Exercices sur le cours 2

Exercice type 1.2 Montrer que l'application $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \mapsto f(x) = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}$ est bijective et préciser son application inverse f^{-1}.

Solution : Soit y un réel (c'est à dire un élément au but de f). Cherchons les antécédents de y par f. Ceux sont les réels x (c'est à dire les éléments à la source de f) tels que

$$y = f(x) \quad \text{ou encore} \quad y = -\frac{3}{4}x + \frac{3}{2} \; ;$$

soit : $\frac{3}{4}x = \frac{3}{2} - y$

soit : $x = \dfrac{3/2 - y}{(3/4)} = \frac{4}{3}\left(\frac{3}{2} - y\right) = 2 - \frac{4}{3}y$.

Ainsi, tout réel y a un unique antécédent : $2 - \frac{4}{3}y$. L'application f est bijective et son inverse est

$$f^{-1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \qquad y \mapsto f^{-1}(y) = 2 - \frac{4}{3}y .$$

<u>Exercice type 1.3</u>. On considère l'application

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad x \mapsto f(x) = \frac{3}{2}x + \frac{17}{10}$$

1) Montrer que f est bijective et préciser f^{-1}

2) Vérifier par le calcul que pour tout x réel : $f^{-1} \circ f(x) = x$ et que $f \circ f^{-1}(x) = x$

<u>Solution :</u> 1) Voir exercice type 1.2. On trouve ici

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad y \mapsto f^{-1}(y) = \frac{2}{3}y - \frac{17}{15}$$

2) $f^{-1} \circ f : \mathbb{R}$ (= source de f) $\longrightarrow \mathbb{R}$ (= but de f^{-1})

$$x \mapsto (f^{-1} \circ f)(x) = f^{-1}(f(x))$$

$$= f^{-1}\left(\frac{3}{2}x + \frac{17}{10}\right)$$

$$= \frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}x + \frac{17}{10}\right) - \frac{17}{15}$$

$$= x + \frac{17}{15} - \frac{17}{15} = x$$

$f \circ f^{-1}$: $\mathbb{R}$ (= source de f^{-1}) $\longrightarrow$ $\mathbb{R}$ (= but de f)

$$x \longmapsto (f \circ f^{-1})(x) = f(f^{-1}(x))$$
$$= f\left(\frac{2}{3}x - \frac{17}{15}\right)$$
$$= \frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}x - \frac{17}{15}\right) + \frac{17}{10}$$
$$= x$$

<u>Exercice type 1.4</u> Même exercice que l'exercice type 1.3 avec $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $x \longmapsto f(x) = 5x + 17$

On trouvera $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $y \mapsto f^{-1}(y) = \frac{1}{5}y - \frac{17}{5}$

<u>Exercice type 2.2</u> On considère la fonction

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto f(x) = \frac{x+2}{x+1}$$

1) Pourquoi f est-elle une fonction, mais pas une application. Quel est le domaine de définition de f ?

2) Montrer que pour tout x distinct de -1, $f(x)$ est distinct de 1

3) On considère l'application :

$$g : \mathbb{R} - \{-1\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{1\} \qquad x \mapsto g(x) = \frac{x+2}{x+1}$$

Montrer que g est bijective et préciser g^{-1}.

<u>Solution :</u> 1) $f(-1) = \frac{1}{0}$ n'est pas défini. Ainsi, f n'est pas une application. Pour $x \neq -1$, $f(x) = \frac{x+2}{x+1}$ est bien défini.

$$\mathcal{D}_f = \mathbb{R} - \{-1\}$$

2) Soit $x \neq -1$, si $f(x) = 1$: $\frac{x+2}{x+1} = 1$

Donc $x+2 = x+1$, donc $2 = 1$ impossible. Ainsi, pour tout $x \neq -1$, $f(x)$ est distinct de 1

3) Notons que d'après les questions 1 et 2, l'application g est bien définie. Montrons que g est bijective. Soit y appartenant à l'ensemble but de g, c'est à dire soit $y \neq 1$. Déterminons les antécédents x de y par g, c'est à dire cherchons les solutions de : $x \neq -1$ et $g(x) = y$.

soit : $x \neq -1$ et $\dfrac{x+2}{x+1} = y$

soit : $x \neq -1$ et $(x+2) = y(x+1)$,

soit : $x \neq -1$ et $x - yx = y - 2$,

soit : $x \neq -1$ et $x(1-y) = y - 2$.

Comme $y \neq 1$, on obtient :

$$x = \frac{y-2}{1-y}$$

(On remarque facilement que $\dfrac{y-2}{1-y} \neq -1$).

Ainsi, tout $y \neq 1$ a bien un unique antécédent par g, à savoir le réel $x = \dfrac{y-2}{1-y}$. L'application g est donc bijective.

$$g^{-1} : \mathbb{R} - \{1\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{-1\} \qquad y \mapsto g^{-1}(y) = \frac{y-2}{1-y}.$$

Exercice 3.2 On considère l'application

$$h : \mathbb{R} - \{3\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{-4\}, \quad x \mapsto h(x) = -4 + \frac{5}{x+3}.$$

1) Montrer que h est bijective et préciser h^{-1}.

2) En déduire les valeurs de x pour lesquelles $h(x) = -\frac{7}{3}$, puis $h(x) = 0$.

3) Vérifier que pour tout $x \neq 3$: $(h^{-1} \circ h)(x) = x$.

Solution 1) Idem Exo 3.1 Cours n° 2

On trouve $h^{-1} ; \mathbb{R} - \{-4\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{3\}$, $y \mapsto h^{-1}(y) = -3 + \frac{5}{y+4}$

$$= \frac{-3y-7}{y+4}.$$

2) Les valeurs de x pour lesquels $h(x) = -\frac{7}{3}$, sont exactement les antécédents de $-\frac{7}{3}$ par h. Comme h est bijective, il n'y a qu'une telle valeur : $x = h^{-1}\left(-\frac{7}{3}\right) = \frac{-3(-7/3)-7}{-7/3+4} = \frac{0}{-7/3+4} = 0$

De même, il n'existe qu'une valeur de x pour laquelle $h(x) = 0$, c'est $x = h^{-1}(0) = \frac{-3 \times 0 - 7}{0+4} = -\frac{7}{4}$

3) $h^{-1} \circ h : \mathbb{R} - \{3\}$ (= source de h) $\longrightarrow \mathbb{R} - \{3\}$ (= but de h^{-1})

$$x \mapsto (h^{-1} \circ h)(x) = h^{-1}(h(x))$$
$$= h^{-1}\left(-4 + \frac{5}{x+3}\right)$$
$$= -3 + \frac{5}{-4 + \frac{5}{x+3} + 4}$$
$$= -3 + \frac{5}{(5/x+3)}$$
$$= -3 + x + 3 = x$$

De même, on pourrait vérifier que pour tout $x \neq -4$: $(h \circ h^{-1})(x) = x$.

<u>Exercice 3.3.</u> On considère l'application

$$h : \mathbb{R} - \{-2\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{1/2\}, \quad x \mapsto h(x) = \frac{1}{2} + \frac{3}{x+2}.$$

1) Montrer que h est bijective et préciser h^{-1}

2) En déduire les valeurs de x pour lesquelles

$h(x) = 2$, puis $h(x) = 0$, puis $h(x) = 1$.

3) Vérifier que pour tout $x \neq \frac{1}{2}$: $(h \circ h^{-1})(x) = x$

<u>Résultat</u> 1) $h^{-1} : \mathbb{R} - \{1/2\} \longrightarrow \mathbb{R} - \{-2\}$ $\quad y \mapsto h^{-1}(y) = 4\left(\frac{2-y}{2y-1}\right)$.

2) On trouve respectivement 1 valeurs :

$x = h^{-1}(2) = 0$, puis $x = h^{-1}(0) = -8$, puis $x = h^{-1}(1) = 4$.

<u>Exercice 4.2 :</u> Soit f l'application

$$f : \,]17, +\infty[\longrightarrow]\tfrac{1}{2}, +\infty[$$
$$x \mapsto f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x-17)^2$$

1) Montrer que f est bijective et préciser f^{-1}.

2) En déduire les reels $x > 17$ tels que $f(x) = 5$

Soit g l'application

$$g : \,]-\infty, 17[\longrightarrow]\tfrac{1}{2}, \infty[$$
$$x \mapsto g(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x-17)^2$$

3) Montrer que g est bijective et préciser g^{-1}

<u>Solution</u> : 1) Soit y appartenant au but de f : $y > \frac{1}{2}$ Déterminons les antécédents de y par f. Ceux sont les solutions de

$x > 17$ (c'est à dire x appartient à la source de f) et $f(x) = y$

soit : $x > 17$ et $y = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}(x-17)^2$,

$x > 17$ et $2y - 1 = (x-17)^2$,

$x > 17$ et $x - 17 = \pm\sqrt{2y-1}$ $(2y-1 > 0$ car $y > \frac{1}{2})$,

$x > 17$ et $x = 17 \pm \sqrt{2y-1}$,

$x = 17 + \sqrt{2y-1}$.

Donc y a un unique antécédent par f à savoir $x = 17 + \sqrt{2y-1}$

L'application f est donc bijective et

$$f^{-1} : \left]\frac{1}{2}, \infty\right[\longrightarrow \left]17, \infty\right[$$
$$y \longmapsto f^{-1}(y) = 17 + \sqrt{2y-1} .$$

2) Ceux sont les antécédents de 5 par f, donc une seule valeur

$$x = f^{-1}(5) = 17 + \sqrt{10-1} = 20 .$$

3) On trouve :

$$g^{-1} : \left]\frac{1}{2}, \infty\right[\longrightarrow \left]-\infty, 17\right[$$
$$y \longmapsto g^{-1}(y) = 17 - \sqrt{2y-1} .$$

Exercice 4.3 On considère l'application :

$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \quad x \mapsto h(x) = x^2 - 4x + 5$.

1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$; $h(x) = (x-2)^2 + 1$

2) Soit $y \in \mathbb{R}$. Préciser suivant la position de y par rapport à 1 les antécédents de y par h

3) Donner la représentation graphique de h. Retrouver géométriquement les résultats de 2.

4) On considère l'application :

$f :]-\infty, 2[\to]1, \infty[\quad x \mapsto f(x) = x^2 - 4x + 5$

4) Montrer que f est bijective et préciser son inverse.

Solution 1) Soit $x \in \mathbb{R}$: $(x-2)^2 + 1 = x^2 - 4x + 4 + 1 = x^2 - 4x + 5$

$= h(x)$

2) Soit $y \in \mathbb{R}$, les antécédents de y par h sont les solutions de

$x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = y$

soit $\quad x \in \mathbb{R}, \quad (x-2)^2 + 1 = y$

$- \quad x \in \mathbb{R} \quad (x-2)^2 = y - 1$

Si $y-1>0$, on obtient $x-2=\pm\sqrt{y-1}$

$x=2\pm\sqrt{y-1}$

$y-1=0$, on obtient $(x-2)^2=0$

$x=2$

$y-1<0$, il n'y a pas de solutions

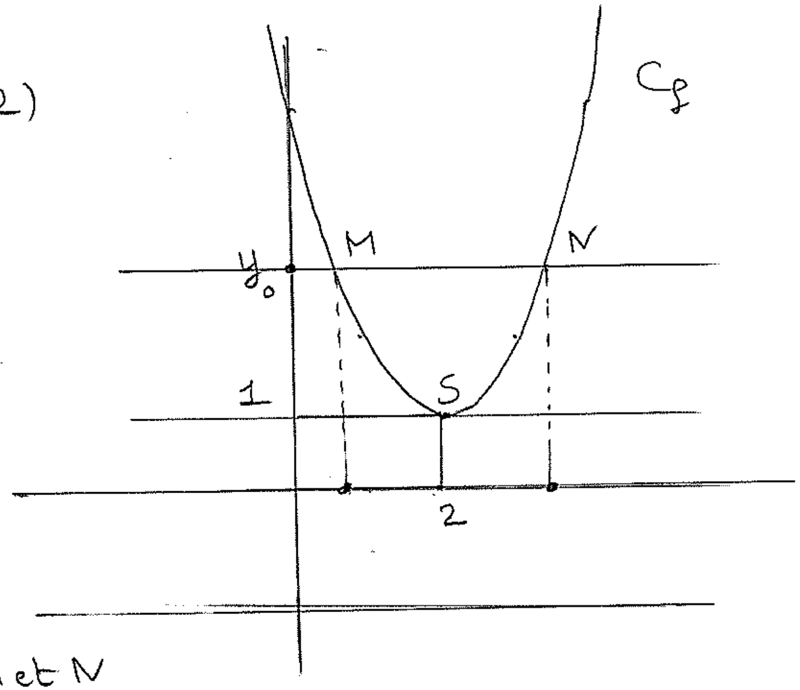
Ainsi, si $y>1$, y a deux antécédents par h : $x=2\pm\sqrt{y-1}$

$y=1$ y a un unique antécédent par h : $x=2$

$y<1$ y n'a pas d'antécédents par h

3) h est dérivable $h'(x)=2(x-2)$

x	$-\infty$		2		∞
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
h	∞	$\searrow$	$h(2)=1$	$\nearrow$	∞



Pour $y_0>1$, il y a deux points M et N d'ordonnée y_0 sur C_f. Les abscisses de M et N sont les antécédents de y_0 par f

Pour $y_0 = 1$, il y a un seul point S d'ordonnée 1 sur C_f. Son abscisse $x = 2$ est l'antécédent de $y_0 = 1$ par f

Pour $y_0 < 1$, il n'y a pas de point d'ordonnée y_0 sur C_f. Donc si $y_0 < 1$, y_0 n'a pas d'antécédent par f

4) On trouve :

$h^{-1} :]1, \infty[\rightarrow]-\infty, 2[\qquad y \mapsto h^{-1}(y) = 2 - \sqrt{y-1}$