Exercice 1. On identifie arbitrairement E à $\mathbb{R}^n$. Soit $q(x) = x_1^2 + \cdots + x_n^2$. Alors $q(0) = 0$ et $d_0 q = 0$. La hessienne de q en 0 est $H_q(0) = (\partial_i \partial_j q(0)) = 2I_n$. Pour $t > 0$, considérons $f + tq$: elle s'annule en 0, est de différentielle nulle en 0, et sa hessienne est $H_f(0) + 2tI_n = 2t(I_n + H_f(0)/2t)$. Pour t assez grand, $I_n + H_f(0)/2t$ est inversible à valeurs propres positives. Ainsi, pour t assez grand, $f + tq$ vérifie les hypothèses du lemme de Morse, sa hessienne étant définie positive, et il existe donc $f_1, \ldots, f_n$ lisses telles que $f + tq = \sum_{i=1}^n f_i^2$. Prenons $g_i(x) = \sqrt{t} x_i$. Les fonctions g_i sont lisses sur $\mathbb{R}^n$, s'annulent en 0 et comme $tq = \sum g_i^2$, le résultat suit.

Exercice 2. Ceci se base sur l'existence de fonctions plateau sur $\mathbb{R}$. Notons $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \phi(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leqslant 0. \end{cases}$$

On montre par récurrence en appliquant le théorème du prolongement dérivable que ϕ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ (ceci est clair sur $]0, +\infty[$, observer que $\phi^{(n)}(x) = P_n(\frac{1}{x})e^{-1/x}$ où $P_n \in \mathbb{R}[X]$ et donc que $\phi^{(n)}(x) \to 0$ quand $x \to 0^+$).

La fonction $\psi(x) = \phi(1 + x)\phi(1 - x)$ est alors lisse, nulle sur $\mathbb{R} \setminus]-1, 1[$ et > 0 sur $]-1, 1[$. C'est une "fonction cloche". On peut la normaliser et la concentrer autour de 0 en prenant pour tout $\varepsilon > 0$, $\psi_\varepsilon(x) = C\psi(x/\varepsilon)$ avec $C > 0$ tel que $\int_{\mathbb{R}} \psi_\varepsilon = 1$. La fonction ψ_ε est maintenant supportée sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$. On peut alors l'utiliser pour régulariser des fonctions bornées. Soit f la fonction indicatrice d'un intervalle $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Alors, le produit de convolution $\psi_\varepsilon * f$ défini par $\psi_\varepsilon * f(x) = \int_{\mathbb{R}} \psi_\varepsilon(x - t) f(t) \mathrm{d}t$ est nul en dehors de $]a - \varepsilon, b + \varepsilon[$ et vaut 1 sur $[a + \varepsilon, b - \varepsilon]$. Les théorèmes de dérivation sous le signe intégral s'appliquent ici pour donner que $\psi_\varepsilon * f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$. Ainsi, on peut trouver des fonctions lisses qui valent 1 sur un intervalle $I = [a, b]$ donné et sont nulles sur $\mathbb{R} \setminus J$, pour tout intervalle ouvert J tel que $I \subset J$.

Soit maintenant $V \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert contenant 0. Soit $\varepsilon > 0$ tel que $\{x \in \mathbb{R}^n \ : \ \|x\|_\infty < \varepsilon\} \subset V$. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ lisse, valant 1 sur $]-\varepsilon/2, \varepsilon/2[$ et 0 en dehors de $]-\varepsilon, \varepsilon[$. Soit $\psi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ définie par $\psi(x_1, \ldots, x_n) = \phi(x_1) \ldots \phi(x_n)$. Alors ψ est lisse, vaut 1 sur la boule $\overline{B}(0, \varepsilon/2)$ (pour la norme infinie) et est nulle dès que $\|x\|_\infty \geqslant \varepsilon$, et $\{x \ : \ \|x\|_\infty > \varepsilon\}$ est un voisinage ouvert de $\mathbb{R}^n \setminus V$ sur lequel ψ est nul.

Enfin, soit $p \in M$ et soit $(U, (x_1, \ldots, x_n))$ une carte locale en p, avec $x_1(p) = \cdots = x_n(p) = 0$. Soit $V \subset \mathbb{R}^n$ l'image de $(x_1, \ldots, x_n)$. Soit ψ la fonction définie au paragraphe précédent. Prenons alors $f : M \to \mathbb{R}$ donnée par

$$\forall q \in M,\ f(q) = \begin{cases} \psi(x_1(q), \ldots, x_n(q)) & \text{si } q \in U \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour montrer que f est lisse, il suffit de le vérifier au voisinage de tout point de M. Notons K le support de f, c'est à dire le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel f est nulle. Par construction, $K \subset U$ et son image par la carte $(x_1, \ldots, x_n)$ est $\overline{B}(0, \varepsilon)$, boule fermée pour la norme infinie. Soit $q \in M$. Si $q \notin K$, alors f est nulle donc $\mathcal{C}^\infty$ au voisinage de q. Si $q \in K$, alors $q \in U$ et donc f coïncide avec $\psi(x_1(.), \ldots, x_n(.))$ au voisinage de q, donc est lisse sur ce voisinage.

Pour la construction des partitions de l'unité, on pourra consulter la Section 3.1 de ce cours.

Exercice 3.

(1) D'après le cours, $[X_1, Y_1] = 0$.

(2) Les formules du cours nous donnent

$$[X_2, Y_2](x, y) = \left[\frac{\partial}{\partial x}, (1 + x^2)\frac{\partial}{\partial y}\right] = \left(\frac{\partial}{\partial x}(1 + x^2)\right)\frac{\partial}{\partial y}$$

car $[X_1, Y_1] = 0$, le facteur de gauche du dernier terme désignant la dérivée de Lie de la fonction $(1 + x^2)$ par rapport au champ de vecteurs $\frac{\partial}{\partial x}$. D'où $[X_2, Y_2](x, y) = 2x\frac{\partial}{\partial y}$.

(3) Non, car quel que soit l'ouvert sur lequel (u, v) seraient définies, on devrait avoir $[\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v}] = 0$. Or, le calcul précédent a montré que $[X_2, Y_2]$ ne s'annule que sur la droite $\{x = 0\}$, qui est d'intérieur vide.

Exercice 4. (1) On procède au calcul en utilisant les formules de cours, la bilinéarité et l'antisymétrie du crochet de Lie :

$$\begin{aligned}
[X,Y] &= \left[\frac{x}{y}\frac{\partial}{\partial x}, 2\sqrt{xy}\frac{\partial}{\partial x}\right] + \left[\frac{\partial}{\partial y}, 2\sqrt{xy}\frac{\partial}{\partial x}\right] \\
&= 2\frac{x}{y}\frac{\partial\sqrt{xy}}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} - 2\sqrt{xy}\left[\frac{\partial}{\partial x}, \frac{x}{y}\frac{\partial}{\partial x}\right] + 2\frac{\partial\sqrt{xy}}{\partial y}\frac{\partial}{\partial x} \\
&= \left(\frac{2x}{\sqrt{xy}} - \frac{2\sqrt{xy}}{y}\right)\frac{\partial}{\partial x} \text{ car } \frac{\partial\sqrt{xy}}{\partial x} = \frac{x}{2\sqrt{xy}} \text{ sur tout } U \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(attention à garder en tête que x et y peuvent être négatifs, mais simultanément)

(2) On commence par voir qu'à $(x,y) \in U$ donné, le système en (u,v) :

$$\begin{cases} uv^2 = x \\ u = y \end{cases}$$

admet une unique solution $(u,v) \in U$, à savoir $u = y$ et $v = \varepsilon(y)\sqrt{\frac{x}{y}}$, où $\varepsilon(y) = |y|/y \in \{\pm 1\}$ est le signe de y. Dès lors, si on introduit $f : U \to U$ et $g : U \to U$ définies par

$$\begin{aligned}
f(x,y) &= \left(y, \varepsilon(y)\sqrt{\frac{x}{y}}\right) \\
g(u,v) &= (uv^2, u)
\end{aligned}$$

on constate $f \circ g = g \circ f = \mathrm{id}_U$ et que ces deux expressions sont lisses sur U (noter que ε est constante sur chacune des deux composantes connexes de U). Ceci montre que g est un difféomorphisme de U, de réciproque f.

On va maintenant calculer les coordonnées de X et Y dans $(\frac{\partial}{\partial u}, \frac{\partial}{\partial v})$, et inverser la relation linéaire (ce qui est possible car (X,Y) est partout de rang 2). Rappelons que par construction, les coordonnées d'un vecteur $v \in T_pM$ dans la base des $(\frac{\partial}{\partial x_i})$ sont les $(\mathrm{d}_p x_1(v), \ldots, \mathrm{d}_p x_n(v))$. On calcule alors pour $p = (x,y) \in U$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}_p u(X_p) &= \frac{x}{y}\mathrm{d}_p u\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \mathrm{d}_p u\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{x}{y}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} = 1 \\
\mathrm{d}_p u(Y_p) &= 2\sqrt{xy}\,\mathrm{d}_p u\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = 0 \\
\mathrm{d}_p v(X_p) &= \frac{x}{y}\mathrm{d}_p v\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \mathrm{d}_p v\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = \frac{x}{y}\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \\
&= \frac{x}{y}\frac{1}{2\sqrt{xy}} - \frac{\varepsilon(y)}{2y}\sqrt{\frac{x}{y}} \text{ (distinguer les signes)} \\
&= \frac{v^2}{2}\frac{1}{uv} - \frac{v}{2u} = 0 \\
\mathrm{d}_p v(Y_p) &= 2\sqrt{xy}\,\mathrm{d}_p v\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = 2\sqrt{xy}\frac{\partial v}{\partial x} = 1.
\end{aligned}$$

Tous ces calculs fastidieux montrent $X = \frac{\partial}{\partial u}$ et $Y = \frac{\partial}{\partial v}$, en cohérence avec $[X,Y] = 0$.

Exercice 5. (1) Il suffit de vérifier, pour $p = (x,y,z) \in \mathbf{S}^2$, que X_p, Y_p et Z_p sont orthogonaux au vecteur position (x,y,z) (pour la structure euclidienne standard de $\mathbb{R}^3$). Par exemple, pour X, le produit scalaire avec le vecteur position vaut $-zy + yz = 0$. De même pour les autres.

(2) On calcule les crochets avec les règles habituelles. Pour alléger, on note ∂_x pour $\frac{\partial}{\partial x}$, ainsi que pour y et z.

$$\begin{aligned}
[X,Y] &= [y\partial_z - z\partial_y, z\partial_x - x\partial_z] = [y\partial_z, z\partial_x] - [y\partial_z, x\partial_z] - [z\partial_y, z\partial_x] + [z\partial_y, x\partial_z] \\
&= y\partial_x + z[y\partial_z, \partial_x] - x[y\partial_z, \partial_z] - z[z\partial_y, \partial_x] + x[z\partial_y, \partial_z] \\
&= y\partial_x - x\partial_y = -Z.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[X,Z] &= [y\partial_z - z\partial_y, x\partial_y - y\partial_x] = [y\partial_z, x\partial_y] - [y\partial_z, y\partial_x] - [z\partial_y, x\partial_y] + [z\partial_y, y\partial_x] \\ &= x[y\partial_z, \partial_y] - y[y\partial_z, \partial_x] - x[z\partial_y, \partial_y] + z\partial_x + y[z\partial_y, \partial_x] \\ &= -x\partial_z + z\partial_x = Y.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[Y,Z] &= [z\partial_x - x\partial_z, x\partial_y - y\partial_x] = [z\partial_x, x\partial_y] - [z\partial_x, y\partial_x] - [x\partial_z, x\partial_y] + [x\partial_z, y\partial_x] \\ &= z\partial_y + x[z\partial_x, \partial_y] - y[z\partial_x, \partial_x] - x[x\partial_z, \partial_y] + y[x\partial_z, \partial_x] \\ &= z\partial_y - y\partial_z = -X.\end{aligned}$$

On en déduit immédiatement que les trois crochets sont partout tangents à $\mathbf{S}^2$ puisque X, Y, Z le sont.

Exercice 6. Calculons le crochet de ces deux champs de vecteurs :

$$[X,Y] = [\partial_x, \partial_y + x\partial_z] = [\partial_x, x\partial_z] = \partial_z.$$

On observe que $\dim \mathrm{Vect}(X_p, Y_p) = 2$ pour tout $p \in \mathbb{R}^3$, et que $[X,Y]_p \notin \mathrm{Vect}(X_p, Y_p)$. Or s'il existait une surface $S \subset \mathbb{R}^3$ à laquelle X et Y seraient tangents, on aurait nécessairement $T_pS = \mathrm{Vect}(X_p, Y_p)$ pour tout $p \in S$, et le crochet $[X,Y]$ devrait être tangent à S, donc dans $\mathrm{Vect}(X_p, Y_p)$, ce qui n'est pas le cas.

Exercice 7. Soit $\gamma : I \to \mathbb{R}^2$ une courbe intégrale de X. Par définition, pour tout $t \in I$, $\gamma'(t) = X(\gamma(t))$. Si on écrit $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, cela nous donne

$$\begin{cases} x'(t) = y(t) \\ y'(t) = -x(t) \end{cases}$$

Or ce système différentielle est linéaire (à coefficients constants). Ceci implique que ses solutions maximales sont définies sur $\mathbb{R}$, et donc que toute courbe intégrale est restriction d'une courbe définie sur $\mathbb{R}$. Pour le résoudre, on note que $(x(t), y(t))$ est solution ssi $z(t) := x(t) + iy(t)$ est solution de $z' = iz$, qui s'intègre en $z(t) = z_0 e^{it}$, $z_0 = z(0)$.

Par conséquent, la courbe intégrale de X passant par (x_0, y_0) à $t = 0$ est la courbe

$$\gamma(t) = (x_0 \cos t + y_0 \sin(t), -x_0 \sin(t) + y_0 \cos(t))$$

définie sur $I = \mathbb{R}$.

Exercice 8. Regardons le premier terme de la somme du membre de droite. Par définition des flots, on a

$$\forall p \in M,\ \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\bigg|_{t=0} f(\phi^t(p)) = \mathrm{d}_p f X(p) = (\partial_X f)(p),$$

puisque $c(t) = \phi^t(p)$ est une courbe sur M, définie sur un intervalle $]-\varepsilon, \varepsilon[$ telle que $c(0) = p$ et $c'(0) = X(p)$. De même pour ψ^t et Y. En appliquant ceci au point $p = \phi^s(m)$, puis en redérivant par rapport à s, on obtient :

$$\frac{\partial^2}{\partial s \partial t}\bigg|_{t,s=0} f(\psi^t(\phi^s(m))) = \frac{\partial}{\partial s}\bigg|_{s=0} (\partial_Y f)(\phi^s(m)) = (\partial_X \partial_Y f)(m).$$

Noter que l'ordre de dérivation n'a pas d'importance par le théorème de Schwartz, ce qui compte est l'ordre dans lequel on compose ϕ^s et ψ^t. Le deuxième terme est donc $(\partial_Y \partial_X f)(m)$, et on conclut puisque par définition, $\partial_{[X,Y]} f(m) = \mathrm{d}_m f[X,Y]_m = (\partial_X \partial_Y f)(m) - (\partial_Y \partial_X f)(m)$.

Exercice 9. Soit $M \subset \mathbb{R}^n$ une sous-variété, et soient X, Y des champs de vecteurs définis sur $\mathbb{R}^n$ tels que $\forall p \in M$, $X_p, Y_p \in T_pM$. Ainsi, les restrictions de X et Y à M définissent des champs de vecteurs de M, qu'on note $\overline{X}$ et $\overline{Y}$.

(1) On commence par vérifier que pour tout $p \in M$ et tout t tel que $\phi^t_X(p)$ est défini, on a $\phi^t_X(p) \in M$. Par définition, pour t assez petit, $\gamma(t) := \phi^t_{\overline{X}}(p) \in M$, et bien-sûr $\gamma(t)$ est une courbe intégrale de X puisque $\gamma'(t) = \overline{X}(\gamma(t)) = X(\gamma(t))$, car $\gamma(t) \in M$. Comme $\gamma(0) = p$, par unicité des courbes intégrales de X, on a nécessairement $\gamma(t) = \phi^t_X(p)$ pour t petit, et on

montre facilement que les deux courbes sont définies sur les mêmes intervalles. D'où $\phi_X^t(p) \in M$ pour tout t en lequel le flot est défini.

(2) Ainsi, pour tout $p \in M$, si V est un voisinage de p dans $\mathbb{R}^n$ sur lequel le flot ϕ_X^t est défini pour tout $|t| \leqslant \varepsilon$, on a $\phi_X^t(V \cap M) \subset M$, montrant que ϕ_X^t se restreint en un difféomorphisme de $V \cap M$ sur $\phi_X^t(V) \cap M$. On rappelle la formule

$$[X,Y]_p = \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} \mathrm{d}\phi_X^{-t}(Y_{\phi_X^t(p)}).$$

Comme ϕ_X^t préserve M, on a $d_p\phi_X^t T_pM = T_{\phi_X^t(p)}M$ pour tout $p \in M$ et t tels que $\phi_X^t(p)$ est bien défini. La formule précédente nous donne donc $[X,Y]_p \in T_pM$ pour tout $p \in M$.

Exercice 10. Notons X_A le champ de vecteur défini sur $\mathbb{R}^n$ par $X_A(u) = Au$ pour tout $u \in \mathbb{R}^n$.

(1) Rappelons que pour toute matrice A, on a $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{tA} = Ae^{tA}$, ceci se déduit du fait que $e^{A+B} = e^Ae^B$ pour toutes matrices A, B telles que $AB = BA$ et que le terme en t dans le développement en série entière en 0 de e^{tA} est A.

En notant $\gamma(t) = e^{tA}u$, pour $t \in \mathbb{R}$ et $u \in \mathbb{R}^n$, on en déduit par linéarité que $\gamma'(t) = Ae^{tA}u = A\gamma(t) = X_A(\gamma(t))$, et bien-sûr $\gamma(0) = u$. Ceci nous donne donc que le flot de X_A est défini pour tout $t \in \mathbb{R}$ et que $\phi_{X_A}^t(u) = \gamma(t) = e^{tA}u$.

(2) On peut calculer le crochet en coordonnées. Soient X_A et X_B les champs associés à $A = (a_{ij})$ et $B = (b_{ij})$ respectivement. Notons $u = (u_1, \ldots, u_n)$ les coordonnées canoniques sur $\mathbb{R}^n$ et $\partial_i = \frac{\partial}{\partial u_i}$. On a alors

$$X_A(u) = \sum_i \left(\sum_j a_{ij}u_j\right)\partial_i \text{ et } X_B(u) = \sum_k \left(\sum_l b_{kl}u_l\right)\partial_k.$$

En notant que $\partial_i\left(\sum_l b_{kl}u_l\right) = b_{ki}$, on peut développer l'expression $[X_A, X_B]$:

$$\begin{aligned}
[X_A, X_B](u) &= \sum_{ik}\left[\left(\sum_j a_{ij}u_j\right)\partial_i, \left(\sum_l b_{kl}u_l\right)\partial_k\right] \\
&= \sum_{ik}\left(\sum_j a_{ij}u_j\right)\partial_i\left(\sum_l b_{kl}u_l\right)\partial_k + \sum_{ik}\left(\sum_l b_{kl}u_l\right)\left[\left(\sum_j a_{ij}u_j\right)\partial_i, \partial_k\right] \\
&= \sum_{ik}\left(\sum_j a_{ij}u_j\right)b_{ki}\partial_k - \sum_{ik}\left(\sum_l b_{kl}u_l\right)a_{ik}\partial_i \\
&= \sum_{ik}\left(\sum_j a_{kj}u_j\right)b_{ik}\partial_i - \sum_{ik}\left(\sum_j b_{kj}u_j\right)a_{ik}\partial_i \\
&= \sum_i\left(\sum_j\left(\sum_k b_{ik}a_{kj} - a_{ik}b_{kj}\right)u_j\right)\partial_i
\end{aligned}$$

En notant que $c_{ij} := \sum_k b_{ik}a_{kj} - a_{ik}b_{kj}$ est le coefficient (i,j) de la matrice $C := BA - AB$, nous avons $[X_A, X_B](u) = X_C(u)$.

Exercice 11.