

Thèmes : Caractères des groupes finis, Représentations linéaires des groupes finis, quelques tables des caractères

Exercice 1. Déterminer les caractères du groupe symétrique \mathfrak{S}_n , $n \geq 3$.

Exercice 2. Donner un exemple de groupe fini (non abélien) G , qui admet un sous-groupe H et un caractère $\chi : H \rightarrow \mathbf{C}^*$ qui ne s'étend pas en un caractère de G .

Exercice 3. En utilisant le théorème de structure des groupes abéliens finis, montrer que pour tout groupe G abélien fini, il existe un isomorphisme $\widehat{\widehat{G}} \simeq G$ entre G et son dual. *Noter qu'il n'est pas canonique.*

Exercice 4. Soit G un groupe abélien fini, de groupe dual \widehat{G} . Montrer que si $\chi \in \widehat{G}$ est non trivial, alors

$$\sum_{g \in G} \chi(g) = 0.$$

Pour $g_0 \in G$ tel que $\chi(g_0) \neq 1$, on considérera $\chi(g_0) \sum_{g \in G} \chi(g)$.

En déduire que pour tout $x \in G \setminus \{e\}$, on a

$$\sum_{\chi \in \widehat{G}} \chi(x) = 0.$$

Exercice 5. Montrer qu'une représentation de $G = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ sur un \mathbf{C} -espace vectoriel V est la donnée d'un endomorphisme $u \in \text{Hom}(V)$ tel que $u^n = \text{id}_V$.

Généraliser au cas $G = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$.

Exercice 6. Donner deux représentations de $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ sur \mathbf{C}^2 qui sont non isomorphes.

Exercice 7. Rappeler la représentation "standard" du groupe diédral D_{2n} sur \mathbf{C}^2 et calculer son caractère.

Exercice 8. Soit (V, ρ) une représentation d'un groupe fini G . Montrer qu'il existe une unique représentation (V^*, ρ^*) de G sur le dual de V telle qu'on ait pour tous $g \in G$, $v \in V$ et $\ell \in V^*$

$$\ell(v) = [\rho^*(g)(\ell)](\rho(g)v).$$

On l'appelle *représentation contragédiente* de (V, ρ) . Montrer que si $\chi : G \rightarrow \mathbf{C}$ est le caractère de ρ , alors $\bar{\chi}$ est celui de ρ^* .

Exercice 9. Soient (V_1, ρ_1) , (V_2, ρ_2) deux représentations d'un groupe fini G . En notant $V = \text{Hom}(V_1, V_2)$ l'espace des applications linéaires de V_1 vers V_2 , construire une représentation "naturelle" $\rho : G \rightarrow \text{GL}(V)$. Exprimer son caractère en fonction des caractères χ_1, χ_2 de ρ_1, ρ_2 .

Exercice 10. Soit G un groupe fini et soit (V, ρ) une représentation irréductible de G . Rappeler comment construire une forme hermitienne $\rho(G)$ -invariante $\langle \cdot, \cdot \rangle$ sur V . Montrer que toute autre forme hermitienne invariante est de la forme $\lambda \langle \cdot, \cdot \rangle$, où $\lambda \in \mathbf{R}_+^*$.

Exercice 11. Soit G un groupe fini abélien.

- (1) Montrer que si (V, ρ) est une représentation de G , alors pour tout $g \in G$, $\rho(g) : V \rightarrow V$ est un morphisme de représentations.
- (2) En déduire que toute représentation irréductible de G est de dimension 1.
- (3) Rappeler les caractères de $\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

Exercice 12. Soient (V_i, ρ_i) , $i = 1, \dots, k$ les représentations irréductibles de G , où k désigne le nombre de classes de conjugaison de G .

- (1) Déterminer le caractère χ_{reg} de la représentation régulière de G .
- (2) Pour tout i , calculer la multiplicité de V_i dans la représentation régulière de G .

(3) En déduire la formule

$$|G| = \sum_{i=1}^k (\dim V_i)^2.$$

Exercice 13. Soit G un groupe fini. Montrer que G est commutatif si et seulement si ses représentations irréductibles sont toutes de dimension 1.

Exercice 14. Montrer que si V est une représentation de G de caractère χ tel que $\langle \chi, \chi \rangle = 2$, alors V est isomorphe à la somme directe de deux représentations irréductibles

Exercice 15. Soit $g \in G$ et soit $c(g)$ le cardinal de sa classe de conjugaison. Soient χ_1, \dots, χ_k les caractères des représentations irréductibles de G .

Soit f_g la fonction indicatrice de la classe de conjugaison de g .

- (1) Montrer que f_g est centrale, et calculer ses coordonnées dans la base (χ_1, \dots, χ_k) .
 (2) En déduire :

$$(a) \sum_{i=1}^k \overline{\chi_i(g)} \chi_i(g) = \frac{|G|}{c(g)}$$

$$(b) \sum_{i=1}^k \overline{\chi_i(g)} \chi_i(h) = 0 \text{ si } h \text{ n'est pas conjugué à } g.$$

Ceci montre que les colonnes de la table des caractères de G sont deux à deux orthogonales. Le vérifier sur les exemples.

Exercice 16. Dresser la table des caractères du groupe alterné \mathcal{A}_4 .

Exercice 17. Dresser la table des caractères du groupe des quaternions \mathbf{H}_8 .