Exercice 1. Soit $\omega \in \Omega^1(N)$ telle que $\phi^*\omega = 0$. Soient $y \in N$ et $v \in T_yN$. Comme ϕ est surjective, il existe $x \in M$ tel que $\phi(x) = y$. Comme ϕ est submersive, il existe $u \in T_xM$ tel que $\mathrm{d}xfu = v$. On a alors
$$[\phi^*\omega]_x(u) = \omega_{\phi(x)}(\mathrm{d}_x\phi u) = \omega_y(v) = 0.$$
Ceci pour tous y, v, donc $\omega = 0$, montrant l'injectivité de ϕ^*.

Exercice 2. On considère $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ définie par $\phi(\ell,\theta) = e^\ell(\cos(\theta), \sin(\theta))$. C'est l'exponentielle complexe.

(1) En écrivant $\phi = (\phi_1, \phi_2)$, on a $\mathrm{d}\phi_1 = e^\ell\cos(\theta)\mathrm{d}\ell - e^\ell\sin(\theta)\mathrm{d}\theta$ et $\mathrm{d}\phi_2 = e^\ell\sin(\theta)\mathrm{d}\ell + e^\ell\cos(\theta)\mathrm{d}\theta$. D'où :
$$\begin{aligned}\phi^*\omega &= \frac{-\phi_2\mathrm{d}\phi_1 + \phi_1\mathrm{d}\phi_2}{\phi_1^2 + \phi_2^2}\\ &= e^{-2\ell}(-e^{2\ell}\cos(\theta)\sin(\theta)\mathrm{d}\ell + e^{2\ell}\sin^2(\theta)\mathrm{d}\theta + e^{2\ell}\sin(\theta)\cos(\theta)\mathrm{d}\ell + e^{2\ell}\cos^2(\theta)\mathrm{d}\theta) = \mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

(2) D'après l'exercice précédent, il suffit de vérifier que ϕ est une submersion surjective. La surjectivité suit de celle de l'exponentielle complexe. On regarde la matrice jacobienne de ϕ :
$$\mathrm{J}_\phi(\ell,\theta) = e^\ell\begin{pmatrix}\cos(\theta) & -\sin(\theta)\\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\end{pmatrix}.$$
Son déterminant vaut $e^{2\ell} > 0$, elle est donc inversible montrant que ϕ est partout un difféomorphisme local, donc une submersion.

Exercice 3. On note $\psi = (\psi_1, \psi_2)$, avec $\mathrm{d}\psi_1 = y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$ et $\mathrm{d}\psi_2 = \mathrm{d}x + \mathrm{d}y + 2z\mathrm{d}z$. On a alors :
$$\begin{aligned}\psi^*(x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x) &= \psi_1\mathrm{d}\psi_2 - \psi_2\mathrm{d}\psi_1 = (xy - xy - y^2 - yz^2)\mathrm{d}x + (xy - x^2 - xy - xz^2)\mathrm{d}y + 2xyz\mathrm{d}z\\ &= -(y^2 + yz^2)\mathrm{d}x - (x^2 + xz^2)\mathrm{d}y + 2xyz\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

Exercice 4. Traitons le cas plus général dans $\mathbb{R}^n$. Pour tout $v \in \mathbb{R}^n$, on note $\tau_v : x \in \mathbb{R}^n \mapsto x + v$ la translation de vecteur v. Soit $\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^n)$ telle que $\forall v \in \mathbb{R}^n$, $(\tau_v)^*\omega = \omega$. Comme pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{d}_x\tau_v = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$, on a pour tous $x \in \mathbb{R}^n$ et $u \in \mathbb{R}^n = T_x\mathbb{R}^n$:
$$\omega_{\tau_v(x)}(u) = \omega_x(u),$$
pour tout $v \in \mathbb{R}^n$. Ainsi, pour tous $x, y \in \mathbb{R}^n$ et tout $u \in \mathbb{R}^n$, on a $\omega_y(u) = \omega_x(u)$, montrant que ω est constante, en tant qu'application lisse $\omega : \mathbb{R}^n \to (\mathbb{R}^n)^*$.

Exercice 5. (1) Comme à l'exercice 2, notons $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ l'exponentielle complexe. Soit ω une 1-forme invariante par rotation et homothétie. Soit $\alpha := \phi^*\omega \in \Omega^1(\mathbb{R}^2)$. Vérifions que α est invariante par les translations. Soient $(\ell_0, \theta_0) \in \mathbb{R}^2$, et soit $f(\ell,\theta) = (\ell + \ell_0, \theta)$ et $g(\ell,\theta) = (\ell, \theta + \theta_0)$, de sorte que $g \circ f = f \circ g$ est la translation de vecteur (ℓ_0, θ_0). On a $f^*\alpha = f^*(\phi^*\omega) = (\phi \circ f)^*\omega$ et $g^*\alpha = (\phi \circ g)^*\omega$. On observe alors que $\phi \circ f = h_{e^{\ell_0}} \circ \phi$ et $\phi \circ g = R_{\theta_0} \circ \phi$. Et donc :
$$f^*\alpha = \phi^*((h_{e^{\ell_0}})^*\omega) = \phi^*\omega = \alpha \text{ et } g^*\alpha = \phi^*((R_{\theta_0})^*\omega) = \alpha.$$
Ainsi, $(g \circ f)^*\alpha = f^*(g^*\alpha) = \alpha$. Ceci montre que α est invariante par toutes les translations de $\mathbb{R}^2$, donc est constante d'après l'exercice précédent. Ceci nous donne donc $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que $\phi^*\omega = \lambda\mathrm{d}\ell + \mu\mathrm{d}\theta$, l'expression de ω dans les coordonnées polaires. Or nous avons vu que la forme polaire $\omega_0 = \frac{-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ vérifie $\phi^*\omega_0 = \mathrm{d}\theta$, et si $\omega_1 := \mathrm{d}(\frac{1}{2}\log(x^2 + y^2)) = \frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$, alors $\phi^*\omega_1 = \mathrm{d}\ell$, d'où $\phi^*(\lambda\omega_1 + \mu\omega_0) = \lambda\mathrm{d}\ell + \mu\mathrm{d}\theta = \phi^*\omega$. Par injectivité de ϕ^*, nous pouvons conclure $\omega = \lambda\omega_1 + \mu\omega_0$. Ces formes sont donc précisément celles qui sont invariantes par les similitudes de $\mathbb{R}^2$.

(2) Si ω est maintenant définie sur $\mathbb{R}^2$ et invariante par similitudes, alors sa restriction à $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ est de la forme ci-dessus. La question est donc : pour quelles valeurs de λ, μ la forme
$$\omega := \frac{(\lambda x - \mu y)\mathrm{d}x + (\lambda y + \mu x)\mathrm{d}y}{x^2 + y^2}$$

s'étend-elle à $\mathbb{R}^2$ en une forme invariante par similitudes ? En prenant $X = \frac{\partial}{\partial x}$, on doit avoir $\omega(X) = \frac{\lambda x - \mu y}{x^2+y^2}$ en tout $(x, y) \neq (0, 0)$, et cette fonction doit s'étendre de façon lisse en $(0, 0)$. Il n'y a bien-sûr qu'une seule option : $\lambda = \mu = 0$. Et inversement, la forme nulle est bien-sûr invariante par tous les difféomorphismes de $\mathbb{R}^2$.

(3) On considère les matrices de la forme

$$g_{s,t} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & s \end{pmatrix}.$$

Alors, $g_{s,t}(e_1) = e_1$ pour tous $s, t \in \mathbb{R}$, où $e_1 = (1, 0)$. La forme linéaire $\alpha = \omega_{e_1}$ doit donc être $g_{s,t}$-invariante, c'est à dire $\alpha(g_{s,t}v) = \alpha(v)$ pour tout $v \in \mathbb{R}^2$. Si $\alpha(v) = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$, alors on obtient $\alpha_1(v_1 + tv_2) + \alpha_2 s v_2 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$ pour tous $v_1, v_2, s, t \in \mathbb{R}$. On voit rapidement que $\alpha = 0$ est la seule possibilité, d'où $\omega = 0$ puisque pour tout $x \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, il existe $g \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ telle que $x = g.e_1$, d'où $\omega_x = \omega_{e_1} = \alpha$.

(4) Ici, on ne peut pas utiliser la question 1 car les homothéties ne sont pas de déterminant 1. On rappelle que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R}) = \{g \in M_2(\mathbb{R}) \mid \det g = 1\}$. Comme toute matrice inversible, tout $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ agit linéairement sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$. Soit ω une 1-forme sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ qui est $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$-invariante. Notons de nouveau que pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, il existe $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ telle que $(x, y) = ge_1$, par exemple :

$$g = \begin{pmatrix} x & -y/(x^2+y^2) \\ y & x/(x^2+y^2) \end{pmatrix}.$$

Puisqu'une 1-forme sur un ouvert de $\mathbb{R}^2$ est une fonction sur cet ouvert à valeurs dans $(\mathbb{R}^2)^*$, l'hypothèse est que cette fonction vérifie ici :

$$\omega_{g.p} = \omega_p \circ g^{-1}$$

pour tous $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$. Pour déterminer ω, il suffit donc de la connaître en un point. Si on se donne $\alpha \in (\mathbb{R}^2)^*$, la question est de voir à quelle condition il existe ω qui est $\mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$-invariante telle que $\omega_{e_1} = \alpha$.

Notons que $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est telle que $ge_1 = e_1$ ssi elle est de la forme :

$$g = u_t = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \text{ avec } t \in \mathbb{R}.$$

Une condition nécessaire est donc que $\alpha \circ u_t = \alpha$ pour tout t. Ce qui se traduit par $\alpha(v_1 + tv_2, v_2) = \alpha(v_1, v_2)$ pour tous v_1, v_2. Ceci signifie $\alpha \in \mathbb{R}e_2^*$.

Vérifions que ceci est suffisant. Soit $\alpha \in \mathbb{R}.e_2^*$. On veut *définir* pour $p \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$

$$\omega_p = \alpha \circ g^{-1},$$

où $g \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ est tel que $p = ge_1$. Pour que ceci soit bien défini, il faut que $\alpha \circ g^{-1}$ ne dépende pas du choix de g. Or, si $g_1, g_2 \in \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ sont tels que $g_1 e_1 = g_2 e_1 = p$, alors $g_2^{-1} g_1 e_1 = e_1$, d'où $g_1 = g_2 u_t$, pour un certain $t \in \mathbb{R}$. Et comme α est invariante par u_t, on a bien $\alpha \circ g_1^{-1} = \alpha \circ g_2^{-1}$.

La dernière question est la régularité d'une telle fonction ω. Pour cela on peut l'écrire explicitement grâce à la matrice g exhibée ci dessus qui envoie $(1, 0)$ sur (x, y). Son inverse est (avec la transposée de la comatrice)

$$g^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} & \frac{y}{x^2+y^2} \\ -y & x \end{pmatrix}$$

(elle est de déterminant 1). D'où $\omega_{(x,y)} = \lambda \mathrm{d}y \circ g^{-1} = \lambda(-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y)$. Ceci est bien sûr une expression lisse, et il n'est pas déplaisant de vérifier par le calcul direct que pour toute matrice

$$g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

telle que $ad - bc = 1$, on a bien $g^*\omega = \omega$.

Exercice 6. (1) Supposons que $\omega = \mathrm{d}f$. Soient $x \in M$ et $u \in T_xM$. Soit $c(s)$ une courbe définie sur un petit intervalle $]-\varepsilon, \varepsilon[$ telle que $c(0) = x$ et $c'(0) = u$. Par définition, nous avons

$$(\mathcal{L}_X\omega)_x(u) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \omega_{\phi_X^t(x)}(\mathrm{d}_x\phi_X^t(u)) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \mathrm{d}_{\phi_X^t(x)} f(\mathrm{d}_x\phi_X^t(u))$$

Pour t fixé assez petit, on a $\mathrm{d}_x\phi_X^t(u) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\big|_{s=0}\phi_X^t(c(s))$. Notons $\alpha(s,t) := \phi_X^t(c(s))$, bien définie pour des s,t assez petits. À t fixé, on a donc $\alpha(0,t) = \phi_X^t(x)$ et $\frac{\partial}{\partial s}\big|_{s=0}\alpha(s,t) = \mathrm{d}_x\phi_X^t(u)$. On en déduit

$$\mathrm{d}_{\phi_X^t(x)}f(\mathrm{d}_x\phi_X^t(u)) = \left.\frac{\partial}{\partial s}\right|_{s=0} f(\alpha(s,t)).$$

Par le théorème de Schwarz, on a donc

$$(\mathcal{L}_X\omega)_x(u) = \left.\frac{\partial^2}{\partial s\partial t}\right|_{s,t=0} f(\alpha(s,t)).$$

Or à s fixé, on a $\frac{\partial}{\partial t}\big|_{t=0} f(\phi_X^t(c(s))) = (\partial_X f)(c(s))$ puisque $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\big|_{t=0}\phi_X^t(y) = X(y)$ pour tout y. Et en dérivant par rapport à s en 0, nous obtenons comme attendu

$$(\mathcal{L}_X\omega)_x(u) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\right|_{s=0}(\partial_X f)(c(s)) = d_x(\partial_X f)(u) = d_x(\omega(X))(u).$$

Passons au cas $\eta = g\mathrm{d}f = g\omega$, où $\omega = \mathrm{d}f$. Il s'agit de simplement réécrire la définition :

$$(\mathcal{L}_X\eta)_x(u) = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} g(\phi_X^t(x)).[(\phi_X^t)^*\omega]_x(u) = (\partial_X g)(x)\omega_x(u) + g(x)\mathrm{d}_x(\omega(X))(u).$$

Ce qui montre bien

$$\mathcal{L}_X(g\mathrm{d}f) = (\partial_X g)\mathrm{d}f + f\mathcal{L}_X(\mathrm{d}f).$$

(2) Pour obtenir l'expression en coordonnées, on note que $(X,\omega) \mapsto \mathcal{L}_X\omega$ est bilinéaire dès que ω est de la forme $g\mathrm{d}f$: en ω c'est clair, en X on utilise $\mathcal{L}_{X_1+X_2}\omega = (\partial_{X_1+X_2}g)\mathrm{d}f + \mathrm{d}(\mathrm{d}f(X_1 + X_2)) = \mathcal{L}_{X_1}\omega + \mathcal{L}_{X_2}\omega$. Ainsi, si on a $X = \sum_i X_i\frac{\partial}{\partial x_i}$ et $\omega = \sum_j \omega_j\mathrm{d}x_j$, il suffit d'abord de calculer $\mathcal{L}_Y(\omega_j\mathrm{d}x_j)$, où $Y = X_i\frac{\partial}{\partial x_j}$, et d'étendre la formule par bilinéarité.

On a $\mathcal{L}_Y(\omega_j\mathrm{d}x_j) = (\partial_Y\omega_j)\mathrm{d}x_j + \omega_j\mathrm{d}(\mathrm{d}x_j(Y)) = \mathrm{d}\omega_j(X_i\frac{\partial}{\partial x_i})\mathrm{d}x_j + \omega_j\mathrm{d}(\delta_{ij}X_i)$. En sommant sur i,j nous en tirons

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X\omega &= \sum_{i,j} X_i\frac{\partial\omega_j}{\partial x_i}\mathrm{d}x_j + \sum_i \omega_i\mathrm{d}X_i \\
&= \sum_{i,j} X_i\frac{\partial\omega_j}{\partial x_i}\mathrm{d}x_j + \sum_i \omega_i\sum_j\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\mathrm{d}x_j \\
&= \sum_{i,j}\left(X_i\frac{\partial\omega_j}{\partial x_i} + \omega_i\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right)\mathrm{d}x_j.
\end{aligned}$$

(3) Commençons par le cas $\omega = g\mathrm{d}f$. Nous avons d'une part

$$(\mathcal{L}_X\omega)(Y) = (\partial_X g)\mathrm{d}f(Y) + g[\mathrm{d}(\partial_X f)](Y) = (\partial_X g)(\partial_Y f) + g\partial_Y(\partial_X f).$$

D'autre part,

$$\partial_X(\omega(Y)) = \partial_X(g\partial_Y f) = (\partial_X g)(\partial_Y f) + g\partial_X(\partial_Y f)$$

et

$$\omega([X,Y]) = g\partial_{[X,Y]}f = g(\partial_X(\partial_Y f) - \partial_Y(\partial_X f)).$$

D'où

$$\partial_X(\omega(Y)) - \omega([X,Y]) = (\partial_X g)(\partial_Y f) + g\partial_Y(\partial_X f)) = (\mathcal{L}_X\omega)(Y).$$

Passons au cas général. Il suffit d'établir cette relation localement, où on sait que ω se met sous la forme $\omega = \sum_i g_i\mathrm{d}f_i$. Nous avons alors par linéarité en ω

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_X\omega)(Y) &= \sum_i\left[\mathcal{L}_X(g_i\mathrm{d}f_i)\right](Y) \\
&= \sum_i \partial_X\left[(g_i\mathrm{d}f_i)(Y)\right] - (g_i\mathrm{d}f_i)([X,Y]), \text{ d'après ce qu'on vient de voir} \\
&= \partial_X\omega(Y) - \omega([X,Y]).
\end{aligned}$$

(4) On peut calculer en utilisant la question 1, ou en utilisant la formule de Lie-Cartan. Prenons cette deuxième option.

La forme $\mathcal{L}_Y(y\mathrm{d}x)$ s'écrit $\omega_x\mathrm{d}x + \omega_y\mathrm{d}y$, où $\omega_x = \mathcal{L}_Y(y\mathrm{d}x)(\frac{\partial}{\partial x})$ et $\omega_y = \mathcal{L}_Y(y\mathrm{d}x)(\frac{\partial}{\partial y})$. On a besoin de calculer les crochets de Lie suivants :

$$\left[Y, \frac{\partial}{\partial x}\right] = -\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial}{\partial y}$$
$$\left[Y, \frac{\partial}{\partial y}\right] = -\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\frac{\partial}{\partial y}.$$

Nous avons alors

$$\omega_x = \partial_Y(y) - y\mathrm{d}x\left([Y, \frac{\partial}{\partial x}]\right) = -\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}$$
$$\omega_y = 0 - y\mathrm{d}x\left([Y, \frac{\partial}{\partial y}]\right) = y\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}.$$

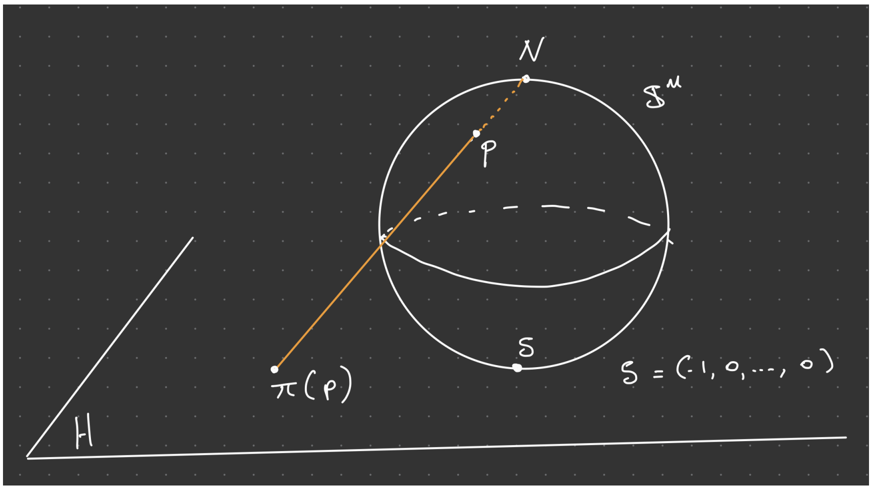
D'où

$$\mathcal{L}_Y(y\mathrm{d}x) = \left(-\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\right)\mathrm{d}x + y\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\mathrm{d}y.$$

Les mêmes calculs donnent similairement

$$\mathcal{L}_Y(x\mathrm{d}y) = -x\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\mathrm{d}x + \left(\frac{\partial F}{\partial y} - x\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\right)\mathrm{d}y.$$

Exercice 7.



On note $H = \{x_0 = -1\}$ l'hyperplan affine tangent à $\mathbb{S}^n$ au "pôle sud" $S = (-1, 0, \ldots, 0)$.

(1) Soit $p \in \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$, $p = (x_0, \ldots, x_n)$. Demander $p \neq N$ revient à demander $x_0 \neq 1$. C'est clairement suffisant, et si on a $p \in \mathbb{S}^n$ tel que $x_0 = 1$, alors $x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0$ d'où $p = (1, 0, \ldots, 0) = N$. On paramètre la droite affine (pN) par $\gamma(t) = (1, 0, \ldots, 0) + t(x_0 - 1, x_1, \ldots, x_n) = (1 - t + tx_0, tx_1, \ldots, tx_n)$. Ainsi, $\gamma(t) \in H$ ssi $1 - t + tx_0 = -1$ ssi $t = t_0 := \frac{2}{1-x_0}$ (on a $x_0 \neq 1$). Ainsi,

$$\pi(p) = \gamma(t_0) = \left(-1, \frac{2x_1}{1-x_0}, \ldots, \frac{2x_n}{1-x_0}\right).$$

Ceci est bien-sûr une expression lisse des coordonnées, bien définie sur le complémentaire de l'hyperplan $\{x_0 = 1\}$, qui est un voisinage ouvert de $\mathbb{S}^n \setminus \{N\}$, montrant que $\pi : \mathbb{S}^n \setminus \{N\} \to H$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$.

(2) Soit $q = (-1, y_1, \ldots, y_n) \in H$. La droite (qN) est paramétrée par $\gamma(t) = (1, 0, \ldots, 0) + t(-2, y_1, \ldots, y_n) = (1 - 2t, ty_1, \ldots, ty_n)$. Ainsi, $\gamma(t) \in \mathbb{S}^n$ ssi $(1-2t)^2 + t^2\|y\|^2 = 1$, en notant $\|y\|^2 = y_1^2 + \cdots + y_n^2$. D'où

$$\begin{aligned} \gamma(t) \in \mathbb{S}^n &\iff 4t^2 - 4t + 1 + t^2\|y\|^2 = 1 \\ &\iff t(t(4 + \|y\|^2) - 4) = 0 \\ &\iff t = 0 \text{ ou } t = t_0 := \frac{4}{4 + \|y\|^2}. \end{aligned}$$

Ce qui montre que la droite coupe la sphère en deux points : celui à $t = 0$ est N, celui à $t = t_0$ est l'unique antécédent de q par π. Ainsi, π est bijective, de bijection réciproque

$$\begin{aligned}\pi^{-1}(-1, y_1, \dots, y_n) &= \left(1 - \frac{8}{4 + \|y\|^2}, \frac{4y_1}{4 + \|y\|^2}, \dots, \frac{4y_n}{4 + \|y\|^2}\right) \\ &= \left(\frac{y_1^2 + \dots + y_n^2 - 4}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 4}, \frac{4y_1}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 4}, \dots, \frac{4y_n}{y_1^2 + \dots + y_n^2 + 4}\right).\end{aligned}$$

Cette formule est à nouveau analytique en $y_1, \dots, y_n$ montrant que $\pi^{-1} : H \to \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$ est lisse.

(3) Ainsi, π est lisse, bijective, et de bijection réciproque lisse. C'est un $\mathcal{C}^\infty$-difféomorphisme sur son image.

(4) Soit $p_0 \in U = \mathbb{S}^n \setminus \{N\}$. Comme $\pi(U) = H \simeq \mathbb{R}^n$ est contractile, on a une homotopie (continue) $f : [0, 1] \times H \to H$ telle que $f(0, q) = q$ et $f(1, q) = \pi(p_0)$, *i.e.* une homotopie entre l'identité de H et la fonction constante égale à $\pi(p_0) \in H$.

On rapatrie alors cette homotopie grâce à π : soit $g : [0, 1] \times U \to U$ définie par

$$\forall t \in [0, 1],\ \forall p \in U,\ g(t, p) = \pi^{-1}(f(t, \pi(p))).$$

Comme π et π^{-1} sont continues (car lisses), g est bien continue par composition et on a

$$\begin{aligned}\forall p \in U,\ g(0, p) &= \pi^{-1}(f(0, \pi(p))) = \pi^{-1}(\pi(p)) = p \\ g(1, p) &= \pi^{-1}(f(1, \pi(p))) = \pi^{-1}(\pi(p_0)) = p_0.\end{aligned}$$

Ainsi, g est une homotopie entre la fonction identité de U et la fonction constante égale à p_0.

Exercice 8. Soient $f, g : Y \to X$ constantes respectivement égales à $x_0, x_1 \in X$. Puisque X est connexe par arc, il existe un chemin continu $c : [0, 1] \to X$ tel que $c(0) = x_0$ et $c(1) = x_1$. Définissons alors l'homotopie

$$\begin{array}{cccc} H : & [0,1] \times Y & \longrightarrow & X \\ & (t, y) & \mapsto & H(t, y) = c(t). \end{array}$$

Cette application est continue, et c'est bien une homotopie de f à g.

Exercice 9. Vérifions qu'"être homotope à" est une relation d'équivalence. Soient $f, g, h : M \to N$ des applications continues.

(1) **Réflexive.** f est bien homotope à f, il suffit de prendre $H(t, x) = f(x)$ pour tous $t \in [0, 1]$ et $x \in M$.

(2) **Symétrique.** S'il existe une homotopie $H : [0, 1] \times M \to N$ entre f et g, alors $\tilde{H}(t, x) := H(1 - t, x)$ est une homotopie de g à f.

(3) **Transitive.** Soit $H_1, H_2 : [0, 1] \times M \to N$ des homotopies de f à g, et de g à h respectivement. L'application $H : [0, 1] \times M \to N$ définie par

$$H(t, x) = \begin{cases} H_1(2t, x) & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ H_2(2t - 1, x) & \text{si } \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

est alors une homotopie de f à h. Le point éventuellement non clair est la continuité de H à l'interface $\{\frac{1}{2}\} \times M$. Si $x \in M$, et $U \subset N$ est un voisinage de $H(1/2, x) = H_1(1, x) = H_2(0, x) = g(x)$, alors par continuité de H_1 et H_2, il existe des voisinages V_1, V_2 de x dans M, et $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ tels que $H_1(]1 - \varepsilon_1, 1] \times V_1) \subset U$ et $H_2([0, \varepsilon_2[\times V_2) \subset U$. Ainsi, en prenant $V = V_1 \cap V_2$ et $\varepsilon = \min(\varepsilon_1/2, \varepsilon_2/2)$, nous avons $H(]1/2 - \varepsilon, 1/2 + \varepsilon[\times V) \subset U$, montrant la continuité de H en $(1/2, x)$.

On procède exactement de la même façon pour le cas des homotopies à extrémités fixées, ou relativement à une partie $A \subset M$ plus généralement.

Exercice 10. (1) C'est exactement l'argument utilisé à la fin de l'exercice 7. Si $F : U \to V$ est un homéomorphisme, et si $H : [0, 1] \times U \to U$ est une homotopie entre id_U et l'application constante égale à x, alors $\tilde{H}(t, y) = F(H(t, F^{-1}(y)))$ est une homotopie entre id_V et la fonction constante égale à $F(x)$.

(2) C'est presque la définition. Si (U, ϕ) est une carte en x, avec $\phi(x) = 0$, comme $\phi(U) \subset \mathbb{R}^n$ est ouvert, contient 0, donc il existe $r > 0$ tel que $B(0, r) \subset \phi(U)$. Il suffit de considérer $\phi^{-1}(B(0, r))$: c'est bien un voisinage de x difféomorphe à une boule.

Exercice 11.

Exercice 12. On veut montrer qu'un chemin γ est homotope à extrémités fixées à un chemin η qui est $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux.

(1) Si $M = U$ est un ouvert convexe de $\mathbb{R}^n$, il suffit de prendre $\eta(t) = (1-t)\gamma(0) + t\gamma(1)$ et $H(s,t) = (1-s)\gamma(t) + s\eta(t)$.

(2) On a vu que tout point de M est contenu dans un ouvert difféomorphe à une boule. Si $U_t \ni \gamma(t)$ est un tel ouvert, par continuité de γ il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\gamma([t-\varepsilon, t+\varepsilon]) \subset U_t$.

(3) Notons $\gamma^* = \gamma([0,1])$. C'est un compact de M et comme $\gamma^* \subset \cup_{t\in[0,1]} U_t$ est un recouvrement ouvert, on peut en extraire un sous-recouvrement fini $U_{t_1} \cup \cdots \cup U_{t_n} \supset \gamma^*$. Notons $U_i = U_{t_i}$. Alors, il existe $\varepsilon > 0$ tel que pour tous $s,t \in [0,1]$, $|s-t| < \varepsilon \Rightarrow \exists i \ : \ \gamma([s,t]) \subset U_i$. On le montre par l'absurde. Si ce n'est pas le cas, alors pour tout $n \geqslant 1$, il existe $s_n, t_n \in [0,1]$ tels que $0 < t_n - s_n < \frac{1}{n}$ et $\forall i$, $\gamma([s_n,t_n]) \not\subseteq U_i$. Par compacité, et comme $(t_n - s_n) \to 0$, quitte à extraire, on peut supposer qu'il existe $t \in [0,1]$ tel que $(s_n) \to t$ et $(t_n) \to t$. Soit i tel que $\gamma(t) \in U_i$. Par continuité de γ, il existe $\eta > 0$ tel que $\forall s$, $|s-t| < \eta \Rightarrow \gamma(s) \in U_i$. Pour n assez grand, $|t_n - t| < \eta/2$ et $t_n - s_n < \eta/2$, d'où $[s_n,t_n] \subset]t-\eta, t+\eta[$ et donc $\gamma([s_n,t_n]) \subset U_i$, une contradiction.

Il nous suffit maintenant de prendre $n > 0$ tel que $\frac{1}{n} < \varepsilon$ et $t_k = \frac{k}{n}$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$. Par construction, pour tout $k \leqslant n-1$, il existe i tel que $\gamma([t_k, t_{k+1}]) \subset U_i$. Quitte à réindexer les ouverts U_i et en retirer, nous avons le résultat.

(4) Notons $\gamma_i = \gamma|_{[t_i,t_{i+1}]}$ et $\phi_i : U_i \to \mathbb{R}^n$ un difféomorphisme sur une boule de $\mathbb{R}^n$. Nous pouvons construire l'homotopie suivante dans U_i (faire un dessin) :

$$H_i(s,t) = \phi_i^{-1}\left((1-s)\phi_i(\gamma(t)) + s((1-t)\phi_i(\gamma(t_i)) + t\phi_i(\gamma(t_{i+1})))\right).$$

C'est exactement l'homotopie de la question 1 dans l'ouvert convexe $\phi_i(U_i)$, que l'on rapatrie dans U_i via ϕ_i. C'est une homotopie entre γ_i et $\phi_i^{-1}(\eta_i)$ où η_i est la paramétrisation affine du segment $[\phi_i(\gamma(t_i)), \phi_i(\gamma(t_{i+1}))]$. Un segment dans $\mathbb{R}^n$ est toujours un fermé d'intérieur vide, il en va de même pour son image par un difféomorphisme.

(5) Soit $\eta : [0,1] \to M$ le chemin défini par $\eta(t) = \phi_i^{-1}(\eta_i(t))$ où i est tel que $t \in [t_i, t_{i+1}]$. Il est bien $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux, et homotope à γ via $H(s,t) = H_i(s,t)$ pour le même i. Comme à l'exercice 9, on vérifie sans difficulté que H est bien continue aux recollements $[0,1] \times \{t_i\}$.

Exercice 13. Soit $\gamma : [0,1] \to \mathbb{S}^n$ un lacet continu. D'après l'exercice précédent, γ est homotope à extrémités fixées à un lacet $\mathcal{C}^\infty$ par morceaux. Supposons donc que ce soit déjà le cas pour γ. Rajoutons que la preuve a montré qu'en dehors des points de recollement, on peut demander $\gamma'(t) \neq 0$ et γ est alors une immersion au voisinage des points où elle est dérivable.

Comme $\gamma([0,1])$ est d'intérieur vide, $\gamma([0,1]) \subsetneq \mathbb{S}^n$ montrant que γ n'est pas surjective (il existe des lacets continus et surjectifs sur la sphère !).

Soit alors $p \in \mathbb{S}^n$ tel que $p \notin \gamma([0,1])$, et soit $U = \mathbb{S}^n \setminus \{p\}$. Soit $\pi : \mathbb{S}^n \setminus \{p\} \to \mathbb{R}^n$ la projection stéréographique. C'est un homéomorphisme. Soit $\tilde{\gamma} = \pi \circ \gamma$ le lacet obtenu après projection stéréographique (on note que c'est parce $p \notin \gamma([0,1])$ que $\tilde{\gamma}$ est bien défini). Comme $\mathbb{R}^n$ est contractile, $\tilde{\gamma}$ est homotope à extrémités fixées au lacet constant. Soit $\tilde{H} : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^n$ cette homotopie, par exemple $\tilde{H}(s,t) = s\tilde{\gamma}(0) + (1-s)\tilde{\gamma}(t)$. On note alors que $\tilde{H}(s,0) = \tilde{H}(s,1) = \tilde{\gamma}(0) = \tilde{\gamma}(1)$, montrant que $\tilde{H}$ est une homotopie à extrémités fixées (ici $\tilde{\gamma}(0)$). On peut alors définir une homotopie de γ au lacet constant égal à $\gamma(0)$ en posant :

$$H(s,t) = \pi^{-1}\tilde{H}(s,t).$$

Alors $\forall t \in [0,1]$, $H(0,t) = \pi^{-1}(\tilde{\gamma}(t)) = \gamma(t)$ par construction de $\tilde{\gamma}$, et $H(1,t) = \pi^{-1}(\tilde{\gamma}(0)) = \gamma(0)$. De plus, H est continue par composition (puisque π est un homéomorphisme, π^{-1} est continue). Ainsi, H réalise une homotopie à extrémités fixées entre γ et le lacet constant égal à $\gamma(0)$. Le fait que H soit à extrémités fixées ($\gamma(0) = \gamma(1)$) suit facilement du fait que $\tilde{H}$ le soit.

Ceci montre que pour tout lacet continue γ sur $\mathbb{S}^n$, il existe une homotopie fixant $\gamma(0)$ et transformant γ en le lacet constant égal $\gamma(0) = x$. Par définition du groupe fondamental pointé, il suit que $\pi_1(\mathbb{S}^n, x) = \{0\}$ est réduit à la classe d'homotopie du lacet constant égal à x.