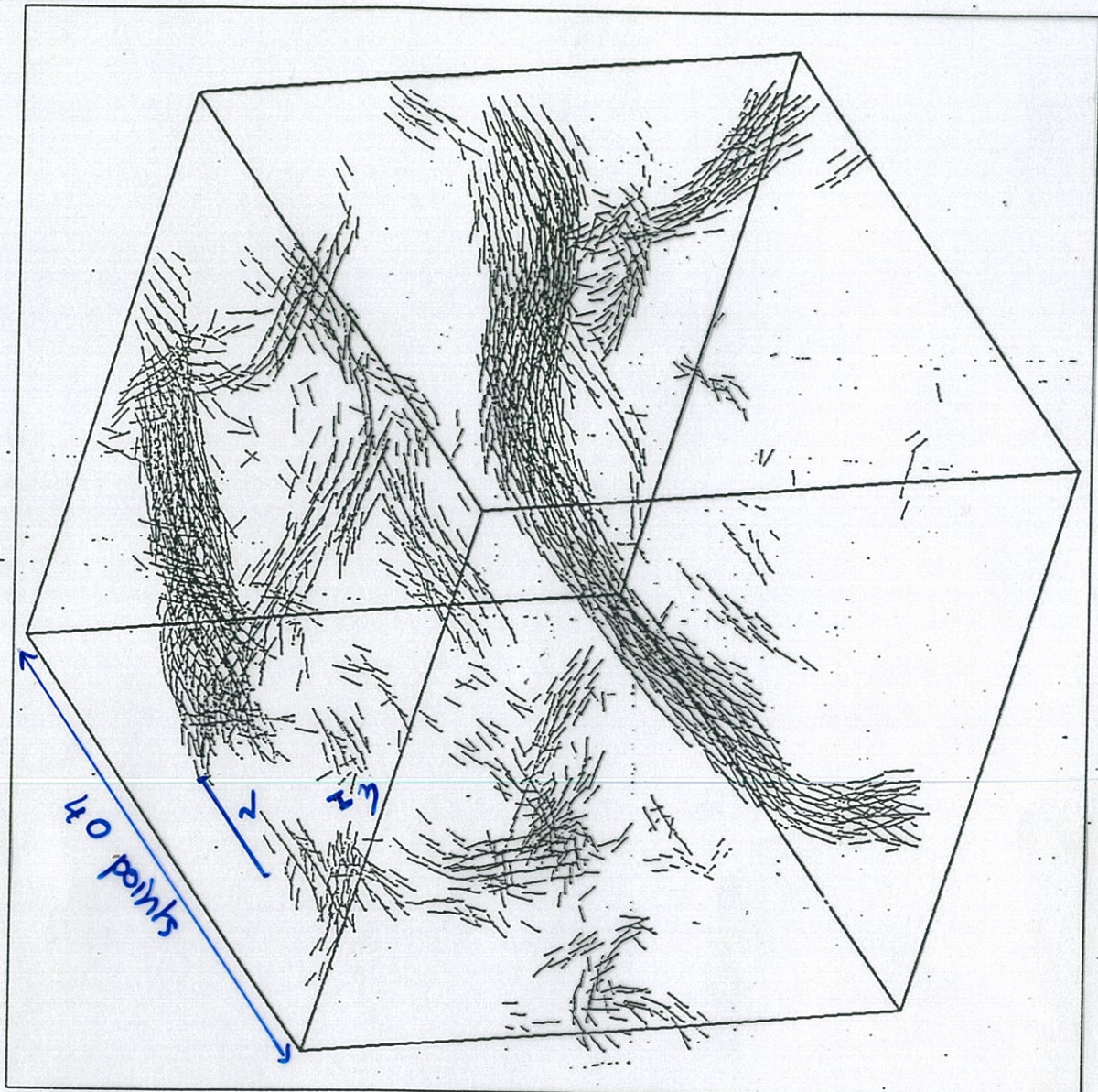


FIGURE 16. Detail of the vorticity field, showing a sub-cube of size one sixth of the complete cube, i.e. 40 grid points in each direction.

$$\Delta x = \frac{2\pi}{240} \quad ; \quad l_0 \sim 2\pi$$

(taille de la maille) $d \sim 10 \Delta x$

$$\eta \sim \Delta x \quad (t_v)$$

diamètre des tubes : entre d et η
 longueur des tubes : entre d et l_0

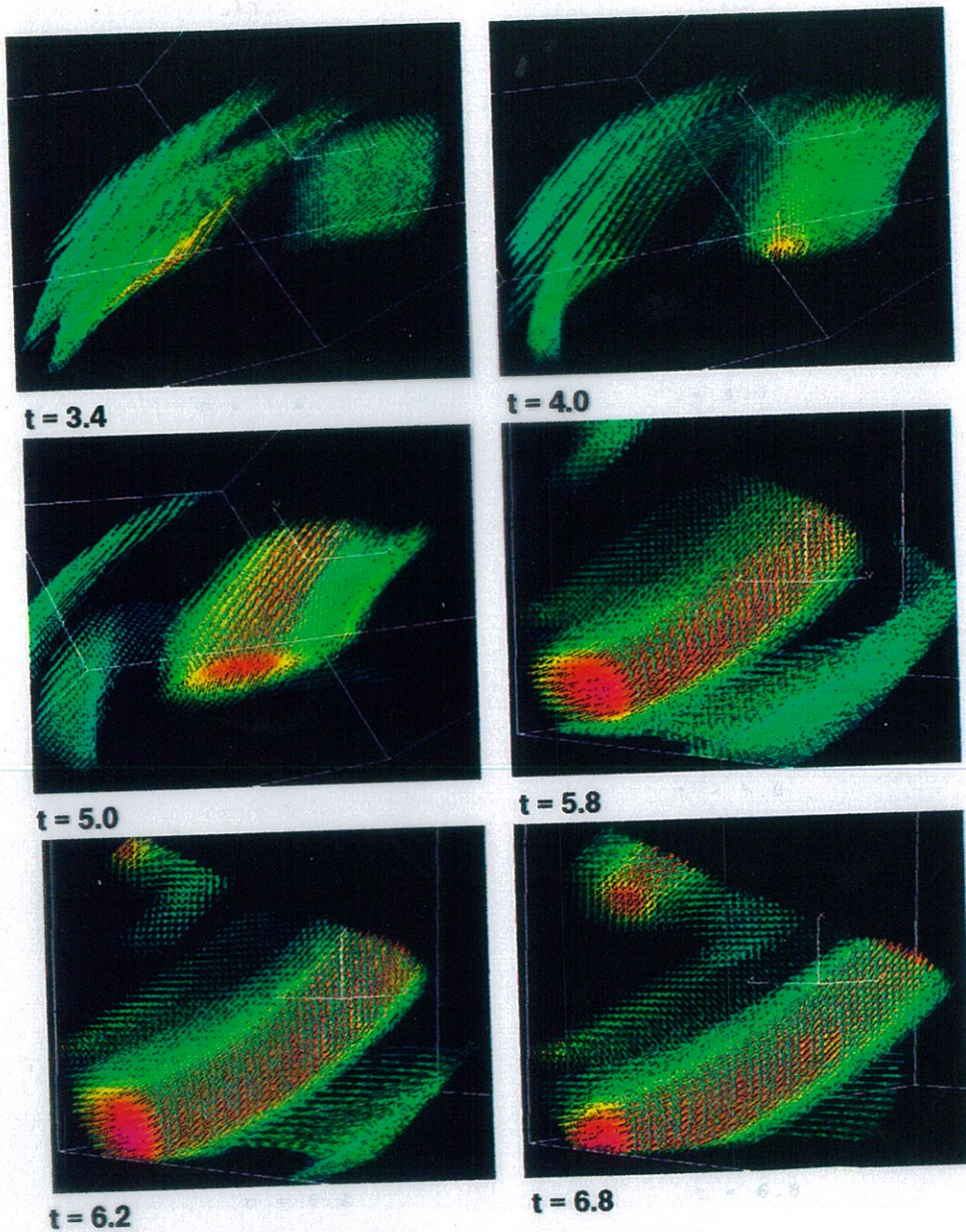


FIGURE 13. Overviews of vortex layer formed at a later time showing vorticity concentration and roll-up of the vortex layer after an intense vortex tube has been formed.

field which advects the surrounding vortex layers, rolling them around the tube. Such a roll-up of the sheet around a vortex core is reminiscent of the strained spiral vortices considered by Lundgren (1982, 1993). Pictures at later times show the persistence of these dynamics. Here, vorticity concentration corresponds to an amplification by a factor 3 to 4, comparable to that obtained in the asymptotic model. Note that around $t = 6.2$, a second vortex tube has been formed.

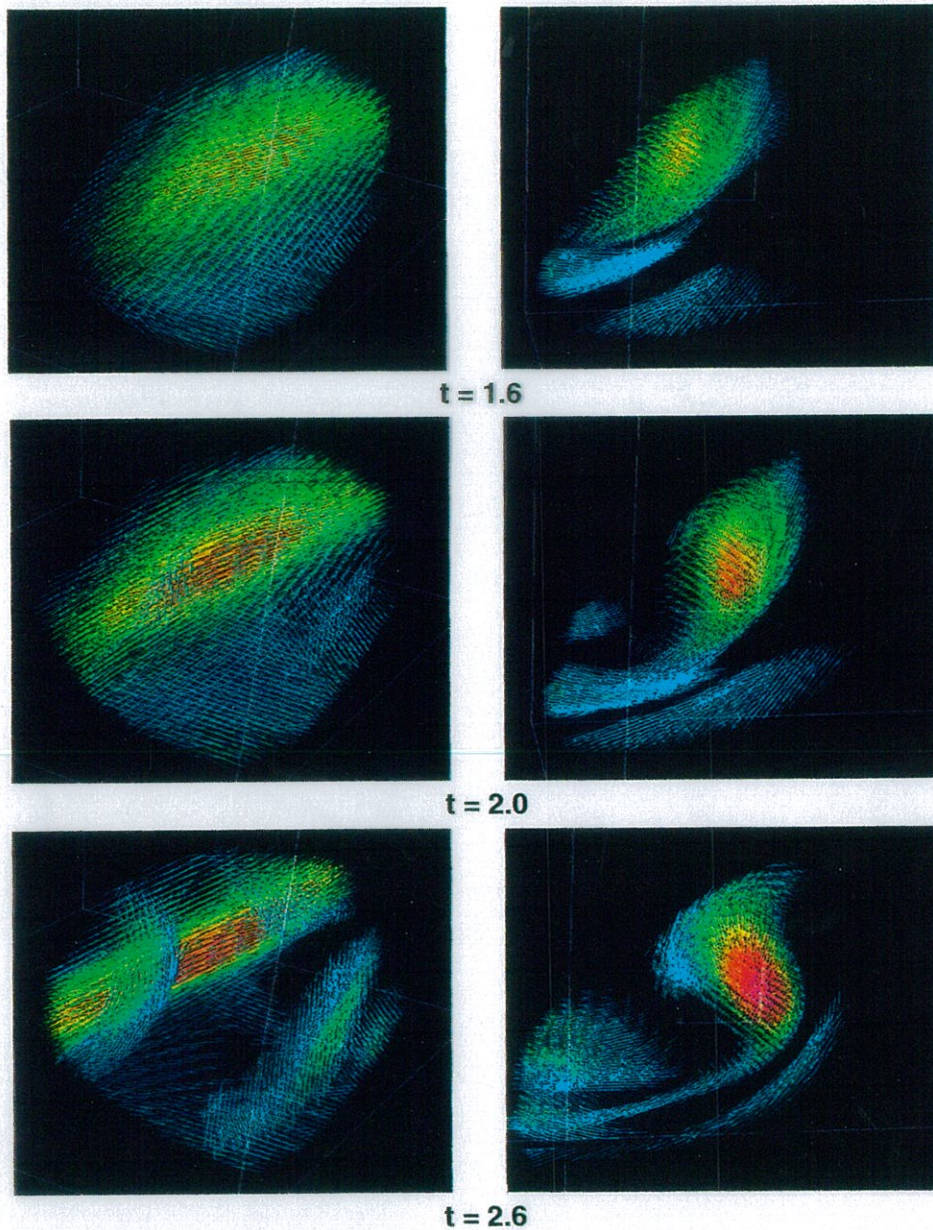


FIGURE 12. Overviews (right-hand side) and cross-sections (left-hand side) of a vortex layer formed at early time. The formation of a vortex tube embedded in the vortex layer is visible.

nearby vortex layers which appear later in time. One of them is stable. For the second one, vorticity concentration starts around $t = 3.4$ but is rapidly inhibited and is no longer visible at $t = 4$. At this time, the third vortex layer displays a strong vorticity concentration. At $t = 5$, a vortex tube has already been formed. It induces a velocity

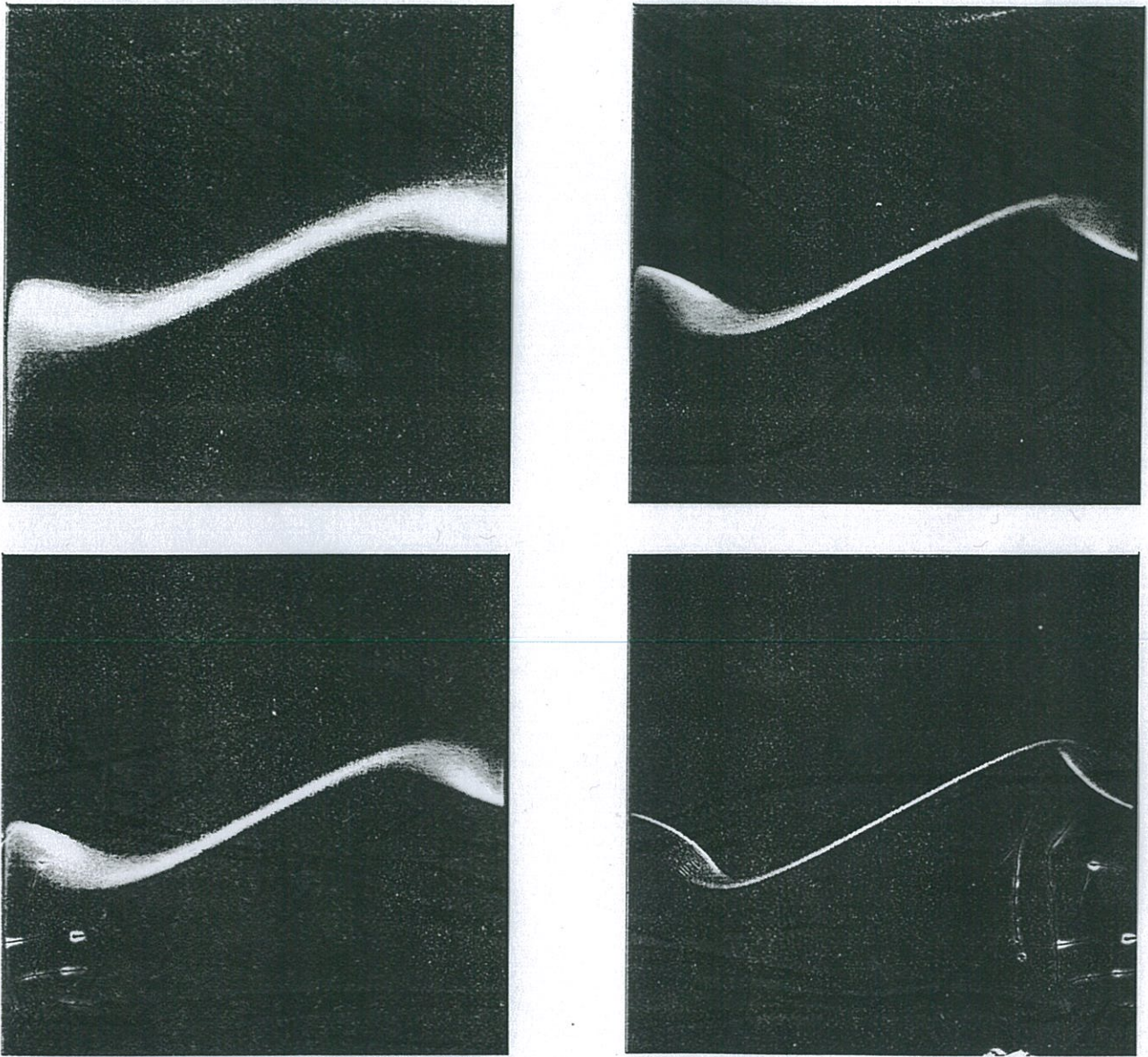


FIG. 8. Visualizations in physical space of high vorticity regions for the Taylor–Green vortex at $t=3, 3.25, 3.50,$ and 4 . Note that the thickness of the pancake decays in time.

Formation de nappe de vorticité, $\nu = 0$
 l'épaisseur \downarrow en temps (régime de déclin).

Brachet et al., Phys-Fluids A, 4 (12), 1992

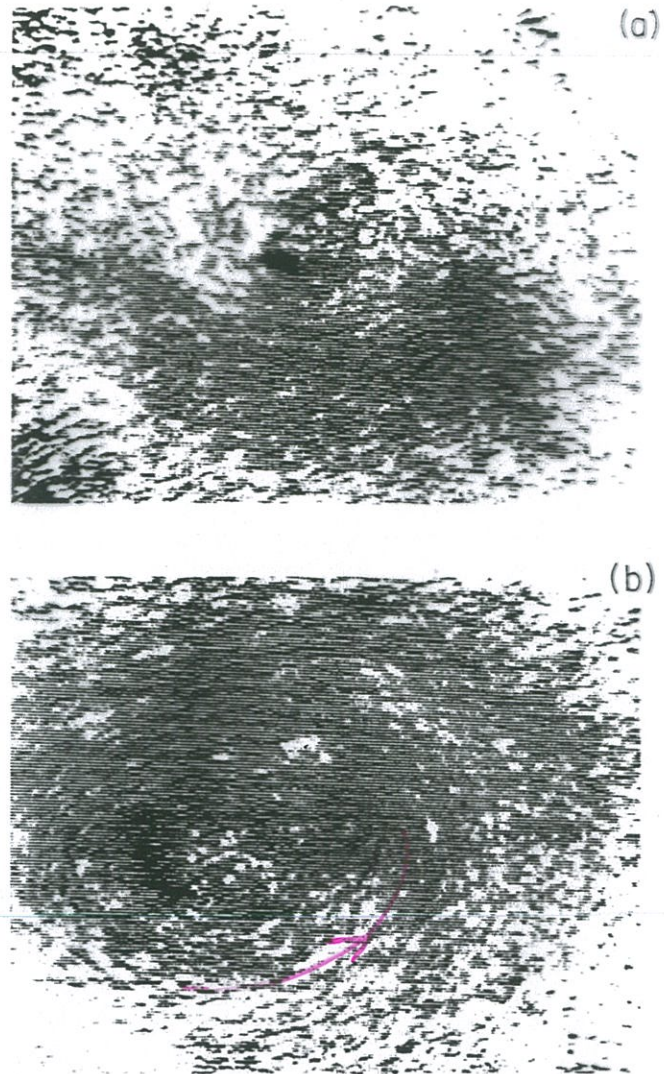
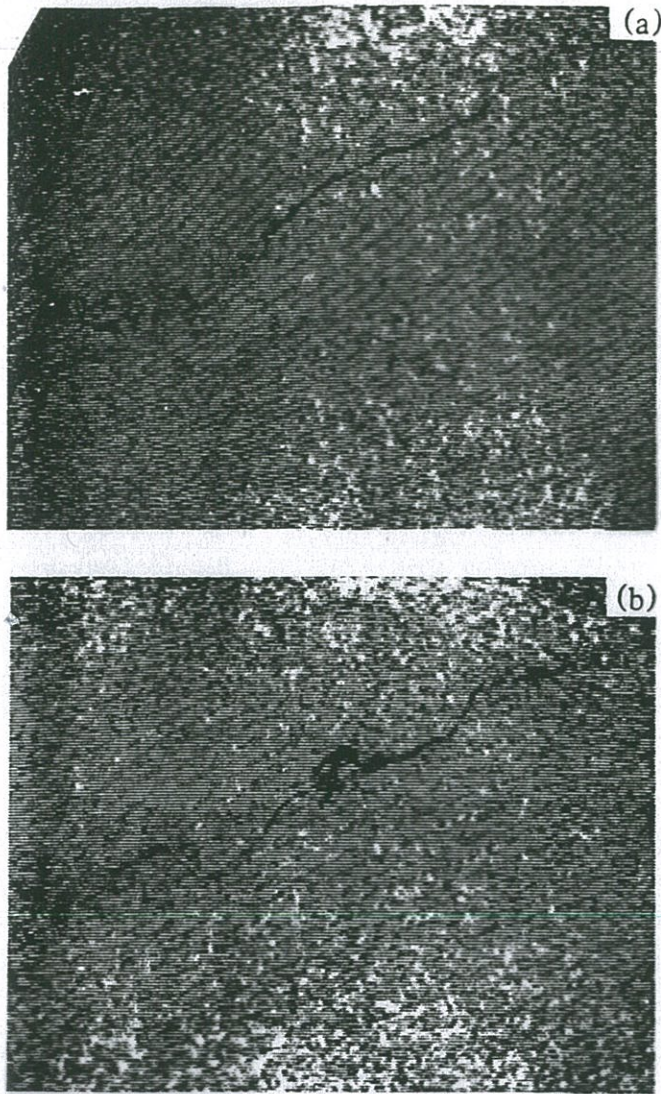


FIG. 2. Detail of two successive video images (taken 0.02 s apart with an exposure time of 0.001 s) showing a side view of a vorticity filament observed in a turbulent flow at a Reynolds number of 80000. Its length is of the order of 5 cm while its diameter (enlarged here by the video image) is of the order of 0.1 mm. (a) The filament at its formation; (b) its destabilization to form kinks.

FIG. 3. Two photographs of the evolution of a vorticity filament seen from its extremity. (a) The filament 0.04 s after its formation; (b) 0.1 s later, when it has transformed into a large eddy.

occupied by bubbles.

The high-pressure regions (large σ^2) are also visible as they repel the bubbles, thus having a weaker bubble concentration. These regions are spread out and weakly contrasted. The difference in aspect between the low- and high-pressure regions corresponds to the asymmetry in the pressure histogram obtained in numerical simulation [10]. This histogram has a very long exponential tail only for low pressures corresponding to the vorticity concentration in filaments. Finally, when the fluid is seeded with more bubbles we apparently lower the observation threshold; at a given Reynolds number a greater number of smaller filaments become apparent. This result points to the existence of a hierarchy of filaments with different

strengths.

The main characteristic of the filaments is the asymmetry of their evolution, illustrated by the sequence of images shown in Figs. 2(a), 2(b) and 3(a), 3(b). Most of the times, no noticeable structure preexists; structure shows up abruptly in a time of the order of $\frac{1}{50}$ th of a second in the regions of the flow where there is both shear (large ω^2) and convergence (large σ^2) [17]. The filaments usually appear as rather straight lines. Then the formation of helical distortions [18] is observed [visible in Fig. 2(b)]. These distortions appear similar to the kinks which affect the core of long-lived vortices obtained in a rotating tank [19]. In the present experiment these kinks lead to the disintegration of the filaments in a typical time of 0.1 s. After the filaments' disappearance, large, longer-lived eddies remain where they have vanished [Fig. 3(b)] [20].

As there is no physical mechanism available for vortici-

is the reason for the value R chosen for the separation between the stirrers: for larger values the mean shear structure tends to be fixed, while for smaller values the turbulent volume would be too small.

C. The measurements of pressure

The technology for fast response pressure measurements relies (at present) on piezoelectric transducers. These probes unfortunately have a rather large volume so that, introduced

in the bulk of the flow, they create a strong disturbance. In this case, the pressure is polluted by the dynamical pressure due to the flow going around the probe. This is the reason for which we had to limit ourselves to measurements of the pressure at the wall. The pressure fluctuations are measured by the transducers, at half the total height of the cell in the most turbulent shear region. The probes are mounted through the wall, so that their surfaces are tangential to the inner surface of the wall, and do not induce any perturbation in the flow.

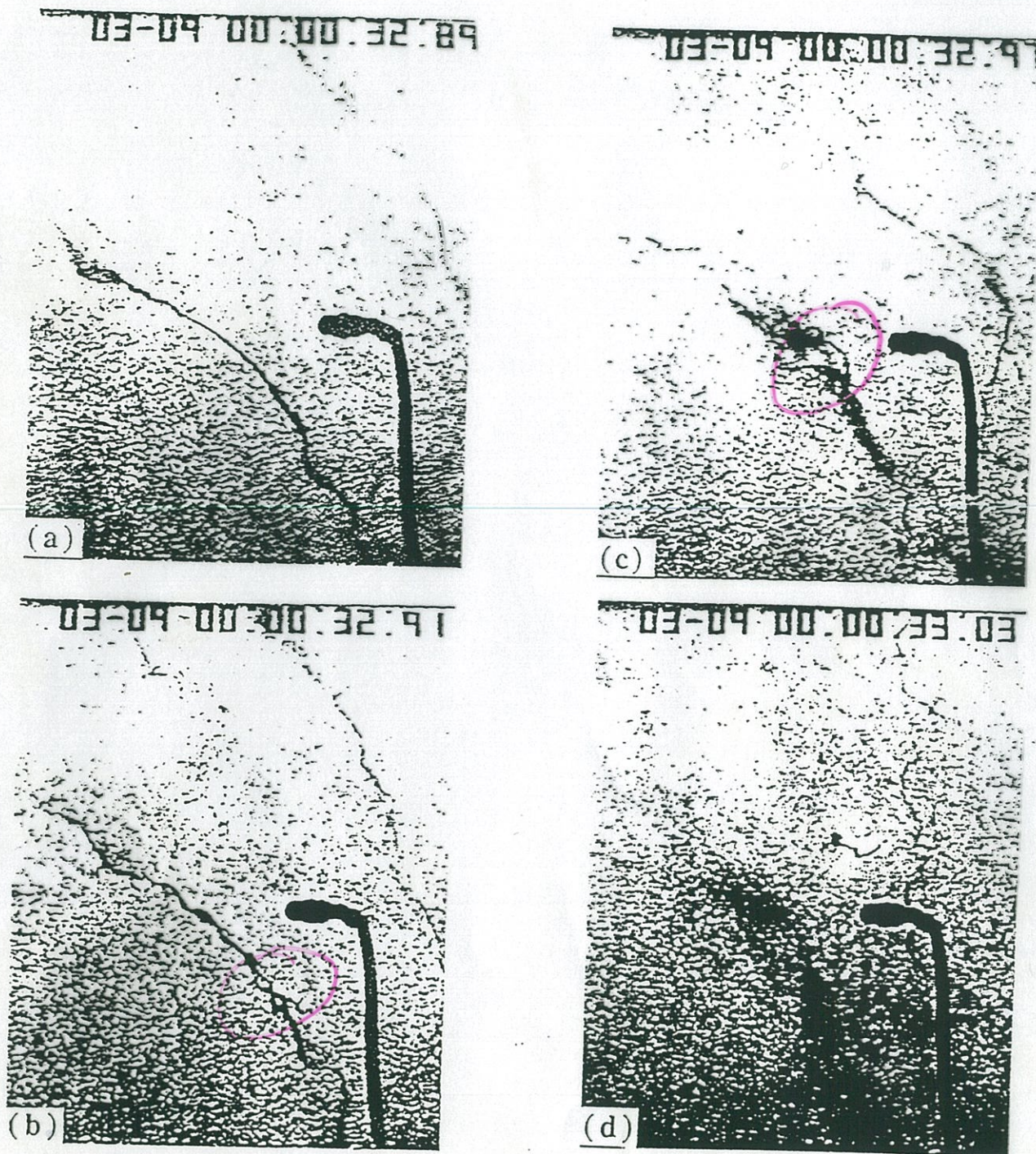


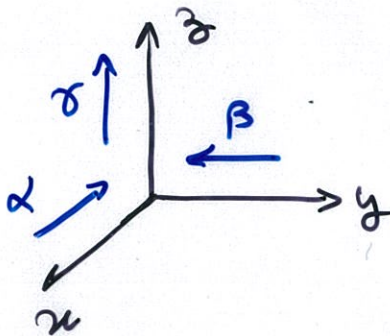
FIG. 2. Four successive pictures showing the breakdown of a large filament seen from the side. The pictures are videotaped with a shutter speed of $1/2000$ s. The times at which the successive images are taken is given at the top (the last digit is hundreds of seconds). Just after its formation the large filament is rather straight (a), then it bursts [(b) and (c)], giving rise to several twisted secondary filaments, before decaying into a large eddy (d). Also note the existence of smaller filaments scattered in all the flow. The scale is given by the diameter $\Phi=3$ mm of the wire connecting the pressure probe visible on the right of the pictures.

Formation de tubes et de nappes de vorticité

par un mécanisme d'étirement d  à un champ de déformation \underline{U} associé à la turbulence à plus grande échelle ($l \gtrsim \lambda$)

$$\underline{U} = (\alpha x, \beta y, \gamma z) \quad ; \quad \nabla \cdot \underline{U} = 0 \Rightarrow \alpha + \beta + \gamma = 0$$

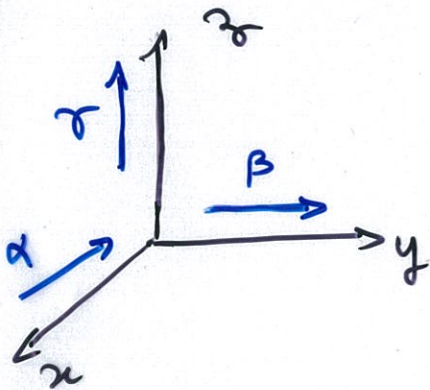
avec : $\alpha < \beta < \gamma$ à $\beta < 0$ déformation axiale
 $\alpha < \beta < 0 < \gamma$



  étirement de la vorticité dans la direction z
   tubes de vorticité

 

$\beta \geq 0$ déformation bi-axiale
 $\alpha < 0 \leq \beta < \gamma$



  compression de la vorticité dans la direction x
   nappes de vorticité

  cas $\beta < 0$: $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}\gamma$ i.e. $\underline{U} = (-\frac{1}{2}\gamma x, -\frac{1}{2}\gamma y, \gamma z)$

qui s'écrit en coordonnées cylindriques (u_r, u_θ, u_z)
 avec $u_z = \gamma z$, $u_r = -\frac{\gamma r}{2}$, $u_\theta = 0$

  On cherche une solution stationnaire de $\underline{\omega}$ de la forme : $\underline{\omega} \parallel \hat{e}_z$; $\underline{\omega} = (0, 0, \omega_z)$ avec $\omega_z = \omega(r)$
 indépendante de θ, z

on note $\underline{v} = (v_r, v_\theta, v_z)$ la vitesse induite par la vorticité;

on peut écrire $\omega = -\Delta\psi = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \psi}{\partial r} \right)$

$$\underline{\psi} = (0, 0, \psi_z(r)) \equiv (0, 0, \psi(r))$$

et $\underline{v} = \nabla \times \underline{\psi} = \begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_z}{\partial \theta} - \frac{\partial \psi_\theta}{\partial z} = 0 = v_r \\ \frac{\partial \psi_r}{\partial z} - \frac{\partial \psi_z}{\partial r} = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = v_\theta \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \psi_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_r}{\partial \theta} = 0 = v_z \end{cases}$

ce qui donne, pour la configuration choisie, la vitesse totale = $\begin{pmatrix} -\gamma r \\ v_\theta \\ \gamma z \end{pmatrix} = \underline{v} + \underline{v}$

L'équation pour la vorticité

$$\partial_t \underline{\omega} + \underline{u} \cdot \nabla \underline{\omega} = \underline{\omega} \cdot \nabla \underline{u} + \nu \Delta \underline{\omega}$$

s'écrit alors dans ce cas particulier

$$\cancel{\partial_t \omega} + (-\gamma r) \frac{\partial \omega}{\partial r} + \underbrace{\frac{v_\theta}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta}}_{=0} + \underbrace{\gamma z \frac{\partial \omega}{\partial z}}_{=0} = \omega \gamma + \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right)$$

(stationnaire) ω ind p  de θ ω ind p  de z

soit $-\frac{\gamma r}{2} \frac{\partial \omega}{\partial r} = \gamma \omega + \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right)$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\gamma}{2} \omega r^2 \right) + \nu \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) = 0$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\gamma}{2} \omega r^2 + \nu r \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial r} \left(r \left(\underbrace{\frac{\gamma \omega r}{2}}_{\equiv f} + \nu \frac{\partial \omega}{\partial r} \right) \right) = 0$$

de la forme $\frac{\partial}{\partial r} (r f) = 0$

on $\frac{\partial}{\partial n}(\eta f) = 0 \rightarrow \eta f = \text{cte}$ i.e. $f = \frac{\text{cte}}{\eta}$

pour éviter toute singularité (ex. $r=0$), on pose la cte = 0

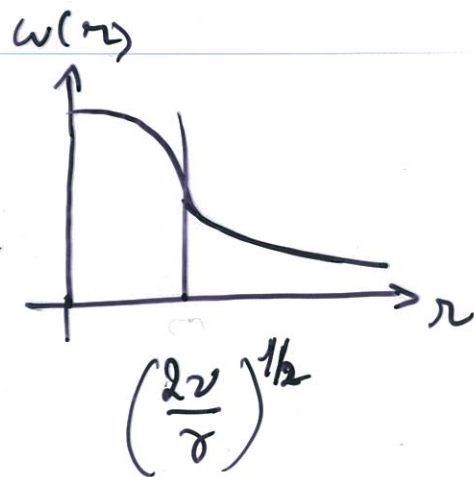
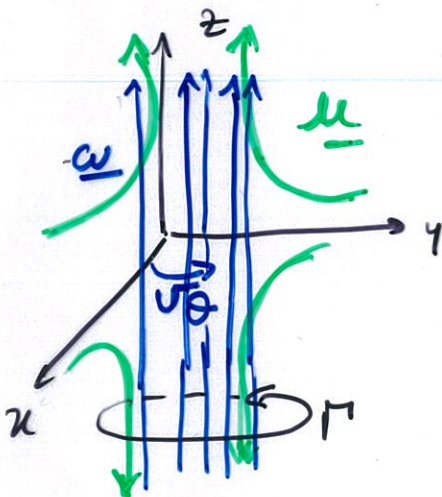
ce qui donne : $\frac{\partial \omega}{\partial r} = -\frac{\sigma}{2\nu} r \omega$

$$\left[\Rightarrow \omega(r) = \omega_0 \exp\left[-\frac{\sigma r^2}{4\nu}\right] \right. \\ \left. \text{avec } \omega(0) = \omega_0; (\omega \rightarrow 0 \text{ qd } r \rightarrow \infty) \right]$$

• le flux total de cette vorticité est

$$\Gamma = 2\pi \int_0^\infty r \omega(r) dr = 4\pi \omega_0 \nu / \sigma \rightarrow \omega_0 = \frac{\Gamma \sigma}{4\pi \nu}$$

• et la vitesse associée : $v(r) = \frac{\Gamma}{2\pi r} \left[1 - \exp\left(-\frac{\sigma r^2}{4\nu}\right) \right]$



② cas $\beta = 0$ (par ex.): $\alpha = -\gamma$; $\underline{U} = (-\gamma x, 0, \gamma z)$

⇒ On cherche une solution stationnaire pour $\underline{\omega}$ de la forme $\underline{\omega} = (0, 0, \omega(x))$.

On introduit $\underline{\psi} = (0, 0, \psi(x))$ tel que $\underline{\omega} = \nabla \times \underline{\psi}$ ce qui donne pour la vitesse induite par la vorticité

$$\underline{v} = \nabla \times \underline{\psi} = (0, -\partial_x \psi, 0)$$

et la vitesse totale $(\underline{U} + \underline{v})$ s'écrit donc $\begin{pmatrix} -\gamma x \\ v_y \\ \gamma z \end{pmatrix}$

L'équation pour la vorticité se réduit dans ce cas à

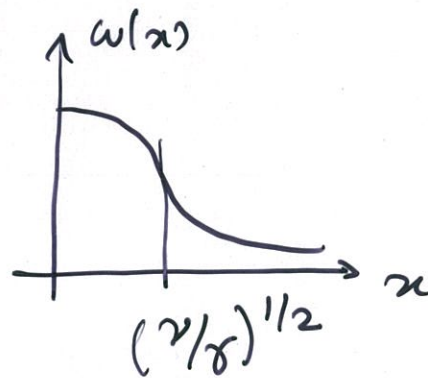
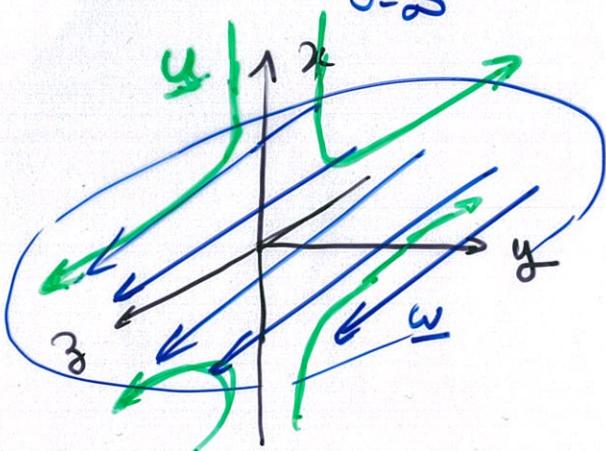
$$-\gamma x \frac{\partial \omega}{\partial x} = \gamma \omega + \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}$$

ce qui donne comme solution:

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega(x) = \omega_0 \exp\left(-\frac{\gamma x^2}{2\nu}\right) \\ \omega(0) = \omega_0, \quad \omega \rightarrow 0 \text{ qd } x \rightarrow \infty \end{array} \right.$$

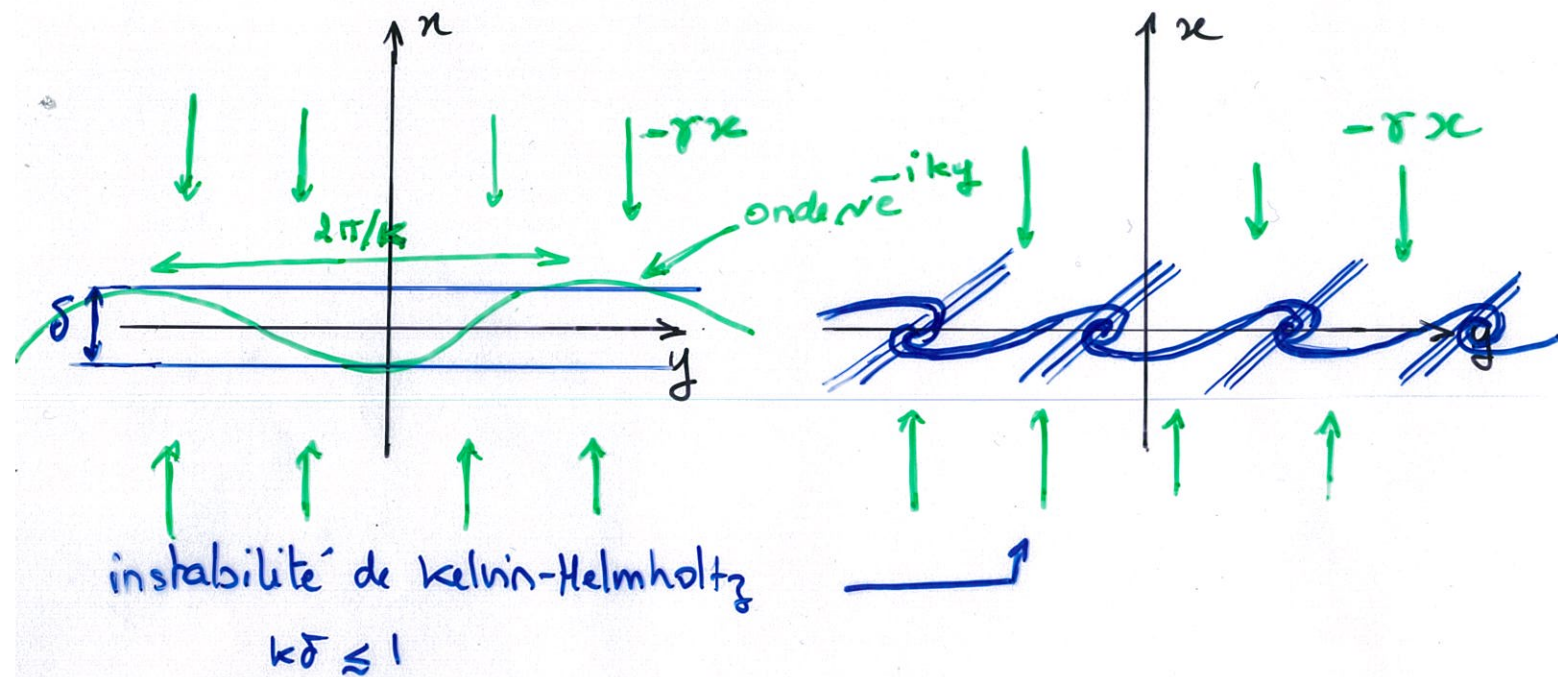
• la circulation totale de $\underline{\omega}$ est:

$$\Gamma = \int_{-\infty}^{+\infty} \omega(x) dx = \omega_0 \left(\frac{2\nu}{\gamma}\right)^{1/2}$$



→ 2 mécanismes pour concentrer de la vorticité:

- > par l'effet d'un étirement axial ($\beta < 0$) sur la vorticité (tubes de vorticité de type Burgers)
- > par la formation de nappes de vorticité ($\beta \geq 0$) qui sont ensuite enroulées par instabilité de Kelvin-Helmholtz.



> ⊕ 1 troisième = par instabilité de focalisation

(Neu, J. Fluid Mech. 143, 1984; Lin & Corcos, J. Fluid Mech. 141, 1984
Passot et al., J. Fluid Mech. 11, 1994)

Bibliographie très générale et non exhaustive

- . G. K. Batchelor, “An introduction to Fluid Dynamics”, *Cambridge University Press*, 1967
- . G. K. Batchelor, “The Theory of Homogeneous Turbulence”, *Cambridge University Press*, 1953
- . C. M. Bender & S. A. Orszag, “Advanced Mathematical Methods for Scientists and Engineers”, *McGraw-Hill International Editions*, 1978
- . U. Frisch, “Turbulence: The legacy of Kolmogorov”, *Cambridge University Press*, 1994
- . H. K. Moffatt, “Dynamique des Fluides”, Tome II, *Cours de l’Ecole Polytechnique*, 1994
- . A. S. Monin & A. M. Yaglom, “Statistical Fluid Mechanics: Mechanics of Turbulence”, *MIT Press*, vol. 1, 1971, vol. 2, 1975
- . L. Landau & E. Lifchitz, “Mécanique des Fluides”, *Pergamon Press*, 2ème édition, 1987
- . S. A. Orszag, “Lectures on the Statistical Theory of Turbulence”, in *Fluids Dynamics*, Eds R. Balian and J. L. Peube, *Gordon & Breach*, pp. 237-374, 1977
- . A. Papoulis, “Probability, Random variables and Stochastic Processes”, 3rd ed., *McGraw-Hill International Editions*, 1991
- . S. B. Pope, “Turbulent Flows”, *Cambridge University Press*, 2000
- . P. G. Saffman, “Vortex Dynamics”, *Cambridge University Press*, 1992

(voir les références citées dans les livres)