Thèmes : Groupes abéliens finis, Facteurs invariants, Théorèmes de Sylow, Botanique.

Exercice 1. Donner les facteurs invariants des groupes suivants :
(1) $\mathbf{Z}/8\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/12\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/24\mathbf{Z}$.
(2) $\mathbf{Z}/54\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/26\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/15\mathbf{Z}$.

Exercice 2. (1) Les groupes $\mathbf{Z}/12\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/72\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}/18\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/48\mathbf{Z}$ sont-ils isomorphes.
(2) Les groupes $\mathbf{Z}/72\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/84\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}/36\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/168\mathbf{Z}$ sont-ils isomorphes

Exercice 3. Soient G, H, K des groupes abéliens finis.
(1) Montrer que si $G \times G \simeq H \times H$, alors $G \simeq H$.
(2) Montrer que si $G \times K \simeq H \times K$, alors $G \simeq H$.

Exercice 4. Montrer qu'un groupe abélien fini non cyclique possède un sous-groupe isomorphe à $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ pour un certain nombre premier p.

Exercice 5. Pour n un entier fixé, combien y a-t-il de groupes abéliens de cardinal n ? Commencer par des valeurs spéciales ($n = 360$ par exemple).

Exercice 6. Classer les groupes d'ordre 15.

Exercice 7. Classer les groupes d'ordre 21.

Exercice 8. Expliciter les sous-groupes de Sylow de $\mathcal{A}_4$ et $\mathcal{A}_5$.

Exercice 9. Montrer que $\mathfrak{S}_4$ contient trois 2-Sylow, isomorphes à D_8.

Exercice 10. Expliciter les sous-groupes de Sylow de D_{10}.

Exercice 11. Soit p un nombre premier.
(1) Quel est l'ordre d'un p-Sylow de $\mathfrak{S}_p$?
(2) Combien y a-t-il de p-Sylow dans $\mathfrak{S}_p$?
(3) En déduire $(p-1)! \equiv -1 \text{ mod.} p$. (théorème de Wilson)

Exercice 12. Soit G un groupe d'ordre 36. Montrer qu'il n'est pas simple.

Exercice 13. Soit p un nombre premier et soit n un entier tel que $n < p$. Soit H un sous-groupe d'ordre p de G. Montrer que H est distingué.

Exercice 14. Soit G un groupe abélien. Montrer que pour tout p diviseur premier de $|G|$, G admet un unique p-Sylow.

Exercice 15. Soient p, q deux nombres premiers distincts. Montrer que tout groupe fini d'ordre p^2q est non simple.

Exercice 16. Soit G un groupe d'ordre 200. Montrer que G admet un unique 5-Sylow.

Exercice 17. Montrer qu'un groupe d'ordre 56 n'est pas simple.

Exercice 18. Soit G un groupe d'ordre $180 = 4 \times 9 \times 5$. Montrer que G admet ou bien 1 ou bien 36 5-Sylow.

Exercice 19. Pour tout nombre premier p, donner un exemple de groupe non-abélien d'ordre p^3.