Exercice 1. Soit $\gamma : [0,1] \to Y$ un chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux. On a par définition

$$\int_{f\circ\gamma} \omega = \int_0^1 \omega_{f(\gamma(t))}((f\circ\gamma)'(t))\mathrm{d}t = \int_0^1 \omega_{f(\gamma(t))}(d_{\gamma(t)}f\gamma'(t))\mathrm{d}t = \int_0^1 [f^*\omega]_{\gamma(t)}(\gamma'(t))\mathrm{d}t = \int_\gamma f^*\omega.$$

Exercice 2. (1) Soit $\pi : \theta \in \mathbb{R} \mapsto e^{i\theta} = (\cos(\theta), \sin(\theta)) = (\pi_1(\theta), \pi_2(\theta)) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. On a

$$\pi^*\omega = \frac{\pi_1 \mathrm{d}\pi_2 - \pi_2 \mathrm{d}\pi_1}{\pi_1^2 + \pi_2^2} = \cos^2(\theta)\mathrm{d}\theta + \sin^2(\theta)\mathrm{d}\theta = \mathrm{d}\theta.$$

En utilisant l'exercice précédent, on a

$$\begin{aligned}\int_g \mathrm{d}\theta &= \int_g \pi^*\omega = \int_{\pi\circ g} \omega \\ &= \int_0^1 g'(\theta)\mathrm{d}\theta = g(1) - g(0).\end{aligned}$$

De même, si on remplace g par sa restriction à $[0,t]$, on obtient $g(t) - g(0)$.

(2) D'après ce qui précède, on a en notant $g_t = g|_{[0,t]}$

$$g(t) = \int_{g|_t} \mathrm{d}\theta = \int_{\pi\circ g_t} \omega = \int_{f_t} \omega,$$

où $f_t = f|_{[0,t]}$. En effet, par définition d'un relèvement, pour tout $s \in [0,1]$, on a $\pi(g(s)) = f(s)$.

(3) Par définition, $\pi(g(1)) = f(1) = f(0) = \pi(g(0))$, *i.e.* $e^{ig(1)} = e^{ig(0)}$ ce qui équivaut à $g(1) - g(0) \in 2\pi\mathbb{Z}$. Comme $g(0) = 0$, on a bien $n(f) \in \mathbb{Z}$.

(4) Soit $H : [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{S}^1$ une homotopie de f_0 à f_1 à extrémités fixées. On admet qu'on peut la choisir de classe $\mathcal{C}^1$. Notons $f_s = H(s,.)$ pour $s \in [0,1]$, qui est un lacet dans $\mathbb{S}^1$ vérifiant aussi $f_s(0) = x_0$. La formule

$$n(f_s) = \int_{f_s} \omega = \int_0^1 \omega_{f_s(t)}(f_s'(t))\mathrm{d}t$$

reste donc valable et montre que $n(f_s)$ dépend continûment de s, par les théorèmes de continuité des intégrales à paramètre. Ainsi, $s \mapsto n(f_s)$ est constante puisqu'à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

(5) Supposons $n(f_0) = n(f_1) = k \in \mathbb{Z}$. Ceci veut dire $\tilde{f}_0(1) = \tilde{f}_1(1) = 2k\pi$. Comme $\tilde{f}_0(0) = \tilde{f}_1(0) = 0$ par construction, on a une homotopie à extrémités fixées dans $\mathbb{R}$:

$$\tilde{H}(s,t) = (1-s)\tilde{f}_0(t) + s\tilde{f}_1(t).$$

Comme pour tout s, on a $\tilde{H}(s,1) = \tilde{H}(s,0) + 2k\pi$, l'application $H(s,t) = \pi(\tilde{H}(s,t)) = \exp(i\tilde{H}(s,t))$ est une homotopie à extrémités fixées entre f_0 et f_1.

(6) On vient de voir que si γ est un lacet de $\mathbb{S}^1$ basé en x_0, alors l'entier $n(\gamma)$ ne dépend que de la classe d'homotopie de γ, et n définit donc au quotient une application

$$\begin{array}{rccc}\Phi : & \pi_1(\mathbb{S}^1, x_0) & \longrightarrow & \mathbb{Z} \\ & [\gamma] & \mapsto & n(\gamma)\end{array}$$

La question précédente nous assure l'injectivité de Φ. La surjectivité est obtenue en considérant pour tout $k \in \mathbb{Z}$ le lacet $\gamma(t) = e^{2ik\pi t}$ qui fait k fois le tour du cercle. Il reste à voir que c'est un morphisme de groupes. Par construction, si γ est le lacet constant, alors $n(\gamma) = 0$, et Φ envoie donc sa classe d'homotopie sur 0. Soient f_1, f_2 deux lacets basés en x_0, de relevés $\tilde{f}_0, \tilde{f}_1$ respectivement. Soit $k = n(f_0)$. Alors l'application

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} f_0(2t) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1/2 \\ f_1(2t-1) + 2k\pi & \text{si } 1/2 \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

est le relevé de la concaténation $f_1 \star f_0$ qui vaut 0 en 0. Ainsi, on a par définition $n(f_1 \star f_0) = \frac{1}{2\pi}\tilde{f}(1) = n(f_1) + n(f_0)$. D'où $\Phi([f_1]\cdot[f_0]) = \Phi([f_1]) + \Phi([f_0])$.

Exercice 3. (1) Fixons $\omega \in \Omega^1(M)$ fermée et vérifions que l'application $\gamma \mapsto \int_\gamma \omega$ induit un morphisme de groupes $\pi_1(M) \to (\mathbb{R}, +)$. On ne considère que des lacets basés en $x \in M$.

Comme indiqué, $\int_\gamma \omega$ ne dépend que de la classe d'homotopie de γ, cette application descend bien au quotient en une application $\pi_1(M, x) \to \mathbb{R}$. Comme l'intégrale le long du lacet constant égal à x est nulle, le neutre s'envoie bien sur 0. Prenons γ_1, γ_2 deux lacets basés en x. On a par la relation de Chasles $\int_{\gamma_1 \star \gamma_2} \omega = \int_{\gamma_1} \omega + \int_{\gamma_2} \omega$, ce qui montre bien que notre application est un morphisme additif.

Nous avons donc pour toute $\omega \in \Omega^1(M)$ fermée un morphisme additif $h_{[\omega]} : \pi_1(M, x) \to \mathbb{R}$ qui ne dépend que de la classe de cohomologie de ω. On regarde maintenant l'application

$$\begin{array}{rccc} h: & H^1(M) & \longrightarrow & \mathrm{Hom}(\pi_1(M,x), \mathbb{R}) \\ & [\omega] & \mapsto & h_{[\omega]}. \end{array}$$

(2) On veut vérifier qu'elle est injective. Premièrement, elle est linéaire en $[\omega]$, il suffit donc de prouver $\forall [\omega]$, $h_{[\omega]} = 0 \Rightarrow [\omega] = 0$. Soit ω fermée. Demander $h_{[\omega]} = 0$ revient à demander $\forall \gamma$ lacet basé en x, $\int_\gamma \omega = 0$. Conclure $[\omega] = 0$ revient à conclure ω exacte, *i.e.* montrer existence de F telle que $\omega = \mathrm{d}F$.

Supposons donc que $\int_\gamma \omega = 0$ pour tout γ basé en x. Soit $y \in M$. Par connexité, il existe un chemin $\mathcal{C}^1$ par morceaux $c : [0,1] \to M$ tel que $c(0) = x$ et $c(1) = y$. Le point clé est que sous notre hypothèse, $\int_c \omega$ ne dépend pas du choix de c. En effet, si c_1, c_2 sont deux tels chemins, alors en notant $\overline{c_2}(t) = c_2(1-t)$ le chemin parcouru en sens inverse, on a $\int_{\overline{c_2}} \omega = -\int_{c_2} \omega$ et $\overline{c_2} \star c_1$ est un lacet basé en x. D'où $\int_{\overline{c_2} \star c_1} \omega = \int_{c_1} \omega - \int_{c_2} \omega = 0$. Nous pouvons donc *définir*

$$F(y) = \int_c \omega$$

pour tout chemin c de classe $\mathcal{C}^1$ par morceaux tel que $c(0) = x$ et $c(1) = y$. Vérifions que F est différentiable et que $\mathrm{d}F = \omega$. Soit $y \in M$ et soit $U \ni y$ un voisinage contractile et connexe par arc de y. Par le lemme de Poincaré, il existe $G : U \to \mathbb{R}$ lisse telle que $\omega|_U = \mathrm{d}G$. Soit $z \in U$ et soient c_0, c_1 des chemins de x à y et de y à z respectivement, avec $c_1([0,1]) \subset U$. Alors, $F(z) = \int_{c_1 \star c_0} \omega = \int_{c_1} \omega + F(y) = G(z) - G(y) + F(y)$. Ainsi F coïncide avec G au voisinage de y, modulo une constante. Ceci montre que F est différentiable au voisinage de y et que $d_y F = \omega_y$, ce pour tout $y \in M$.

(3) Supposons $\pi_1(M, x) = \{e\}$. Alors, il n'y a qu'un seul morphisme de $\pi_1(M, x)$ vers $\mathbb{R}$: le morphisme identiquement nul. Ainsi, $\mathrm{Hom}(\pi_1(M, x), \mathbb{R}) = 0$ est l'espace nul. Comme h est injective, on en déduit que $H^1(M) = 0$ est aussi l'espace nul.

Exercice 4.

Exercice 5.

Exercice 6.

Exercice 7.

Exercice 8.

Exercice 9.