Thèmes : Algèbre bilinéaire, Groupes orthogonaux, Quaternions

---

Exercice 1. Étant donné un isomorphisme φ entre E et E^*, expliciter une forme bilinéaire b telle que $\varphi = \varphi_b$. Donner un exemple où b n'est pas symétrique.

Exercice 2. Montrer qu'une forme quadratique q induit une forme quadratique non-dégénérée sur l'espace quotient $E/\ker q$.

Exercice 3. Donner des coordonnées linéaires sur $\mathbf{C}^3$ rendant la forme quadratique $2z_1z_2 + z_3^2$ comme somme de carrés.

Exercice 4. On munit $O(2,1) \subset \mathrm{GL}_3(\mathbf{R})$ de la topologie induite par la topologie d'espace vectoriel normé de $M_3(\mathbf{R})$.

(1) Montrer que $O(2,1)$ n'est pas connexe.
(2) Montrer qu'il admet quatre composantes connexes.

Exercice 5. Montrer que l'action linéaire de $O_n(\mathbf{R})$ sur la $(n-1)$-sphère

$$\mathbf{S}^{n-1} = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$$

est transitive. Déterminer le stabilisateur d'un point.

Exercice 6. Soient $k \leqslant n$ deux entiers. Montrer que $O_n(\mathbf{R})$ agit transitivement sur

$$X = \{W \subset \mathbf{R}^n,\ W \text{ sous-espace vectoriel },\ \dim W = k\}$$

Déterminer le stabilisateur d'un point de X.

Le résultat reste-t-il vrai dans d'autres signatures ? C'est-à-dire lorsqu'on remplace $O_n(\mathbf{R})$ par $O(p,q)$.

Exercice 7. Rappeler la définition du produit mixte dans un espace euclidien orienté, et montrer que la définition ne comporte pas d'ambigüité.

Exercice 8. Démontrer que le centre de $\mathbf{H}$ est la droite réelle, c'est-à-dire que quel que soit $q_0 \in \mathbf{H}$, on a l'équivalence :

$$(\forall q \in \mathbf{H},\ qq_0 = q_0q) \iff \overline{q_0} = q_0.$$

Exercice 9. Soit $G = \{q \in \mathbf{H} \mid N(q) = 1\}$, $V = \{q \in \mathbf{H} \mid q + \overline{q} = 0\}$. On identifie également $\mathbf{R}$ et $\{q \in \mathbf{H} \mid q = \overline{q}\}$.

Soit maintenant $q \in G$, qu'on écrit $q = a + v$, où $a \in \mathbf{R}$ et $v \in V$. On a alors $a^2 + N(v) = 1$, on choisit alors θ tel que $a = \cos(\theta)$ et $\|v\| = \sin(\theta)$, où $\|v\| = \sqrt{N(v)}$. On définit $s_q : q' \in \mathbf{H} \mapsto qq'q^{-1}$.

(1) Montrer que s_q préserve V.
(2) Montrer que s_q est une rotation de V d'axe $\mathbf{R}.v$.
(3) On suppose que $v = b.i$ avec $b \in \mathbf{R}_+$. Montrer que s_q est la rotation d'axe $\mathbf{R}.v$ et d'angle 2θ.
(4) Dans le cas général, montrer qu'il existe $g \in G$ et $b \in \mathbf{R}$ tels que $s_g(q) = a + b.i$. En déduire que la conclusion précédente reste valable.
(5) En déduire une autre démonstration de la surjectivité de l'application $G \to \mathrm{SO}(V)$ construite dans le cours.