Thèmes : Relations d'équivalence, Groupes quotients, sous-groupes dérivés, groupe des permutations, actions de groupes

---

Exercice 1 (Espace projectif)**.** Soient $\sim$ et $\sim_+$ les relations binaires définies sur $\mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ par $\forall v, w \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$,

$$v \sim w \iff \exists \lambda \in \mathbf{R}^* \;:\; w = \lambda.v$$
$$v \sim_+ w \iff \exists \lambda \in \mathbf{R}^*_+ \;:\; w = \lambda.v$$

(1) Justifier que ce sont des relations d'équivalence.
(2) Quelles sont les classes d'équivalence de $\sim$?
(3) Donner une bijection entre l'ensemble quotient $(\mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim_+$ et la sphère unité $\mathbf{S}^n$ définie par $\mathbf{S}^n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \;:\; x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\}$.

On note $P^n(\mathbf{R}) := (\mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$, l'*espace projectif réel* de dimension n.

(4) Définir une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ sur $\mathbf{S}^n$ telle que $\mathbf{S}^n/\mathcal{R}$ est en bijection avec $P^n(\mathbf{R})$.

Si K est un corps quelconque, on définit l'*espace projectif sur* K par $P^n(K) = (K^{n+1} \setminus \{0\})/\sim$, où similairement $v \sim w \iff \exists \lambda \in K^* \;:\; w = \lambda.v$.

(5) Donner une bijection naturelle entre la *droite projective complexe* $P^1(\mathbf{C})$ et la sphère $\mathbf{S}^2$.

Exercice 2. Retrouver la preuve du théorème d'isomorphisme :
Soit $f : G \to H$ un morphisme de groupe, alors f induit un isomorphisme de groupes

$$\overline{f} : G/\ker f \to \mathrm{Im}(f).$$

Exercice 3 (Structure d'espace vectoriel quotient)**.** Soit E un K-espace vectoriel et soit $F \subset E$ un sous-espace vectoriel. Notons E/F le groupe additif quotient, et notons $\pi : E \to E/F$ la projection canonique. On veut munir E/F d'une structure de K-espace vectoriel naturelle, c'est-à-dire une loi externe $K \times E/F \to E/F$ telle que pour tout $x \in E$ et $\lambda \in K$, $\lambda.\pi(x) = \pi(\lambda.x)$.

(1) Soit $\lambda \in K$. Démontrer qu'il existe un unique morphisme de groupes $m_\lambda : E/F \to E/F$ tel que pour tout $x \in E$, $m_\lambda(\pi(x)) = \pi(\lambda.x)$. (penser à appliquer le théorème de factorisation).
(2) Démontrer que pour tous $\lambda, \mu \in K$, $m_\lambda \circ m_\mu = m_\mu \circ m_\lambda = m_{\lambda\mu}$ et $m_1 = \mathrm{id}_{E/F}$, où 1 désigne l'élément unité de K.
(3) Vérifier que pour tous $\lambda, \mu \in K$ et $\overline{x} \in E/F$, on a $m_{\lambda+\mu}(\overline{x}) = m_\lambda(\overline{x}) + m_\mu(\overline{x})$.
(4) Conclure.

On considère désormais implicitement cette structure canonique d'espace vectoriel sur E/F.

(5) Vérifier que la projection canonique $\pi : E \to E/F$ est une application linéaire surjective et que $\ker \pi = F$.
(6) Vérifier que pour tout supplémentaire G de F dans E, la restriction $\pi|_G : G \to E/F$ est un isomorphisme.
(7) Démontrer que si E est de dimension finie, alors E/F l'est également et que

$$\dim E/F = \dim E - \dim F.$$

Exercice 4. Soit G un groupe, et soient H, K deux sous-groupes distingués de G tels que $H \subset K$. Montrer qu'il existe un morphisme surjectif naturel $G/H \to G/K$, de noyau K/H, la projection de K dans G/H. En déduire que $(K/H) \lhd (G/H)$ et que

$$(G/H)\,/\,(K/H) \simeq G/K.$$

Exercice 5. Soient G un groupe simple non abélien, et H un groupe abélien. Montrer que tout morphisme $f : G \to H$ est trivial (i.e. $\ker f = G$). *On pourra considérer le sous-groupe dérivé* $D(G)$ *de* G.
Discuter les hypothèses.

Exercice 6. Déterminer le sous-groupe dérivé de $\mathbf{H}_8$ et reconnaître l'abélianisé $\mathbf{H}_8/D(\mathbf{H}_8)$.

Exercice 7. Montrer que le sous-groupe dérivé du groupe de Heisenberg $\mathcal{H}_3$ coïncide avec son centre. On rappelle que

$$\mathcal{H}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ x, y, z \in \mathbf{R} \right\}.$$

Exercice 8. Montrer que le sous-groupe dérivé de $\mathrm{GL}_n(K)$ est $\mathrm{SL}_n(K)$, sauf si $n = 2$ et K est de caractéristique 2. De même, montrer que $D(\mathrm{SL}_n(K)) = \mathrm{SL}_n(K)$.

En déduire que pour tout groupe abélien G, tout morphisme $\mathrm{SL}_n(K) \to G$ est trivial.

Exercice 9. Soit G un groupe simple. Montrer que tout morphisme $f : G \to H$ est soit injectif, soit trivial. Discuter les hypothèses.

Exercice 10. Déterminer les sous-groupes de $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +)$.

Exercice 11. Montrer que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les transpositions.

Exercice 12. Montrer que $\mathfrak{S}_n$ est engendré par les transpositions $(i\ i+1)$, pour $1 \leqslant i \leqslant n$.

Exercice 13. Montrer qu'on ne peut pas engendrer $\mathfrak{S}_n$ avec $n-2$ transpositions ou moins.

Exercice 14. Montrer que le groupe symétrique est engendré par $(1\ 2)$ et le n-cycle c donné par

$$c = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n-1 & n \\ 2 & 3 & \cdots & n & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 15. Soit G un groupe fini. Montrer que tout morphisme $G \to (\mathbf{R}^*, \times)$ est à image dans $\{\pm 1\}$. Généraliser à $\mathbf{C}^*$.

Montrer que la signature est l'unique morphisme non-trivial $\mathfrak{S}_n \to \mathbf{C}^*$.

Exercice 16. Combien y a-t-il de cycles de longueur k dans $\mathcal{S}_n$?

Exercice 17. Montrer que $\mathcal{A}_n$ est engendré par les 3-cycles de la forme $(1\ 2\ k)$, où $3 \leqslant k \leqslant n$.

Exercice 18. Rappeler les classes de conjugaison de $\mathfrak{S}_n$. Déterminer les classes de conjugaison de $\mathcal{A}_4$.

Exercice 19. Montrer que $\mathcal{A}_4$ n'est pas simple. Construire un morphisme surjectif $\varphi : \mathcal{A}_4 \to \mathbf{Z}/3\mathbf{Z}$.

Exercice 20. Soit $H \triangleleft \mathfrak{S}_n$ un sous-groupe distingué. Montrer que si H contient une transposition, alors $H = \mathfrak{S}_n$.

Exercice 21. Déterminer les sous-groupes distingués de $\mathfrak{S}_n$.

Exercice 22. On reprend les notations et définitions de l'Exercice 1. Si $v \in K^{n+1} \setminus \{0\}$, on note $[v] \in P^n(K)$ son image par la projection canonique.

(1) Définir une action naturelle de $\mathrm{GL}_{n+1}(K)$ sur $P^n(K)$.
(2) Est-elle fidèle ? Quel est son noyau ?
(3) Montrer qu'elle est transitive.
(4) Montrer que l'action de $\mathrm{GL}_2(K)$ sur sur la droite projective $P^1(K)$ est *simplement* 3-*transitive*, c'est-à-dire qu'étant donnés deux triplets $([v_1], [v_2], [v_3])$, $([w_1], [w_2], [w_3]) \in (P^1(K))^3$ formés d'éléments deux à deux distincts, alors il existe $g \in \mathrm{GL}_2(K)$ tel que $g.[v_1] = [w_1]$, $g.[v_2] = [w_2]$ et $g[v_3] = [w_3]$, et que de plus un autre élément g' vérifiant ces conditions est de la forme $g' = \lambda g$, avec $\lambda \in K^*$.

Exercice 23. Soient G un groupe et $H < G$ un sous-groupe. Donnez une condition nécessaire à suffisante pour que l'action par translation à gauche $G \curvearrowright G/H$ soit fidèle.