

Thèmes : Premiers exemples de groupes, généralités, groupes linéaires, sous-groupes, morphismes, ordre, sous-groupe engendré par une partie, centre

Exercice 1. Donner un exemple de groupe

- (1) abélien fini
- (2) abélien infini
- (3) abélien infini non monogène
- (4) abélien fini non monogène
- (5) non abélien et fini
- (6) simple, non abélien et fini

Exercice 2. Expliquer par un argument élémentaire pourquoi la loi suivante n'est pas une loi de groupe. Il n'y a pas unicité de la réponse !

★	1	2	3	4	5	6	7
1	1	2	3	4	5	6	7
2	2	3	1	5	4	7	6
3	3	1	2	6	7	4	5
4	4	5	6	7	2	3	1
5	5	4	7	2	6	1	3
6	6	7	4	3	1	5	2
7	7	6	5	1	3	2	4

Exercice 3. Soient G un groupe et H, K deux sous-groupes de G . Montrer que si $H \cup K$ est un sous-groupe de G , alors ou bien $H \subset K$ ou bien $K \subset H$.

Exercice 4. Soit p un nombre premier. Montrer que tout groupe fini d'ordre p est cyclique.

Exercice 5. Soit G un groupe fini d'ordre ≥ 2 et tel que $\forall g \in G, g^2 = e$.

- (1) Montrer que G est commutatif.
- (2) Montrer que G est isomorphe à $(\mathbf{Z}/2\mathbf{Z})^n$, où $n \geq 1$. On pourra montrer que G admet une structure d'espace vectoriel sur $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$.

Exercice 6. Donner une démonstration du petit théorème de Fermat utilisant le théorème de Lagrange.

Exercice 7. Soit $n \geq 1$. Déterminer les morphismes de groupes $f : (\mathbf{Z}/n\mathbf{Z}, +) \rightarrow (\mathbf{Z}, +)$.

Exercice 8. Déterminer les sous-groupes de $(\mathbf{Z}, +)$.

Exercice 9. Montrer que les sous-groupes de $(\mathbf{R}, +)$ sont soit de la forme $a\mathbf{Z}$, $a > 0$, soit denses. Donner quelques exemples de sous-groupes denses de \mathbf{R} .

Exercice 10. (1) Déterminer tous les morphismes de groupe $f : (\mathbf{R}, +) \rightarrow (\mathbf{R}, +)$ qui sont *continus* pour la topologie standard de \mathbf{R} .

- (2) Vérifier que si $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est un morphisme additif, alors f est continu si et seulement si f est continu en 0.
- (3) (*) En considérant \mathbf{R} comme un \mathbf{Q} -espace vectoriel, et en admettant l'existence d'un supplémentaire de \mathbf{Q} dans \mathbf{R} (c'est à dire un sous- \mathbf{Q} -espace-vectoriel $H \subset \mathbf{R}$ tel que $\mathbf{R} = \mathbf{Q} \oplus H$), donner un exemple de morphisme additif $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ non-continu.

Exercice 11. Montrer que les groupes $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \times \mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ et $\mathbf{Z}/4\mathbf{Z}$ ne sont pas isomorphes.

Exercice 12. Montrer que \mathbf{Z} et \mathbf{Z}^2 ne sont pas isomorphes.

Exercice 13. Soit G un groupe fini et soit $f : G \rightarrow \mathbf{C}^*$ un morphisme de groupes. Déterminer

$$\sum_{g \in G} f(g).$$

Illustrer sur des exemples.

Exercice 14. Déterminer les morphismes de $(\mathbf{Q}, +) \rightarrow (\mathbf{Z}, +)$.

Exercice 15. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $n, m \in \mathbf{N}^*$ pour qu'il existe un morphisme non-trivial $f : \mathbf{Z}/n\mathbf{Z} \rightarrow \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$.

Exercice 16. Rappeler la définition, et les deux types de matrices du groupe $O_2(\mathbf{R})$, ainsi que la façon dont elles se composent. En déduire que l'implication " g, h d'ordre fini $\Rightarrow gh$ d'ordre fini" est fautive. Quelle(s) hypothèse(s) peut-on rajouter pour la rendre vraie ?

Exercice 17. Montrer que le groupe additif $(\mathbf{Q}, +)$ n'est pas finiment engendré.

Exercice 18. Soit $p > 2$ premier. Déterminer les automorphismes de $(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}, +)$.

Exercice 19. Soient $n \geq 1$ et p premier. Donner l'ordre de $\text{GL}_n(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z})$.

Exercice 20. Soit $n \geq 1$. Justifier que $\text{SO}_n(\mathbf{Z}) = O_n(\mathbf{R}) \cap \text{SL}_n(\mathbf{Z})$ est un groupe et donner son ordre.

Exercice 21. Soient G un groupe et $H \subset G$ un sous-groupe d'indice 2. Montrer que H est distingué dans G . Illustrez ceci sur des exemples.

Exercice 22. Soit G un groupe et soit $H \subsetneq G$ un sous-groupe strict de G . Déterminer le sous-groupe engendré par $G \setminus H$, le complémentaire de H dans G .

Exercice 23. Soit G un sous-groupe fini de $\text{GL}_n(\mathbf{R})$.

- (1) Montrer que tout élément $M \in G$ est diagonalisable sur \mathbf{C} et que

$$\text{Tr}(M) = \text{Tr}(M^{-1}) \text{ et } |\text{Tr}(M)| \leq n.$$

Quels sont les éléments de G de trace $\pm n$?

- (2) Soit

$$U = \sum_{M \in G} {}^t M M.$$

Montrer que U est une matrice symétrique définie positive. On note \langle, \rangle le produit scalaire correspondant sur \mathbf{R}^n . Montrer que tous les éléments de G , vus comme des endomorphismes de \mathbf{R}^n , sont orthogonaux pour ce produit scalaire.

- (3) En déduire que tout sous-groupe fini de $\text{SL}_2(\mathbf{Z})$ est cyclique.

Exercice 24. Soient G un groupe, et g, h deux éléments de G . Montrer que gh et hg ont le même ordre, qu'il soit fini ou infini.

Exercice 25. Soit G un groupe dont tous les sous-groupes stricts sont finis. G est-il nécessairement fini ?

Un groupe fini dont tous les sous-groupes stricts sont cycliques est-il lui-même cyclique ?

Exercice 26. Dans $\text{GL}_2(\mathbf{R})$, soit $G = \langle A, B \rangle$, où A, B sont les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $H = G \cap U$, où

$$U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, t \in \mathbf{R} \right\}$$

Montrer que H n'est pas finiment engendré.

Ceci démontre donc qu'un sous-groupe d'un groupe finiment engendré n'est pas nécessairement finiment engendré. Les analogies avec l'algèbre linéaire sont donc à prendre avec prudence !

Exercice 27. On rappelle que le centre d'un groupe G est défini par

$$\mathcal{Z}(G) = \{g \in G : \forall h \in G, gh = hg\}.$$

Déterminer le centre de :

- (1) \mathfrak{S}_n , groupe des permutations de $\{1, \dots, n\}$.
- (2) $\text{GL}_n(K)$, $\text{SL}_n(K)$ où K est un corps
- (3) \mathcal{H}_3 , le groupe d'Heisenberg défini par

$$\mathcal{H}_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, x, y, z \in \mathbf{R} \right\}.$$