Exercice 1. On a

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}x &= \cos\phi\cos\theta\mathrm{d}r - r\sin\phi\cos\theta\mathrm{d}\phi - r\cos\phi\sin\theta\mathrm{d}\theta\\
\mathrm{d}y &= \cos\phi\sin\theta\mathrm{d}r - r\sin\phi\sin\theta\mathrm{d}\phi + r\cos\phi\cos\theta\mathrm{d}\theta\\
\mathrm{d}z &= \sin\phi\mathrm{d}r + r\cos\phi\mathrm{d}\phi.
\end{aligned}$$

Pour exprimer (par exemple) $\frac{\partial}{\partial r}$ dans $(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z})$, on retrouve ses composantes en évaluant $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$, $\mathrm{d}z$ sur lui, *i.e.* en calculant $\frac{\partial x}{\partial r}$ etc.. Mais on aura des composantes dans le système (r, ϕ, θ), qu'il faut alors exprimer en fonction de (x, y, z). Or, le changement de coordonnées sphérique (comme le changement polaire dans le plan) ne se fait que sur un ouvert maximal dense, qu'on peut prendre ici pour $\{(x, y, z) \ : \ y \neq 0 \text{ ou } x > 0\}$. Le changement s'inverse alors en

$$\begin{aligned}
r &= \sqrt{x^2+y^2+z^2}\\
\phi &= \arctan\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\\
\theta &= 2\arctan\left(\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}}\right).
\end{aligned}$$

Sur cet ouvert, on a alors

$$\begin{aligned}
\partial_r &= \cos(\phi)\cos(\theta)\partial_x + \cos(\phi)\sin(\theta)\partial_y + \sin(\phi)\partial_z\\
&= \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\partial_x + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\partial_y + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\partial_z\\
\partial_\phi &= -r\sin(\phi)\cos(\theta)\partial_x - r\sin(\phi)\sin(\theta)\partial_y + \cos(\phi)\partial_z\\
&= -\frac{xz}{\sqrt{x^2+y^2}}\partial_x - \frac{yz}{\sqrt{x^2+y^2}}\partial_y - \sqrt{x^2+y^2}\partial_z\\
\partial_\theta &= -r\cos(\phi)\sin(\theta)\partial_x + r\cos(\phi)\cos(\theta)\partial_y\\
&= -y\partial_x + x\partial_y.
\end{aligned}$$

Pour retrouver ces valeurs, notez qu'on a seulement besoin de r, $\cos(\phi)$, $\sin(\phi)$, $\cos(\theta)$ et $\sin(\theta)$ dont les expressions sont plus simples : par exemple $\cos(\theta) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$. Notez également que les champs ainsi définis sur notre ouvert s'étendent à un ouvert plus grand, à savoir $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ (x, y) \neq (0, 0)\}$, le complémentaire de l'axe Oz.

Exercice 2. En première lecture, on voit qu'à part le (3), toutes ces formes sont définies sur tout $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$, qui sont contractiles. Il y a donc équivalence entre être fermée et être exacte, sauf éventuellement pour la (3). Pour chacune, on vérifie si elle est fermée en regardant si $\frac{\partial\omega_x}{\partial_y} = \frac{\partial\omega_y}{\partial x}$, où $\omega = \omega_x\mathrm{d}x + \omega_y\mathrm{d}y$. Idem en 3 variables.

(1) Pas fermée, donc pas exacte.
(2) Pas fermée, donc pas exacte.
(3) Ici on voit qu'une primitive en x de $x/(x^2+y^2)$ est $\frac{1}{2}\log(x^2+y^2)$, et que sa dérivée selon y est également la composante en $\mathrm{d}y$. La forme est donc exacte, de primitive $f(x, y) = \log(\sqrt{x^2+y^2}) + cte$.
(4) Pas fermée, donc pas exacte.
(5) Ici la forme est fermée, donc exacte ($M = \mathbb{R}^2$). Une primitive f doit vérifier $\frac{\partial f}{\partial x} = e^x(y + x)$, cherchons donc f de la forme $f(x, y) = ye^x + xe^x - e^x + \phi(y)$, avec ϕ dérivable. En dérivant par rapport à y, on obtient $e^x + \phi'(y) = e^x + 3e^y$. Il nous suffit donc de prendre $\phi(y) = 3e^y$, *i.e.* $f(x, y) = e^x(x + y - 1) + 3e^y$ est une primitive de ω sur $\mathbb{R}^2$.
(6) On constate ici que $\omega_x(x, y) = \omega_y(y, x)$, il en résulte que ω est fermée. Le calcul de primitive est un peu plus compliqué. Un passage en coordonnées polaires peut aider. On obtient finalement $\omega = \mathrm{d}f$, où $f(x, y) = \frac{xy}{1+x^2+y^2}$. (pour plus de détails, m'écrire)

(7) Ici, la forme est à nouveau exacte. Les calculs sont similaires à précédemment, on trouve facilement $f(x,y) = x^2y$.
(8) Pas fermée.
(9) Pas fermée.
(10) Elle est fermée, donc exacte par contractilité. On réduit le nombre de variables comme suit. Soit $f(x,y,z) = xyz^2$. Alors $\mathrm{d}f$ a la bonne composante sur $\mathrm{d}x$. On a de plus

$$\omega - \mathrm{d}f = z\mathrm{d}y + (2z+y)\mathrm{d}z = \mathrm{d}g,$$

où $g(x,y,z) = yz + z^2$. Finalement, $\omega = \mathrm{d}\phi$, où $\phi(x,y,z) = xyz^2 + yz + z^2$.

Exercice 3. Ici, $\frac{\partial \omega_x}{\partial_y} = 2y \neq \frac{\partial \omega_y}{\partial x} = 0$, donc ω n'est pas fermée, donc pas exacte. Par le lemme de Poincaré, une forme sur $\mathbb{R}^2$ est exacte ssi elle est fermée. On cherche donc Ψ telle que $\Psi(x)\omega$ soit fermée. Ce qui est équivalent à :

$$\forall x, y \in \mathbb{R},\ 2y\Psi(x) = 2y\Psi'(x).$$

La fonction exponentielle convient donc, et on peut chercher f: elle doit vérifier

$$\begin{cases} \partial_x f(x,y) = e^x(x^2+y^2+2x) \\ \partial_y f(x,y) = 2ye^x \end{cases}$$

Cherchons f de la forme $f(x,y) = y^2e^x + \phi(x)$, avec ϕ dérivable. On doit avoir $y^2e^x + \phi'(x) = e^x(x^2 + y^2 + 2x)$, d'où $\phi'(x) = e^x(x^2+2x)$. On voit que $\phi(x) = x^2e^x$ convient et donc que $f(x,y) = (x^2+y^2)e^x$ est une primitive de $\psi(x)\omega$ sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4. (1) Il suffit de faire le calcul habituel.
(2) Méthode 1 : on note que U est contractile, car étoilé (par rapport à $(0,1)$ par exemple). Le lemme de Poincaré assure que ω est exacte.
Méthode 2 : on exhibe une primitive. On voit directement que $f(x,y) = \frac{x^2}{y}$ convient.
(3) On note que puisque ω est exacte, la valeur de $\int_C \omega$ ne dépend pas de C. Précisément, elle vaut $f(3,8) - f(1,2) = \frac{9}{8} - \frac{1}{2} = \frac{5}{8}$. On peut vérifier ceci en faisant le calcul avec pour C le segment paramétré par $\gamma(t) = (1+2t, 2+6t)$, $t \in [0,1]$, d'où $\gamma'(t) = (2,6)$.

Exercice 5. (1) C'est le calcul habituel.
(2) On paramètre C par $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$, avec $t \in [0, 2\pi]$. Nous avons alors par définition :

$$\int_C \omega = \int_0^{2\pi} \left(\sin^2(t) + \cos^2(t)\right) \mathrm{d}t = 2\pi.$$

Exercice 6. On note que la forme $y^2\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y$ n'est pas fermée, donc pas exacte, sans quoi le calcul aurait systématiquement donné 0. Dans les deux cas, γ est une courbe, qui admet deux orientations, c'est à dire deux sens de parcours. À orientation fixée, l'intégrale de ω le long de γ ne dépend pas de la paramétrisation. Ici, on en choisit une arbitrairement. L'autre transforme $\int_\gamma \omega$ en son opposé. La question de l'exercice est donc de connaître la valeur absolue de l'intégrale.

(1) Dans ce cas, γ a pour équation $x^2 + y^2 - ay + \frac{a^2}{4} = \frac{a^2}{4}$. C'est donc le cercle de centre $(0, \frac{a}{2})$ et de rayon $\frac{a}{2}$. On le paramètre avec $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, où

$$\begin{cases} x(t) &= \frac{a}{2}\cos(t) \\ y(t) &= \frac{a}{2}(\sin(t)+1). \end{cases}$$

On a alors

$$\begin{aligned} \int_\gamma \omega &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{a^2}{4}(\sin(t)+1)^2 \left(-\frac{a}{2}\sin(t)\right) + \frac{a^2}{4}\cos^2(t)\left(\frac{a}{2}\cos(t)\right)\right) \mathrm{d}t \\ &= \frac{a^3}{8}\left(\int_0^{2\pi} \cos^3(t)\mathrm{d}t + \int_0^{2\pi} \sin(t)(1+\sin t)^2 \mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{a^3}{4}\int_0^{2\pi} \sin^2(t)\mathrm{d}t = \frac{\pi a^3}{4}. \end{aligned}$$

(2) Dans ce cas, γ a pour équation $(\frac{x-a}{a})^2 + (\frac{y-b}{b})^2 = 2$. Ici on a une ellipse qu'on paramètre en $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ où

$$\begin{cases} \frac{x(t)}{a} - 1 = \sqrt{2}\cos(t) \\ \frac{y(t)}{b} - 1 = \sqrt{2}\sin(t) \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} x(t) = a(\sqrt{2}\cos(t) + 1) \\ y(t) = b(\sqrt{2}\sin(t) + 1). \end{cases}$$

On obtient alors pour cette paramétrisation :

$$\begin{aligned} \int_\gamma \omega &= \int_0^{2\pi} \left[b^2(\sqrt{2}\sin(t)+1)^2(-a\sqrt{2})\sin(t) + a^2(\sqrt{2}\cos(t)+1)^2 b\sqrt{2}\cos(t) \right] \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{2\pi} (-4b^2a + 4ab^2)\sin^2(t)\mathrm{d}t \\ &= 4\pi ab(b-a). \end{aligned}$$

Exercice 7. Le calcul direct nous donne via une paramétrisation affine des quatre cotés du carré :

$$\begin{aligned} &\int_C \frac{x-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 -2\frac{1+1-2t}{1+(1-2t)^2}\mathrm{d}t + \int_1^2 -2\frac{3-2t+1}{(3-2t)^2+1}\mathrm{d}t + \int_2^3 2\frac{-1+2t-5}{1+(2t-5)^2}\mathrm{d}t + \int_3^4 2\frac{2t-7-1}{(2t-7)^2+1}\mathrm{d}t \\ &= -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -2\pi. \end{aligned}$$

En effet, pour une portion où y est constant égal à $y_0 = \pm 1$, on a entre deux bornes a, b

$$\int_a^b x'(t)\frac{x(t)-y_0}{x(t)^2+1}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}[\log(x(t)^2+1)]_a^b - y_0[\arctan(x(t))]_a^b = \pm(\arctan(1) - \arctan(-1))$$

car $x(t)$ va de -1 à 1 ou l'inverse. Idem pour les cotés où $x(t)$ est constant. En distinguant les cas, on obtient le résultat.

Une façon plus élégante consiste à voir qu'il existe un paramétrage $\gamma : [0, 2\pi] \to C$ du carré, homotope au paramétrage dans le sens horaire du cercle $\tilde{\gamma}(t) = (\tilde{x}(t), \tilde{y}(t))$, via une homotopie fixant les sommets $(\pm 1, \pm 1)$:

$$\begin{cases} \tilde{x}(t) = \sqrt{2}\cos(\pi/4 - t) \\ \tilde{y}(t) = \sqrt{2}\sin(\pi/4 - t) \end{cases}$$

L'homotopie s'obtient en travaillant sur les 4 secteurs $[0, \pi/2]$, .. $[3\pi/2, 2\pi]$ et en interpolant entre γ et $\tilde{\gamma}$. Par exemple, sur $[0, \pi/2]$, on prend

$$H(s,t) = \left(1 - s + \frac{s}{\sqrt{2}\cos(\pi/4 - t)}\right)\tilde{\gamma}(t)$$

et ce H est une homotopie à extrémités fixées entre $\tilde{\gamma}$ et une paramétrisation (non affine) du coté allant de $(1,1)$ à $(1,-1)$ de C (faire un dessin). Il suffit alors de concaténer ces quatre homotopies.

Ainsi, la formule d'homotopie nous assure

$$\begin{aligned} \int_C \frac{x-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}y &= \int_{\tilde{\gamma}} \frac{x-y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x + \frac{x+y}{x^2+y^2}\mathrm{d}y \\ &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\tilde{x}(t) - \tilde{y}(t))\tilde{x}'(t)\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\tilde{x}(t) + \tilde{y}(t))\tilde{y}'(t)\mathrm{d}t \\ &= -\int_0^{2\pi} \sin(t)(\cos(t) + \sin(t))\mathrm{d}t - \int_0^{2\pi} \cos(t)(\cos(t) - \sin(t))\mathrm{d}t \\ &= -\int_0^{2\pi} (\sin^2(t) + \cos^2(t))\mathrm{d}t = -2\pi. \end{aligned}$$

Exercice 8. On constate que la forme à intégrer est exacte, de primitive $f(x,y,z) = xy + yz + xz$. L'intégrale le long de toute courbe fermée est donc nulle.

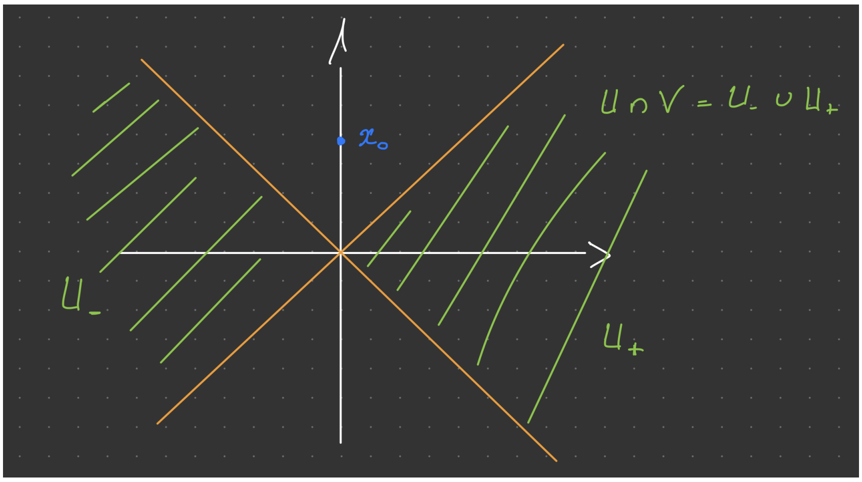
Exercice 9. (1) On prend $\gamma : [-1,2] \to \mathbb{R}^2$ le chemin défini par $\gamma(t) = (t, t^2)$. On a alors

$$\int_\gamma \omega = \int_{-1}^{2} (t^3 + 2t(t+t^2))\mathrm{d}t = \int_{-1}^{2} (3t^3 + 2t^2)\mathrm{d}t.$$

(2) On prend $\gamma(t) : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ le chemin défini par $\gamma(t) = (t,t)$. On a alors

$$\int_\gamma \omega = \int_0^1 t(\sin(t) + \cos(t))\mathrm{d}t = \int_0^1 \sqrt{2}t\sin(t+\frac{\pi}{4})\mathrm{d}t = \Big[-\sqrt{t}\cos(t+\frac{\pi}{4})\Big]_0^1 + \sqrt{2}\int_0^1 \cos(t+\frac{\pi}{4})\mathrm{d}t$$
$$= -\sqrt{2}\cos(1+\frac{\pi}{4}) + \sqrt{2}\sin(1+\frac{\pi}{4}) - 1 = 2\sin(1) - 1.$$

Exercice 10.



On voit sur le dessin que la réunion de U_1 et U_2 est tout $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ et que l'intersection a deux composantes connexes qui sont les quart de plan représentés sur la figure ci-dessus.

(1) Vérifions que U_1 et U_2 sont étoilés. Pour U_1 prenons $x_0 = (0,1) \in U_1$. Soit $p = (x,y) \in U_1$. Alors pour tout $t \in [0,1]$, $tx_0 + (1-t)p = ((1-t)x, (1-t)y + t)$. Comme $p \in U_1$, on a $y > -|x|$, d'où $(1-t)y + t > -(1-t)|x| + t \geqslant -|(1-t)x|$. Ce qui montre que le segment $[p, x_0]$ est contenu dans U_1, de même pour U_2 en prenant comme point $(0,-1)$.

Ainsi, par le lemme de Poincaré, ω est exacte sur U_1 et exacte sur U_2 (mais pas nécessairement sur la réunion des deux). Ainsi, il existe $f_1 : U_1 \to \mathbb{R}$ et $f_2 : U_2 \to \mathbb{R}$ lisses telles que $\omega = \mathrm{d}f_1$ en restriction à U_1 et $\omega = \mathrm{d}f_2$ en restriction à U_2.

(2) Par construction, f_1 et f_2 sont définies et différentiables sur $U_1 \cap U_2$ et $\mathrm{d}(f_1 - f_2) = \omega - \omega = 0$. Donc, $f_1 - f_2$ est constante sur chaque composante connexe de $U_1 \cap U_2$. Soit $\gamma : [-\pi, \pi] \to U$ la paramétrisation standard de $\mathbf{S}^1$. Alors $\gamma([-\pi, 0]) \subset U_2$ et $\gamma([0,\pi]) \subset U_1$. Notons $\gamma_1 = \gamma|_{[0,\pi]}$ et $\gamma_2 = \gamma|_{[-\pi,0]}$. Nous avons alors :

$$\begin{aligned}\int_\gamma \omega = \int_{\gamma_2} \omega + \int_{\gamma_1} \omega &= f_2(\gamma(0)) - f_2(\gamma(-\pi)) + f_1(\gamma(\pi)) - f_1(\gamma(0)) \\ &= f_1(\gamma(\pi)) - f_2(\gamma(-\pi)) - (f_1(\gamma(0)) - f_2(\gamma(0))) \\ &= k_+ - k_-, \text{ car } \gamma(\pi) = \gamma(-\pi).\end{aligned}$$

On note encore une fois qu'il y a une ambigüité de signe, mais cela importe peu pour la suite.

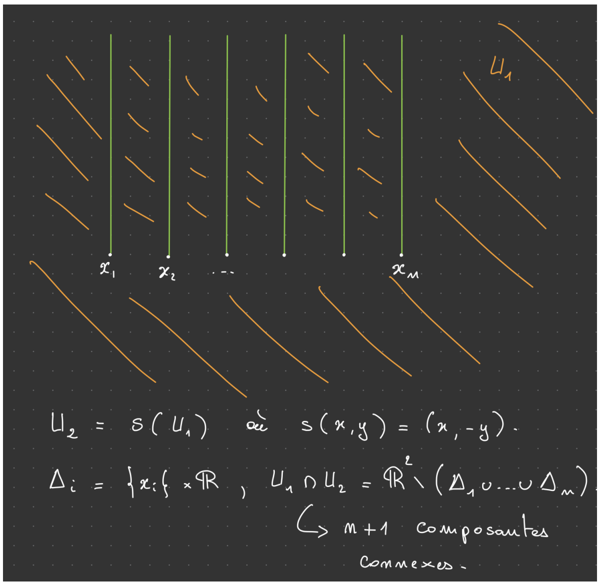
(3) Si $\omega = \mathrm{d}f$, alors son intégrale le long de tout lacet est nulle. Si $\int_\gamma \omega = 0$, alors $k_+ = k_-$ d'après la question précédente, ce qui signifie que $f_1 - f_2$ est constante sur tout $U_1 \cap U_2$. Notons k cette constante. Remplaçons f_2 par $f_2 + k$. C'est toujours une primitive de ω sur U_2 et maintenant $f_1 = f_2$ sur $U_1 \cap U_2$. On peut alors définir $f : U \to \mathbb{R}$ par $f(p) = f_1(p)$ si $p \in U_1$ et $f(p) = f_2(p)$ si $p \in U_2$ et il n'y a pas de conflit lorsque $p \in U_1 \cap U_2$ puisque les deux fonctions y coïncident. Comme f coïncide localement avec soit f_1 soit f_2, elle est lisse et $\mathrm{d}f = \omega$ partout.

Soient $F = \{\omega \in \Omega^1(U) \ : \ \omega \text{ fermée}\}$ et $Z = \{\omega \in \Omega^1(U) \ : \ \omega \text{ exacte.}\}$, de sorte que $H^1(U) = F/Z$. Considérons la forme linéaire φ sur F définie par

$$\varphi(\omega) = \int_\gamma \omega$$

où $\gamma(t) = (\cos(t), \sin(t))$ sur $[-\pi, \pi]$ est la paramétrisation standard de $\mathbf{S}^1$. On vient de voir que $\ker \varphi = Z$. De plus $\varphi \neq 0$ (donc surjective) puisque $\varphi(\omega) = 2\pi$ pour $\omega = \frac{-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ la forme angulaire rencontrée précédemment. Ainsi, φ descend en un isomorphisme $\overline{\varphi} : F/Z \to \mathbb{R}$, montrant que $H^1(U) \simeq \mathbb{R}$ est bien de dimension 1.

Exercice 11.



(1) Pour tout k, prenons $\omega_k = \frac{-y\mathrm{d}x + (x-k)\mathrm{d}y}{(x-k)^2+y^2} = (f_k)^*\omega$ où $\omega = \frac{-y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y}{x^2+y^2}$ et $f_k(x,y) = (x-k, y)$ est la translation de vecteur $-x_k = -(k, 0)$. Ainsi, ω_k est définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_k\}$, est fermée et on a

$$\int_{\gamma_i} \omega_k = 2\pi\delta_{ik}$$

où γ_i est une paramétrisation directe du cercle C_i. En effet, si $i = k$, alors c'est l'exercice 5, si $i \neq k$ alors γ_i est homotope dans $\mathbb{R}^2 \setminus \{x_k\}$ au lacet constant égal à x_i. Ainsi, pour tout $(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{R}^n$, si on prend $\omega = \sum u_k \omega_k$, alors $\Psi(\omega) = (u_1, \dots, u_n)$ par construction, montrant la surjectivité de Ψ.

(2) Le sens non évident est $\Psi(\omega) = 0 \Rightarrow \omega$ exacte. On procède comme à l'exercice précédent. Notons $V_0, \dots, V_n$ les n composantes connexes de $U_1 \cap U_2$. Soient f_1 une primitive de ω sur U_1 et f_2 une primitive sur U_2. Comme $\mathrm{d}(f_1 - f_2) = 0$ sur $U_1 \cap U_2$, il existe des constantes $k_0, \dots, k_n$ telles que $f_1 - f_2 \equiv k_i$ sur V_i. En découpant chaque intégrale $\int_{\gamma_i} \omega$ comme à l'exercice précédent, on voit que $\int_{\gamma_i} \omega = \pm(k_{i-1} - k_i)$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$. Ainsi, si $\Psi(\omega) = 0$, alors $k_0 = \cdots = k_n =: k$. On remplace alors f_2 par $f_2 + k$ et on a comme à l'exercice précédent $f_1 = f_2$ sur $U_1 \cap U_2$, et on définit $f : U \to \mathbb{R}$ de la même façon, de sorte que $\omega = \mathrm{d}f$.

(3) On note de même F l'espace des formes fermées, Z celui des formes exactes, de sorte que $H^1(U) = F/Z$. On a vu que $\Psi|_F : F \to \mathbb{R}^n$ est surjective, de noyau Z. Elle induit donc un isomorphisme linéaire $H^1(U) = F/Z \simeq \mathbb{R}^n$.