Thèmes : Actions de groupes, Produits semi-direct, Structure multiplicative de $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^\times$

Exercice 1. Soit G un groupe. Discuter (démonstration ou contre-exemple) les assertions suivantes.

(1) Si tout sous-groupe H de G est distingué, alors G est abélien.
(2) Si $H \lhd G$ et $K \lhd H$, alors $K \lhd G$.
(3) Si G a un nombre fini de sous-groupes, alors G est fini.

Exercice 2. Soit G un groupe. On rappelle que $\mathcal{Z}(G)$ désigne son centre.

(1) Rappeler pourquoi $\mathcal{Z}(G)$ est distingué dans G.
(2) On suppose que $G/\mathcal{Z}(G)$ est monogène. Montrer que G est abélien.
(3) Montrer qu'on ne peut pas remplacer l'hypothèse "monogène" par "abélien".

Exercice 3. Soit $\mathbb{F}_2$ le corps à deux éléments.

(1) Quel est l'ordre de $G = \mathrm{GL}_2(\mathbb{F}_2)$?
(2) Donner un exemple d'action linéaire fidèle de G sur un $\mathbb{F}_2$-espace-vectoriel de dimension 2.
(3) En déduire que G est isomorphe à $\mathfrak{S}_3$.

Exercice 4. Soit G un groupe fini d'ordre p^n, où p est un nombre premier et $n \geqslant 1$. Montrer que son centre n'est pas réduit à $\{e\}$.

Exercice 5. Soit G un groupe d'ordre p^2 où p est un nombre premier. Montrer que G est abélien.
Soit G un groupe fini non-abélien d'ordre p^3. Que dire de son centre ?

Exercice 6. Soit G fini un groupe agissant sur un ensemble fini X. On note $\Omega \subset \mathcal{P}(X)$ l'ensemble des G-orbites, et pour $x \in X$, on note G_x le stabilisateur de x. On note enfin $\mathcal{O}_x$ l'orbite d'un élément $x \in X$.

(1) Pour tout $x \in X$, exprimer $|G_x|$ en fonction de $\sharp\mathcal{O}_x$ et $|G|$.
(2) En déduire que pour toute $\mathcal{O} \in \Omega$,
$$\sum_{x\in\mathcal{O}} |G_x|$$
est indépendante de $\mathcal{O}$ et exprimer simplement sa valeur.

Pour tout $g \in G$, on note $\mathrm{Fix}(g) = \{x \in X \mid g.x = x\}$.

(3) En dénombrant $\{(g, x) \in G \times X \mid g.x = x\}$ de deux façons différentes, en déduire la **formule de Burnside**
$$\sharp\Omega = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G} \sharp\mathrm{Fix}(g).$$

Exercice 7. Soit V un espace vectoriel sur un corps K, de dimension finie $n \geqslant 1$. Pour tout entier $k \in [\![1, n-1]\!]$, on note
$$X_k = \{W \subset V,\ W \text{ sous-espace vectoriel }, \dim W = k\}$$
la k-*Grassmannienne* de V.

(1) Pour tout $g \in \mathrm{GL}(V)$ et $W \in X_k$, on note $g.W := g(W)$ l'image de W par g. Justifier qu'on définit ainsi une action de $\mathrm{GL}(V)$ sur X_k.
(2) Montrer que cette action est transitive. *On pourra commencer par le cas* $k = 1$.
(3) Montrer que la restriction de cette action à $\mathrm{SL}(V)$ reste transitive.

On suppose à présent $K = \mathbf{R}$. Soit Q une forme quadratique définie positive sur V. On note $G = O(Q)$ le groupe des isométries de Q, défini par
$$O(Q) = \{g \in \mathrm{GL}(V)\ :\ \forall v \in V,\ Q(g(v)) = Q(v)\}.$$
On admettra qu'il s'agit bien d'un sous-groupe de $\mathrm{GL}(V)$.

(4) Montrer que l'action de G sur X_k est transitive. *On pourra commencer par le cas* $k = 1$.
(5) Que penser du cas où Q n'est plus définie positive ?

Exercice 8. Soient G un groupe, et $N, H < G$ deux sous-groupes. Montrer que si $G = N.H$ et $N \cap H = \{e\}$, alors tout élément de G s'écrit de façon unique comme produit d'un élément de N et d'un élément de H.

Exercice 9. Soient G et H deux groupes et soit $f : G \to H$ un morphisme *surjectif*. Soit $N = \ker f$. Montrer que s'il existe un morphisme $s : H \to G$ tel que $f \circ s = \mathrm{id}_H$, alors $G \simeq N \rtimes H$, pour une loi de produit semi-direct à expliciter.

Vérifier que $\mathbb{H}_8$ fournit un contre-exemple lorsqu'on ne suppose pas l'existence de s.

Remark 0.1. Lorsqu'on a mis en évidence un tel f, on dit qu'on a *suite exacte courte*

$$1 \to N \to G \to H \to 1$$

la notation signifiant que la deuxième flèche est injective, la troisième surjective, et que l'image de la deuxième est le noyau de la troisième. Une application s telle que $f \circ s = \mathrm{id}_H$ est ce qu'on appelle une *section* de la suite exacte. Un produit semi-direct apparaît dès qu'il y a une suite exacte courte scindée, et inversement.

Exercice 10. Vérifier que $\mathfrak{S}_n \simeq \overset{N}{\mathcal{A}_n} \rtimes \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$, en explicitant le produit semi-direct.

Exercice 11. Démontrer que pour tout corps K, on a un isomorphisme

$$\mathrm{GL}_n(K) \simeq \mathrm{SL}_n(K) \rtimes_\varphi K^*$$

où φ est à préciser.

Exercice 12. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbf{R})$ est isomorphe à $\mathrm{SL}_n(\mathbf{R}) \times \mathbf{R}^*$ si et seulement si n est impair.

Exercice 13. Soit G un groupe et soient g, h deux éléments qui commutent et sont d'ordre n et m respectivement,avec $n \wedge m = 1$. Montrer que gh est d'ordre nm.

Exercice 14. Soit $n \geqslant 1$. Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on rappelle qu'on note P_σ la matrice de permutation associée. Montrer que $\det P_\sigma = \varepsilon(\sigma)$.

Exercice 15. Soit $n \geqslant 2$ un entier. Soit $G = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$.

(1) Soit d un diviseur de n. Montrer que G admet un unique sous-groupe d'ordre d qu'on explicitera.
(2) Combien y a-t-il d'éléments d'ordre d dans G ?
(3) En déduire la formule

$$n = \sum_{d|n} \varphi(d)$$

où φ désigne l'indicatrice d'Euler.

Exercice 16. Soit $p > 2$ un nombre premier impair. Montrer qu'il y a $\frac{p-1}{2}$ carrés dans $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})^*$.

Exercice 17. Démontrer le théorème de Wilson : Un entier $p \geqslant 1$ est premier si et seulement si $(p-1)! \equiv -1 \mod p$.