Exercice 1 –Soit $R > r > 0$, on considère

$$W := \{(x,y,z) \mid \left(\sqrt{x^2+y^2} - R\right)^2 + z^2 = r^2\}$$

(1) Montrer que V est une sous-variété de $\mathbf{R}^3$ et la dessiner.
(2) Montrez que V est compact
(3) Quels sont les points critiques et extrema de la fonction $g(x,y,z) = x$ sur V
(4) (plus dur) Montrez que V est difféomorphe à $S^1 \times S^1$.

1) Soit $f : (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto \underbrace{\left(\sqrt{x^2+y^2} - R\right)^2}_{= x^2+y^2+R^2-2R\sqrt{x^2+y^2}} + z^2 - r^2 \in \mathbb{R}$

$$= x^2+y^2+R^2-2R\sqrt{x^2+y^2}+z^2-r^2$$

f est C^∞ sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{x=y=0\}$. Or si $x=y=0$ et si $(x,y,z) \in W$, alors $R^2+z^2 = r^2$, contredisant $r<R$.
$\rightsquigarrow$ pas de pb pour différencier f au vois. de W.

Si $p = (x,y,z) \in W$, alors
$\partial_x f(p) = 2x - 2R\dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $\partial_y f(p) = 2y - 2R\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$
$\partial_z f(p) = 2z$.

Ainsi, si $d_pf = 0$ et $p \in W$, alors $z = 0$. Comme $p \in W$, $x \neq 0$ ou $y \neq 0$. Disons $x \neq 0$. On a alors
$\dfrac{R}{\sqrt{x^2+y^2}} = 1$ i.e. $R = \sqrt{x^2+y^2}$; idem si $y \neq 0$.

On a alors $(R-R)^2 + z^2 = r^2$, d'où $r = 0$, ce qui est exclus.

__CCL__. $\forall p \in W$, $d_pf \neq 0$, f est donc une submersion au vois. de tout pt de $W = f^{-1}(\{0\})$, montrant que W est une sous-variété de dim $= 2$ de $\mathbb{R}^3$.

Pour la dessiner, on note que l'équation de W est invariante par les rotations d'axe (Oz) :

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme tout point de $\mathbb{R}^3 \setminus (Oz)$ est l'image par une telle rotation d'un point du plan $\{y=0\}$, il suffit de tracer $W \cap \{y=0\}$, puis d'obtenir W par révolution autour de (Oz).

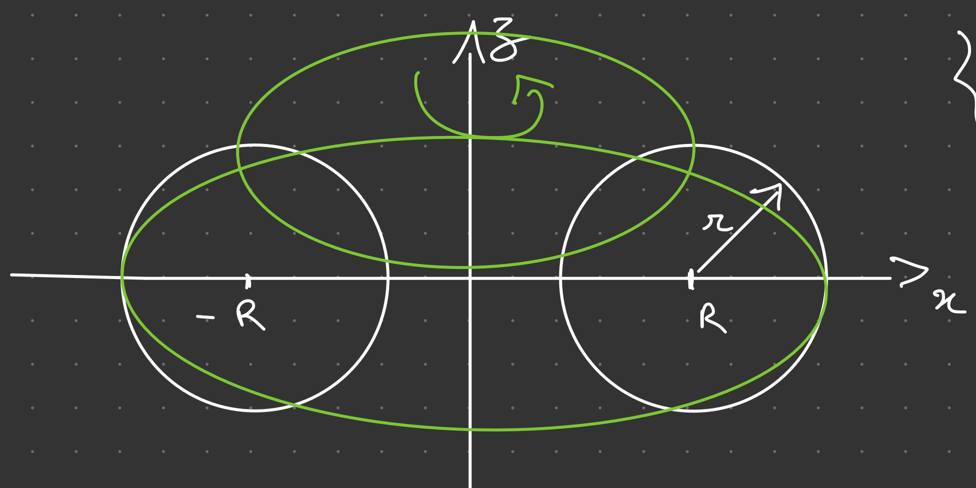
$$p = (x,y,z) \in W \cap \{y=0\}$$

$$\Leftrightarrow (|x| - R)^2 + z^2 = r^2 \text{ et } y = 0.$$

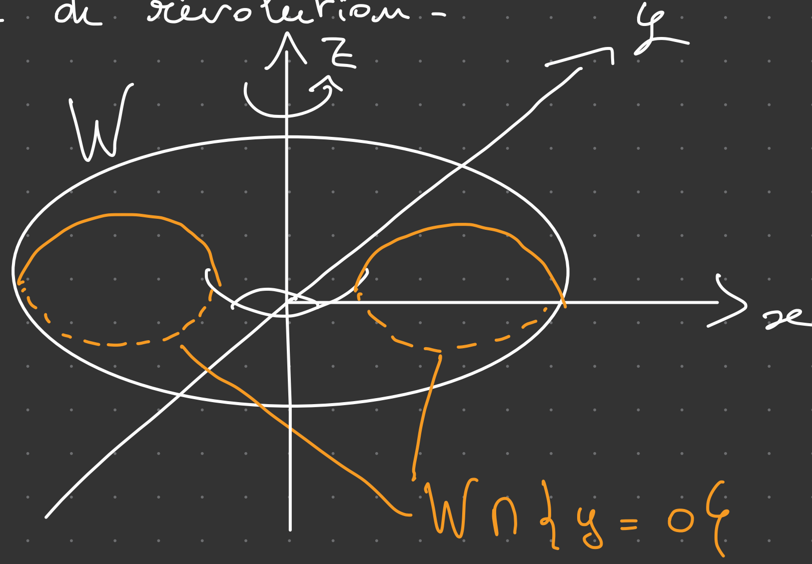
$$\left\{ \begin{array}{l} x > 0,\ (x-R)^2 + z^2 = r^2 \text{ et } y = 0 \\ \underline{\text{ou}} \\ x < 0,\ (x+R)^2 + z^2 = r^2 \text{ et } y = 0 \end{array} \right.$$

cercles de rayon r

$\{y=0\}$



On obtient un tore de révolution.



2) $W = f^{-1}(\{0\})$, f continue, $\{0\}$ fermé de $\mathbb{R}$, donc W est fermée dans $\mathbb{R}^3$.

W bornée ?

Si $p = (x, y, z) \in W$, alors

$$\left(\sqrt{x^2+y^2} - R\right)^2 + z^2 = r^2$$

$$\text{d'où} \quad z^2 \leqslant r^2 \Rightarrow |z| \leqslant r.$$

$$\text{et} \quad \left(\sqrt{x^2+y^2} - R\right)^2 \leqslant r^2$$

$$\Rightarrow \left|\sqrt{x^2+y^2} - R\right| \leqslant r$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} - R \underset{(*)}{\leqslant} \left|\sqrt{x^2+y^2} - R\right| \leqslant r$$

$$\Rightarrow \sqrt{x^2+y^2} \leqslant R + r. \quad (*) : |a-b| \geqslant \big||a| - |b|\big|$$

$$\Rightarrow \max\left(|x|, |y|\right) \leqslant R + r.$$

Ainsi $\|p\|_\infty \leq R + r$, ce qui m.q. W est bornée, donc compacte.

3) Un point $p \in W$ est un pt critique de g ssi

$$\exists \lambda \in \mathbb{R} : d_p g = \lambda \, d_p f.$$

Ce qui revient à dire que les gradients sont colinéaires.

$\nabla g(p) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, ce qui nous donne les contraintes :

$$\partial_y f(p) = \partial_z f(p) = 0$$

soit $\begin{cases} 2y - 2R \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0 \\ 2z = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} y\left(1 - \dfrac{R}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 0 \\ z = 0 \end{cases}$

Si $p \in W$ et $z = 0$, alors $\sqrt{x^2+y^2} \neq R$ car sinon

$$0 + z^2 = r^2.$$

On obtient donc : $y = 0$ et $z = 0$.

Les points critiques sont situés sur $W \cap \{y = z = 0\}$

axe Ox.

$W \cap (Ox) : \{(x,0,0)\}$ avec :

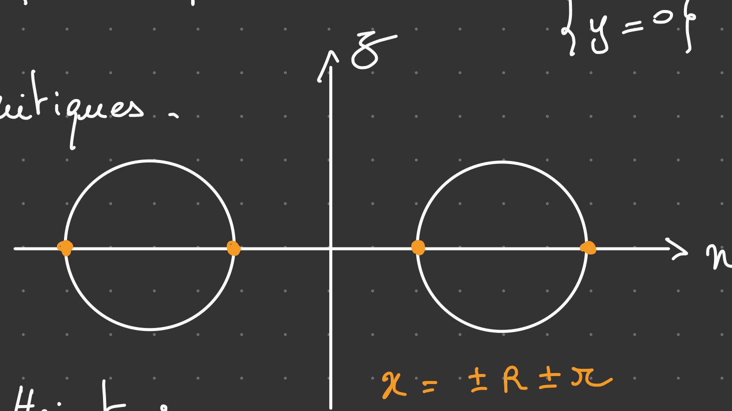
$$(|x| - R)^2 = r^2$$

$\iff \quad |x| - R = \pm r$

$\iff \quad |x| = R \pm r$

$\iff \quad x \in \{\pm R \pm r\}$ (4 possibilités).

On a isolé 4 points critiques.
Il reste à voir ceux qui sont des extrema de g.



Ici, on vérifie que g atteint son min en $(-R-r, 0, 0)$ et son max en $(R+r, 0, 0)$.
Il suffit majorer $|x|$ sous la contrainte $(x,y,z) \in W$.

$$\left(\sqrt{x^2+y^2} - R\right)^2 + z^2 = r^2$$

$$\Rightarrow \quad \left|\sqrt{x^2+y^2} - R\right| = \sqrt{r^2 - z^2} \quad \left(\text{et } |z| \leq r\right)$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{x^2+y^2} - R \leq \sqrt{r^2 - z^2} \leq r$$

$$\Rightarrow \quad \sqrt{x^2+y^2} \leq R + r \quad \Rightarrow \boxed{|x| \leq R + r}$$

Ceci m.q. $\forall p \in W, \quad -R - r \leq g(p) \leq R + r$.

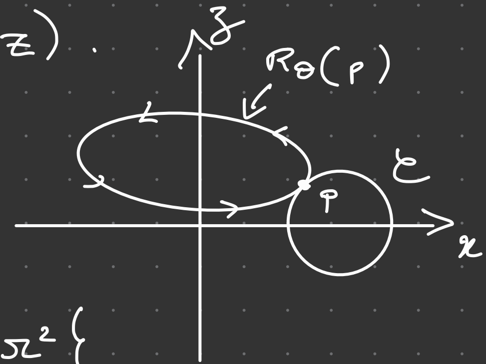
D'où $\min\limits_W g = -R - r$ atteint en $(-R-r, 0, 0)$

$\max\limits_W g = R + r$ atteint en $(R+r, 0, 0)$.

Rq : L'existence du min et du max étaient garantie à l'avance par la compacité de W et la continuité de g.

4) On commence par établir une bijection avec $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$.

L'idée est de voir le premier facteur $\mathbb{S}^1$ comme l'un des deux cercles de la coupe $W \cap \{y=0\}$, et le deuxième $\mathbb{S}^1$ comme la rotation autour de (Oz).



Plus concrètement, si

$$\mathcal{C} = W \cap \{y = 0,\ x > 0\}$$

$$= \{(x, 0, z) : (x-R)^2 + z^2 = r^2\}$$

et si $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, alors

$$\varphi : (p, R_\theta) \in \mathcal{C} \times SO(2) \longmapsto R_\theta(p) \in W$$

est bijective. Ceci en tête, on peut être + direct :

Soit $(x_1, x_2) \in \mathbb{S}^1$, $(y_1, y_2) \in \mathbb{S}^1$ (i.e. $x_1^2 + x_2^2 = 1$, $y_1^2 + y_2^2 = 1$)

On fait correspondre à ces deux points le point :

$$\left(y_1 (R + r x_1),\ y_2 (R + r x_1),\ r x_2 \right) \in W.$$

$(R + r x_1, 0, r x_2)$: paramétrage de $\mathcal{C}$ par $\mathbb{S}^1$

$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix}$: première colonne de la matrice R_θ associée à (y_1, y_2), i.e. $\begin{pmatrix} y_1 & -y_2 & 0 \\ y_2 & y_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Notre candidat est donc l'application :

$$\Psi : (x_1, x_2, y_1, y_2) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \subset \mathbb{R}^4 \longmapsto \left(y_1 (R + r x_1), y_2 (R + r x_1), r x_2 \right) \in W$$

- Ψ à valeurs dans W : c'est fait pour (le vérifier)

- Ψ injective : si (x_1, x_2, y_1, y_2) et (x_1', x_2', y_1', y_2') ont la même image, alors $x_2 = x_2'$ et

$$y_1^2 (R + r x_1)^2 + y_2^2 (R + r x_1)^2 = (y_1')^2 (R + r x_1')^2 + (y_2')^2 (R + r x_1')^2$$

i.e. $R + r x_1 = R + r x_1'$, i.e. $x_1 = x_1'$

d'où $(y_1, y_2) = (y_1', y_2')$.

- Ψ surjective : soit $(x, y, z) \in W$. Posons $\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Soit $(y_1, y_2) := \frac{1}{\rho}(x, y)$. Par hypothèse, on a :

$$(\rho - R)^2 + z^2 = r^2, \text{ soit } \left(\frac{\rho - R}{r} \right)^2 + \left(\frac{z}{r} \right)^2 = 1.$$

Prenons donc $(x_1, x_2) = \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - R}{r}, \frac{z}{r} \right)$

On a alors $\Psi(x_1, x_2, y_1, y_2) = (x, y, z)$, d'où la surjectivité.

On voit par ailleurs qu'on vient d'exhiber la bijection réciproque :

$$\Psi^{-1}(x, y, z) = \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2} - R}{r}, \frac{z}{r}, \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} \right) \in \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1.$$

<u>NB</u> : $x^2 + y^2 > 0$ si $(x, y, z) \in W$.

Les expressions de Ψ et Ψ^{-1} sont analytiques en leurs variables, donc différentiables, ce qui mq $\Psi : \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1 \to W$ est un difféo.

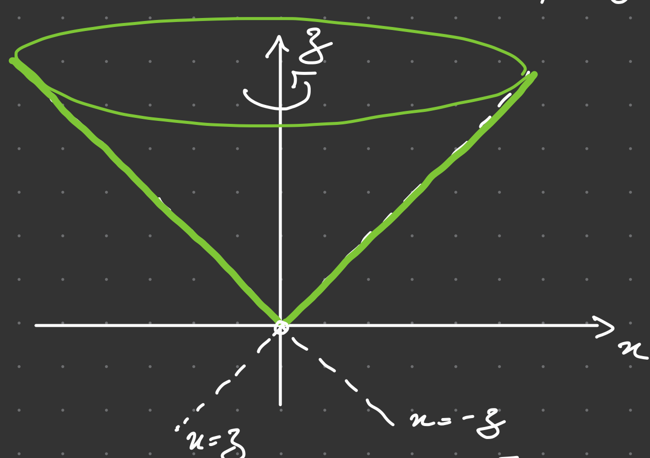
Ex 2. Soit $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2+y^2-z^2=0$ et $z>0\}$.

1) C est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$: soit $q(v) = x^2+y^2-z^2$, où $v=(x,y,z)$. Ici, q est une forme quadratique non-dégénérée. C'est donc une submersion sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.
(directement, $\nabla q(v) = (2x, 2y, -2z) \neq 0$ sauf si $v=0$).
Comme $0 \notin C$, q est une submersion au voisinage de C.
Ainsi, C est une surface dans $\mathbb{R}^3$.

Comme précédemment, elle est inv. par rotation autour de (Oz)
⇝ surface de révolution.

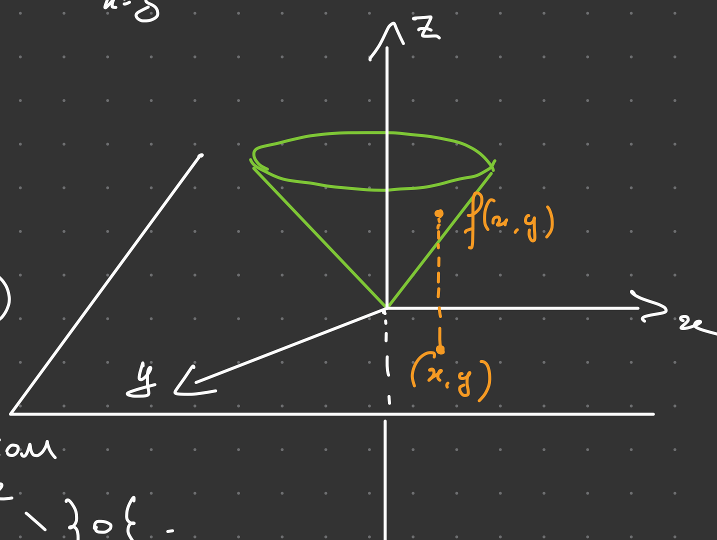
Coupe selon $\{y=0\}$: $x^2-z^2=0 \iff x = \pm z$, $z>0$.

C'est donc un ½ cône.



2) Mq $C \underset{\text{difféo}}{\simeq} \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

$(x,y,z) \in C$ ssi $\begin{cases} z = \sqrt{x^2+y^2} \\ (x,y) \neq (0,0) \end{cases}$



C est donc le graphe de la fonction
$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$, définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.
On a alors directement le difféo :

c'est $(x,y,z) \in C \longmapsto (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

<u>Ex 3</u> : 1) Soit $\pi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^k \\ (x_1,\dots,x_n) & \longmapsto & (x_1,\dots,x_k,0,\dots,0) \end{array}$.

Comme π est <u>linéaire</u>, elle est différentiable et sa différentielle est constante égale à elle-même. D'où $d_0\pi = \pi$, ce qui revient à dire que sa jacobienne est $J_\pi(x_1,\dots,x_n) = \left(\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 1 & & \\ & \ddots & \\ & & 1 \end{matrix} & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array}\right)$.

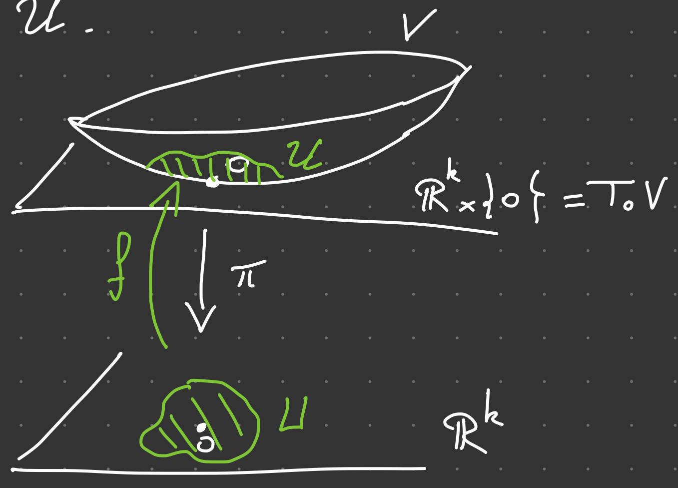
2) Mq $\pi|_V : V \to \mathbb{R}^k$ est un difféo local au vois. de 0.

Ceci revient à montrer que $d_0(\pi|_V)$ est inversible.

Or, par définition, $d_0(\pi|_V) = (d_0\pi)_{T_0V}$, et $T_0V = \mathbb{R}^k \times \{0\}$.

Par définition de π, $(d_0\pi)_{T_0V} = \pi|_{\mathbb{R}^k \times \{0\}} = id_{\mathbb{R}^k \times \{0\}}$, qui est évidemment inversible.

3) Soit $\mathcal{U} \subset V$ un vois. de 0 tel que $\pi|_{\mathcal{U}}$ réalise un difféomorphisme sur son image $\mathcal{U}' \subset \mathbb{R}^k$, qui est un voisinage de 0. Soit $f = (\pi|_{\mathcal{U}})^{-1} : \mathcal{U}' \to \mathcal{U}$.



$\forall (u_1,\dots,u_k) = \underline{u} \in \mathcal{U}'$, si on écrit

$f(u_1,\dots,u_k) = (f_1(\underline{u}),\dots,f_n(\underline{u}))$,

comme $\pi \circ f(\underline{u}) = \underline{u}$, on a :

$f_1(u_1,\dots,u_k) = u_1$

$\vdots$

$f_k(u_1,\dots,u_k) = u_k$

D'où : $f(u_1, \dots, u_k) = (u_1, \dots, u_k, f_{k+1}(u_1 \dots u_k), \dots, f_n(u_1, \dots, u_k))$

Comme $\mathcal{U} = f(U)$, ceci montre que $\mathcal{U}$ est le graphe de l'application :

$(u_1 \dots u_k) \in U \longmapsto (f_{k+1}(u_1, \dots, u_k), \dots, f_n(u_1, \dots, u_k)) \in \mathbb{R}^{n-k}$.

<u>Ex4</u> : $S = \{ M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \text{ symétriques} \}$.

$$\phi : A \in S \mapsto A^2 - A \in S.$$

1) Φ est différentiable sur S et $\forall A \in S$, $\forall H \in S$,

$$\Phi(A + H) = (A + H)^2 - A - H$$

$$= \phi(A) + AH + HA - H + H^2.$$

d'où $d_A \Phi . H = AH + HA - H$.

2) Soit P un projecteur orthogonal, $p = \mathrm{Tr}(P) = \mathrm{Rg}(P)$.

On veut déterminer $\mathrm{Rg}\, d_P \Phi$, i.e. $\dim V$, où

$$V = \{ PH + HP - H,\ H \in S \} \subset S.$$

Comme P est un projecteur orthogonal, $\exists K \in O(n)$

$$KPK^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & 0 \\ & & & & \ddots \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} \text{ (thm spectral)}.$$

$\underleftrightarrow{\ p\ }$

$$KVK^{-1} = \{ (KPK^{-1})(KHK^{-1}) + (KHK^{-1})(KPK^{-1}) - KHK^{-1},\ H \in S \}$$

et $H \in S \mapsto KHK^{-1} \in S$ est un isomorphisme car $K \in O(n)$.

La question étant de déterminer $\dim V$, on peut supposer que $P = \begin{pmatrix} I_p & \\ & 0 \end{pmatrix}$. On écrit H par blocs de taille correspondante

$$H = \left(\begin{array}{c|c} H_1 & H_2 \\ \hline H_3 & H_4 \end{array}\right), \quad \text{où } {}^tH_1 = H_1,\ {}^tH_4 = H_4 \text{ et } {}^tH_3 = H_2.$$

$$\underbrace{}_{p}\ \underbrace{}_{n-p}$$

Sous cette forme, $PH + HP - H = \begin{pmatrix} H_1 & 0 \\ 0 & -H_4 \end{pmatrix}$.

Ainsi, $d_p\Phi . H = 0$ ssi $H_3 = 0$, montrant que

$$\dim \operatorname{Ker} d_p\Phi = n \times (n-p).$$

et donc
$$\operatorname{Rg} d_p\Phi = \frac{n(n+1)}{2} - n(n-p)$$
$$= \frac{p(p+1)}{2} + \frac{(n-p)(n-p+1)}{2}$$

3) [Plus difficile]. Soit $X_p = \{ \pi \in S : \pi^2 = \pi \text{ et } \operatorname{tr}\pi = p \}$ l'ensemble des proj. orthogonaux de rang p. On veut m.q X_p est une sous-variété de S.

Étape 1 : On se ramène à l'étude locale de X_p au vois. du projecteur $\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & & 0 & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix} = J_p$.

$\underbrace{}_{p}$

Soit $\pi \in X_p$. Comme π est sym., $\pi^2 = \pi$ et $\operatorname{Rg}\pi = p$, il existe $K \in O(n)$ telle que $\pi = K J_p {}^tK$

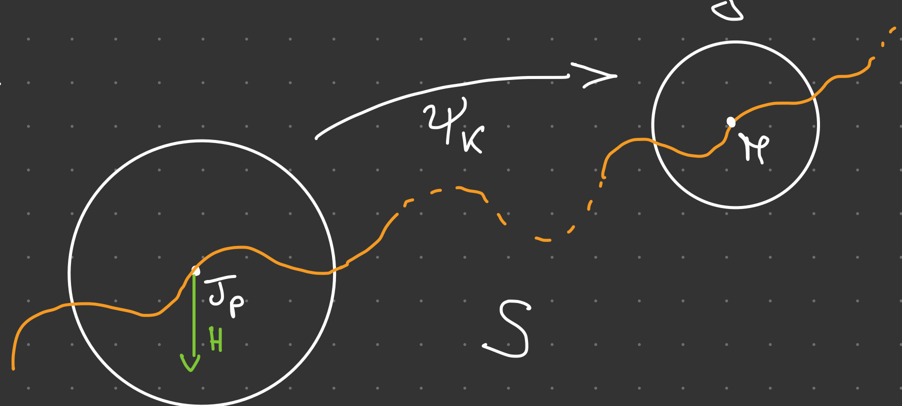
Soit $\begin{array}{rcl} \Psi_K : S & \longrightarrow & S \\ N & \longmapsto & KN{}^tK \end{array}$ (bien à valeurs dans S)

Alors Ψ_K est un difféo (d'inverse $\Psi_{K^{-1}}$), et

$\Psi_K(X_p) = X_p$ car Ψ_p préserve le rang et

$N^2 = N \implies (KNK^{-1})^2 = KNK^{-1}$.

Ainsi, si on montre que X_p est une sous-variété au voisinage de J_p, alors ce sera valable au voisinage du projecteur $M = KJ_pK^{-1}$.



<u>Étape 2</u> : Etude locale au voisinage de J_p.

Soit $H = \begin{array}{c} \overset{p}{\longleftrightarrow} \\ \begin{pmatrix} H_1 & H_2 \\ {}^tH_2 & H_4 \end{pmatrix} \end{array} \updownarrow p$, avec ${}^tH_1 = H_1$ et ${}^tH_4 = H_4$.

Condition sur $H \in S$ pour que $J_p + H \in X_p$?

$\rightarrow$ Pour H petit, $\|H_1\| < 1$ d'où $I_p + H_1$ inversible.

Donc, dès que $\|H_1\| < 1$, $Rg(J_p + H) \geq p$.

La première condition est donc que le rang soit exactement égal à p. Comme la matrice $(I_p + H_1, H_2)$ est de rang p, avec $J_p + H_1$ inversible, ceci implique qu'il existe $A \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{R})$ tq $H_2 = (I_p + H_1).A$.

Bien sûr, $A = (I_p + H_1)^{-1}.H_2$.

Si on veut que tout $J_p + H$ soit de rang p, il faut et il suffit d'imposer la même condition sur la deuxième ligne de blocs : $H_4 = {}^tH_2 \cdot A = {}^tH_2 (I_p + H_1)^{-1} \cdot H_2$.
(noter que ${}^tH_1 = H_1 \Rightarrow {}^tH_4 = H_4$ dans ce cas).

Ainsi, pour $\|H_1\| < 1$, on a :

$$\mathrm{Rg}(J_p + H) = p \iff H_4 = {}^tH_2 (I_p + H_1)^{-1} \cdot H_2 .$$

Reste à déterminer une CNS sur H_1 et H_2 pour que $J_p + H$ soit, en plus, un projecteur. On calcule simplement $\Phi(J_p + H)$:

$$\begin{pmatrix} H_1^2 + H_1 + H_2\,{}^tH_2 & H_1H_2 + H_2H_4 \\ {}^tH_2H_1 + H_4\,{}^tH_2 & H_4^2 - H_4 + {}^tH_2H_2 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} H_1^2 + H_1 + H_2\,{}^tH_2 & H_1H_2 + H_2\,{}^tH_2 (I_p + H_1)^{-1} H_2 \\ {}^tH_2H_1 + {}^tH_2 (I_p + H_1)^{-1} H_2\,{}^tH_2 & * \end{pmatrix}$$

où $* = {}^tH_2H_2 + {}^tH_2 (I_p + H_1)^{-1} H_2\,{}^tH_2 (I_p + H_1)^{-1} H_2 - {}^tH_2 (I_p + H_1)^{-1} H_2$.

Cette matrice est nulle ssi $H_1^2 + H_1 + H_2\,{}^tH_2 = 0$. En effet, ceci est clairement nécessaire, et si on suppose que $H_2\,{}^tH_2 = -H_1^2 - H_1 = -H_1(I_p + H_1)$, alors il suit :

$$H_1H_2 + {}^tH_2H_2 (I_p + H_1)^{-1} H_2 = H_1H_2 - H_1H_2 = 0$$
$${}^tH_2H_1 + {}^tH_2 (I_p + H_1)^{-1}\,{}^tH_2H_2 = {}^tH_2H_1 - {}^tH_2H_1 = 0$$

$$* = {}^tH_2 H_2 - {}^tH_2 H_1 (I_p + H_1)^{-1} H_2 - {}^tH_2 (I_p + H_1)^{-1} H_2 .$$

$$= {}^tH_2 \left(I_p - H_1 (I_p + H_1^{-1}) - (I_p + H_1)^{-1} \right) H_2$$

$$= {}^tH_2 \left(I_p - (H_1 + I_p)(I_p + H_1)^{-1} \right) H_2 = 0 .$$

<u>CCL</u> : Pour $\|H_1\| < 1$, $J_p + \begin{pmatrix} H_1 & H_2 \\ {}^tH_2 & H_4 \end{pmatrix} \in X_p$ ssi

$$\begin{cases} H_4 = {}^tH_2 (I_p + H_1)^{-1} H_2 \\ H_2 {}^tH_2 + H_1 + H_1^2 = 0 . \end{cases}$$

Si on vérifie que les matrices $H \in S$ vérifiant ces cond. forment une sous variété de S, on aura conclu.

La question est de voir si les couples (H_1, H_2) avec $H_1 \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ symétrique et $H_2 \in \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{R})$ tels que $H_2 {}^tH_2 + H_1 + H_1^2 = 0$ forment au voisinage de $(0,0)$ une sous-variété de $S_p(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n-p}(\mathbb{R})$.

Soit $\Psi : (H_1, H_2) \mapsto H_2 {}^tH_2 + H_1^2 + H_1 \in S_p(\mathbb{R})$

symétriques $p \times p$

Différentielle de Ψ en $(0,0)$:

$$d_{(0,0)}\Psi (H_1, H_2) = H_1 \rightsquigarrow \text{surjective.}$$

Donc Ψ est une submersion au vois. de $(0,0)$.

Soit $V = \{ (H_1, H_2) : \Psi(H_1, H_2) = 0 , \ H_1, H_2 \text{ petits} \}$

Alors V est une sous-variété de $S_p(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{p,n-p}(\mathbb{R})$, de dimension $p(n-p) =: N$

Soit $\mathcal{V}$ un voisinage de 0 dans $\mathbb{R}^N$ et $f : \mathcal{V} \to S_p \times \mathcal{M}_{n-p}$ une immersion telle que $f(\mathcal{V}) = V$.

On écrit $f = (f_1, f_2)$ et on a alors un voisinage $\mathcal{U}$ de J_p dans S tel que

$$\mathcal{U} \cap X_p = J_p + \left\{ \begin{pmatrix} f_1(v) & f_2(v) \\ {}^t f_2(v) & {}^t f_2(v)\left(I_p + f_1(v)\right) f_2(v) \end{pmatrix}, v \in \mathcal{V} \right\}$$

L'application $v \mapsto \begin{pmatrix} f_1(v) & f_2(v) \\ {}^t f_2(v) & {}^t f_2(v)\left(I_p + f_1(v)\right) f_2(v) \end{pmatrix}$ étant une immersion,

on en déduit que X_p est une sous-variété au vois. de J_p, ce qui conclut.