Exercice 1. (Manuscrit)

Exercice 2. (Manuscrit)

Exercice 3. (Manuscrit)

Exercice 4. (Manuscrit)

Exercice 5. Soit $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid 4x^2 + 9y^2 = 1\}$.

1. On note que $E = \{\phi = 0\}$, où $\phi(x, y) = 4x^2 + 9y^2 - 1$. Le gradient de ϕ est donné par
$$\nabla\phi(x, y) = \begin{pmatrix} 8x \\ 18y \end{pmatrix}$$
et on voit que $\nabla\phi(x, y) = 0$ ssi $(x, y) = (0, 0)$. Comme $0 \notin E$, on déduit que $\nabla\phi \neq 0$ au voisinage de E, ce qui montre que ϕ est une submersion au voisinage de E et donc que E est une sous-variété de codimension 1 de $\mathbb{R}^2$, *i.e.* une courbe (fermée). C'est une ellipse.
2. Comme g est continue, il suffit d'observer que E est compact pour avoir existence de min et de max. Comme E est défini par $\phi = 0$, et comme ϕ est continue, on déduit que E est fermé. Si $(x, y) \in E$, alors $|x| \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{4x^2 + 9y^2} \leqslant \frac{1}{2}$ et de même $|y| \leqslant \frac{1}{3}$. Ainsi, $\|(x, y)\|_\infty \leqslant \frac{1}{2}$, et donc E est borné.
3. On commence par déterminer les points critiques de g sur E. Par le théorème des extrema liés, si $(x, y) \in E$ est un point critique de g, alors $\nabla g(x, y)$ est colinéaire à $\nabla\phi(x, y)$. On en déduit que $(x, y) \in E$ est un point critique de g ssi
$$\begin{vmatrix} 8x & -6x \\ 18y & 8y \end{vmatrix} = 0 \iff xy = 0.$$
D'où les quatre points critiques : $(\pm\frac{1}{2}, 0)$ et $(0, \pm\frac{1}{3})$. Le min et le max de g sont atteints en l'un de ces points. Il suffit de calculer la valeur de g : $g(\pm\frac{1}{2}, 0) = -\frac{3}{4}$ et $g(0, \pm\frac{1}{3}) = \frac{4}{9}$.
Conclusion : $\max_E g = \frac{4}{9}$ et $\min_E g = -\frac{3}{4}$. Il y a deux antécédents pour ces deux extrema, situés à l'intersection de l'ellipse et de ses grands axes.

Exercice 6.
1. Ici, A est la sphère centrée en 0 et de rayon $\sqrt{2}$, c'est donc une variété compacte et la fonction f est une forme linéaire (donc continue), elle admet donc un min et un max sur A.
En un point critique de $f|_A$, on sait que ∇f doit être proportionnel au gradient de la fonction qui définit A, ce qui se traduit par
$$\exists\lambda \in \mathbb{R} \ : \ (x, y, z) = \lambda(1, -1, 1).$$
Comme le point doit être sur la sphère, on obtient les deux points critiques (antipodaux) : $\pm\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}(1, -1, 1)$. Comme précédemment, il suffit d'évaluer f sur ces deux points pour déduire la valeur du min et du max (qui existent). On obtient alors $\min f = -\sqrt{6}$ et $\max f = \sqrt{6}$.
2. Ici encore, on reconnaît directement l'équation du cercle unité de $\mathbb{R}^2$, qui est bien-sûr une sous-variété compacte. Le gradient de la fonction qui définit A est $2(x, y)$. Par continuité de f, on a existence d'un min et d'un max sur A. On détermine d'abord les points critiques de $f|_A$.
Un point $(x, y) \in A$ est un point critique si $\nabla f(x, y) = (4x^3 - 2x, 4y^3 - 2y)$ est colinéaire à (x, y), ce qui se traduit analytiquement par
$$\begin{vmatrix} x & 4x^3 - 2x \\ y & 4y^3 - 2y \end{vmatrix} = 0 \iff 2xy(2y^2 - 1 - (2x^2 - 1)) = 0 \iff xy(x + y)(y - x) = 0$$

Ainsi, $(x,y) \in A$ est un point critique s'il vérifie la condition supplémentaire $x = 0$ ou $y = 0$ ou $x = y$ ou $x = -y$, ce qui nous donne les points $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$, $(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{\sqrt{2}}{2})$. Il nous reste à évaluer f sur eux et ne garder que les valeurs extrêmes.

On note que f est insensible aux signes et symétrique en (x, y), on peut se contenter des points où $x \geqslant y \geqslant 0$: $f(1,0) = 1$, $f(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}) = 1/4 + 1/4 = 1/2$. Le max vaut donc 1 et le min $1/2$.

3. Ici, A est une ellipse et le gradient de la fonction qui la définit est $(2x, 4y)$. Par compacité, f admet un min et un max. Cherchons les points critiques. On a $\nabla f(x,y) = (y\cos(xy), x\cos(xy))$, et donc $(x, y) \in A$ est un point critique s'il vérifie

$$\begin{vmatrix} x & y\cos(xy) \\ 2y & x\cos(xy) \end{vmatrix} = 0 \iff \cos(xy)(x^2 - 2y^2) = 0.$$

Puisque $x^2 + 2y^2 = 1$, nécessairement $|x| \leqslant 1$ et $|y| \leqslant 1$, et donc $|xy| \leqslant 1$. Comme $\cos > 0$ sur $[-1, 1]$, on en déduit que $(x, y) \in A$ est un point critique ssi $x = \pm\sqrt{2}y$. On obtient donc 4 points sur l'ellipse : $(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}, \pm\frac{1}{2})$. Le produit xy vaut donc $\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$. Ainsi, $\min_A f = -\sin(\frac{\sqrt{2}}{4})$ et $\max_A f = \sin(\frac{\sqrt{2}}{4})$.

4. Soit $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $\phi(x,y,z) = (x^2 - y^2 - 1, 2x + z - 1)$. On veut vérifier que c'est une submersion au voisinage de tout point de A. Sa matrice jacobienne est donnée par

$$\mathrm{J}_\phi(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & -2y & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

En considérant ses mineurs d'ordre 2, on voit qu'elle est de rang $\leqslant 1$ ssi $x = y = 0$. Comme $0 \notin A$, il en découle que J_ϕ est de rang 2 au voisinage de tout point de A, ce qui montre que ϕ est une submersion au voisinage de tout point de A. Donc, A est une sous-variété fermée de $\mathbb{R}^3$ de codimension 2, *i.e* une courbe.

Cherchons les points critiques de $f|_A$. On a $\nabla f(x,y,z) = (1,1,1)$. La condition des extrema liés se traduit ici par

$$\begin{vmatrix} 2x & -2y & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

En effet, en notant $\phi = (\phi_1, \phi_2)$, les lignes de ce déterminant sont les coordonnées dans la base canonique de $\nabla\phi_1$, $\nabla\phi_2$ et ∇f, et comme $\nabla\phi_1$ et $\nabla\phi_2$ sont linéairement indépendants en tout point de A, le déterminant est nul ssi $\nabla f \in \mathrm{Vect}(\nabla\phi_1, \nabla\phi_2)$.

Ainsi, $(x, y, z) \in A$ est un point critique de $f|_A$ ssi

$$-2y - 2x + 4y = 0 \iff x = y.$$

Or si $x = y$, alors le point ne peut appartenir à A puisqu'il doit vérifier $x^2 - y^2 = 1$. Ceci montre donc que f n'a aucun point critique sur A, et *a fortiori* aucun extremum (noter que A n'est pas compact).

Exercice 7. 1.

2. Il s'agit de minimiser la fonction distance $(p_1, p_2) \in C_1 \times C_2 \mapsto d(p_1, p_2)$, où C_1 désigne la parabole $y = x^2$ et C_2 la droite $x - y = 2$. On voit $C_1 \times C_2$ comme un sous-ensemble V de $\mathbb{R}^4$ défini par

$$V = \{(x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^4 \ : \ y_1 = x_1^2 \text{ et } x_2 - y_2 = 2\}.$$

Soit $\phi : (x_1, y_1, x_2, y_2) \in \mathbb{R}^4 \mapsto (x_1^2 - y_1, x_2 - y_2 - 2) \in \mathbb{R}^2$. Vérifions que ϕ est une submersion au voisinage de V. La jacobienne est donnée par

$$\mathrm{J}_\phi(x_1, y_1, x_2, y_2) = \begin{pmatrix} 2x_1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice est partout de rang 2 ce qui montre que ϕ est une submersion sur tout $\mathbb{R}^4$. Ainsi, V est une sous-variété de dimension 2 de $\mathbb{R}^4$. Minimiser $d(p_1, p_2)$ revient à minimiser $d(p_1, p_2)^2$, on prend alors $f : V \to \mathbb{R}$ définie par $f(x_1, y_1, x_2, y_2) = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$ et on cherche ses points critiques. On a $\nabla f(x_1, y_1, x_2, y_2) = (2(x_1 - x_2), 2(y_1 - y_2), 2(x_2 - x_1), 2(y_2 - y_1))$ et donc $(x_1, y_1, x_2, y_2) \in V$ est un point critique de $f|_V$ ssi il existe $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ tels que

$$\begin{cases} x_1 - x_2 & = 2\lambda x_1 \\ y_1 - y_2 & = -\lambda \\ x_2 - x_1 & = \mu \\ y_2 - y_1 & = -\mu \end{cases}$$

On raisonne par condition nécessaire : si $(x_1, y_1, x_2, y_2) \in V$ convient, alors forcément $x_2 - x_1 = y_1 - y_2$ et $\lambda = -\mu$. On a $x_1 - x_2 = 2\lambda x_1 = -2x_1(y_1 - y_2) = -2x_1(x_2 - x_1)$. D'où $x_1 - x_2 = 2x_1(x_1 - x_2)$. De plus, nécessairement $x_1 - x_2 \neq 0$ car sinon $\lambda = \mu = y_1 - y_2 = 0$, et on devrait avoir $x_1^2 - x_1 + 2 = 0$, ce qui est exclus. Ainsi, on tire $x_1 = \frac{1}{2}$, d'où $x_2 = x_1 + y_1 - y_2 = x_1 + x_1^2 - x_2 + 2 = -x_2 + \frac{11}{4}$, et donc $x_2 = \frac{11}{8}$.

Ainsi, l'unique possibilité pour un point critique est $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{11}{8}, -\frac{5}{8})$, avec $-\lambda = \mu = \frac{7}{8}$, et on vérifie immédiatement qu'il convient. On a donc un unique point critique.

Pour conclure que f y atteint un minimum, il suffit d'un argument assurant l'existence d'un minimum. Ici V n'est pas compacte. On va prouver que f est propre, c'est à dire $f^{-1}(K) \subset V$ est borné pour toute partie bornée $K \subset \mathbb{R}$. Supposons que $(x_1, y_1, x_2, y_2) \in V$ avec $(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 = (x_1 - x_2)^2 + (x_1^2 + 2 - x_2)^2 \leqslant M^2$, $M > 0$. Alors $|x_1 - x_2| \leqslant M$ et $|x_1^2 - x_1 + (x_1 - x_2) + 2| \leqslant M$, d'où $|x_1^2 - x_1| \leqslant 2M + 2$. Une rapide étude de fonction montre que ceci implique $|x_1| \leqslant (1 + \sqrt{1 + 8(M+1)})/2 =: M'$, dès que $M \geqslant 1/4$. D'où $|x_2| \leqslant |x_1| + M \leqslant M' + M$. Pour finir, $|y_1| = x_1^2 \leqslant (M')^2$ et $|y_2| = |2 - x_2| \leqslant 2 + M' + M$. En prenant M'' le max de ces trois constantes, on voit que

$$\forall (p_1, p_2) \in V,\ f(p_1, p_2) \leqslant M \Rightarrow \|p_1\| \leqslant M'' \text{ et } \|p_2\| \leqslant M''.$$

En conclusion, soit $x_0 \in V$ quelconque et soit $M := f(x_0)$. Ce qui précède montre qu'il existe M'' tel que pour tout $x \in V$ tel que $\|x\| \geqslant M''$, on a $f(x) \geqslant M$. Par conséquent, un minimum de f sur $V \cap \overline{B}(0, M'')$ (qui existe par compacité) est nécessairement un minimum de f sur V, ce qui conclut. (noter que ceci s'observe assez intuitivement sur un dessin)

3. Soit $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + (y-1)^2 + z^2 = 1\}$ et $f(p) = \|(x, y, z-2)\|^2 = x^2 + y^2 + (z-2)^2$, pour $p = (x, y, z)$. Par compacité de S, $f : S \to \mathbb{R}$ admet un minimum et un maximum. Cherchons d'abord ses points critiques.

   On calcule $\nabla f(p) = (2x, 2y, 2(z-2))$, et le gradient de la fonction définissant S est $(2x, 2(y-1), 2z)$. Ainsi, $p \in S$ est un point critique de f s'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\begin{cases} x & = \lambda x \\ y & = \lambda(y-1) \\ z - 2 & = \lambda z \end{cases}$$

   On raisonne toujours par conditions nécessaires. Si (x, y, z) et λ conviennent, alors $x = 0$ parce que sinon on aurait $\lambda = 1$, amenant une contradiction. On peut donc oublier la première équation, et l'existence d'un tel λ revient à imposer

$$\begin{vmatrix} y & y-1 \\ z-2 & z \end{vmatrix} = 0,$$

   soit $yz - (y-1)(z-2) = 0 \iff 2y + z - 2 = 0$. Les points critiques de f se situent donc sur la droite d'équations

$$\begin{cases} x = 0 \\ 2y + z - 2 = 0. \end{cases}$$

Déterminons l'intersection de cette droite avec S. Comme elle se situe dans le plan $x = 0$, on se ramène à

$$\begin{cases} (y-1)^2 + z^2 & = 1 \\ 2y + z - 2 & = 0. \end{cases}$$

On élimine z, et y doit alors vérifier $5(y-1)^2 = 1$, d'où $y = 1 \pm \frac{1}{\sqrt{5}}$.

Finalement, on trouve deux points critiques pour f sur S : $p_1 = (0, 1 + 1/\sqrt{5}, -2/\sqrt{5})$ et $p_2 = (0, 1 - 1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5})$. Comme la fonction f n'est pas constante sur S, elle atteint nécessairement son min et son max en deux points distincts, qui sont forcément les deux points critiques qu'on vient de trouver. Il suffit alors d'évaluer f sur ces deux points pour avoir les valeurs numériques.

4. Soit $C \subset \mathbb{R}^2$ la courbe d'équation $x^6 + y^6 = 1$. C'est la sphère unité pour la norme 6. La distance (euclidienne) à l'origine est $\sqrt{x^2 + y^2}$, il faut donc minimiser $f(x, y) = x^2 + y^2$ sur C. On cherche les points critiques : on voit que $(x, y) \in C$ est un point critique de f ssi

$$\begin{vmatrix} x^5 & y^5 \\ x & y \end{vmatrix} = 0 \iff xy(x^4 - y^4) = 0 \iff xy(x-y)(x+y) = 0,$$

car $(x, y) \neq (0, 0)$. On obtient alors 8 points critiques intersections des 4 droites ci-dessus avec C :

$$(\pm 1, 0),\ (0, \pm 1),\ \left(\pm \frac{1}{\sqrt[6]{2}}, \pm \frac{1}{\sqrt[6]{2}}\right).$$

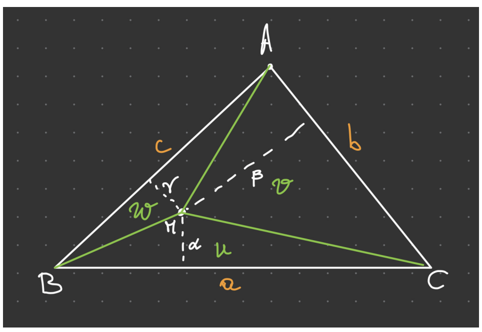
On évalue f sur ces points, et on trouve deux valeurs. D'où $\min_C f = 1$ et $\max_C f = \frac{2}{\sqrt[3]{2}} = 2^{2/3}$. En n'oubliant pas d'extraire la racine carrée, la distance minimale à l'origine est 1, atteinte aux points $(\pm 1, 0)$, $(0, \pm 1)$ et la distance maximale est $\sqrt[3]{2}$, atteinte sur les autres points.

Exercice 8. On veut minimiser la surface du cylindre à volume constant. On note $r > 0$ le rayon de la base et $h > 0$ la hauteur. On veut minimiser la fonction $f(r, h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h$ sur l'ensemble contrainte $V = \{(r, h) \in]0, \infty[^2 \mid \pi r^2 h = 1\} \subset \mathbb{R}^2$. Soit $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $\phi(r, h) = \pi r^2 h - 1$. Alors $\nabla \phi(r, h) = (2\pi r h, \pi r^2)$ est non nul pour $r > 0$, et donc ϕ est une submersion au voisinage de V, montrant que V est une courbe fermée de $\mathbb{R}^2$. On cherche les points critiques de f : on a $\nabla f(r, h) = (4\pi r + 2\pi h, 2\pi r)$ et donc $(r, h) \in V$ est un point critique de f ssi

$$\begin{vmatrix} 2r + h & 1 \\ 2h & 1 \end{vmatrix} = 0 \iff 2r + h - 2h = 2r - h = 0.$$

Comme $(h, r) \in V$, on obtient $2\pi r^3 = 1$, *i.e.* $r = 1/\sqrt[3]{2\pi}$ et $h = 2r$. Il reste à voir que f admet un minimum, le plus direct est de se ramener à une seule variable : V est en fait le graphe de l'application $r \mapsto 1/\pi r^2$, et l'étude de f se ramène à celle de $g(r) = f(r, 1/\pi r^2) = 2\pi r^2 + 2/r$. On voit que g tend vers $+\infty$ en 0^+ et en $+\infty$, ce qui nous assure l'existence d'un minimum.

Exercice 9. On veut maximiser le produit $\alpha\beta\gamma$ pour M dans l'intérieur du triangle. On note que ce maximum existe puisque α, β, γ dépendent continûment de M, et peuvent être étendues sur le bord du triangle, où le produit est nul. La fonction $\alpha\beta\gamma$ admet donc un maximum sur le triangle plein (fermé) par compacité ; qui se situe nécessairement à l'intérieur.



1. On a $u = \frac{1}{2}\alpha a$, $v = \frac{1}{2}\beta b$ et $v = \frac{1}{2}\gamma c$. Ainsi, $\alpha\beta\gamma = 8uvw/abc =: f(u,v,w)$. Inversement, si $u, v, w > 0$ sont tels que $u + v + w = S$, alors en posant $x_1 = u/S$, $x_2 = v/S$ et $x_3 = w/S$ prenons pour M le barycentre de (A, x_1), (B, x_2) et (C, x_3). Alors les aires des triangles BMC, AMC et AMB sont u, v et w respectivement. Vérifions le par exemple pour BMC : par construction $\overrightarrow{BM} = x_1\overrightarrow{BA} + x_3\overrightarrow{BC}$, et donc
$$\det(\overrightarrow{BM}, \overrightarrow{BC}) = x_1 \det(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{BC}),$$
et donc l'aire de BMC vaut $x_1 S = u$. De même pour les deux autres. En d'autres termes, $(u/S, v/S, w/S)$ sont les coordonnées barycentriques de M dans la base affine (A, B, C) du plan.
Ainsi, maximiser le produit $\alpha\beta\gamma$ revient à maximiser $f(u, v, w)$.
2. Cette interprétation géométrique nous permet en outre de voir que f admet (au moins) un maximum dans $V = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \,|u, v, w > 0 \text{ et } u+v+w = S\}$. Au voisinage de chacun de ses points, V est une variété définie par la fonction $u + v + w - S$, de gradient $(1, 1, 1)$. Un point critique de f sur V vérifie donc $\nabla f(u, v, w) \in \mathbb{R}(1, 1, 1)$, ce qui est équivalent à $uv = uw = vw$, *i.e.* $u = v = w = S/3$ car ils sont non-nuls. Ceci montre que f admet un unique point critique $(S/3, S/3, S/3)$ qui est nécessairement l'unique maximum de f sur V. Les coordonnées barycentriques du point correspondant sont $(1/3, 1/3, 1/3)$, il s'agit donc de l'isobarycentre.

Exercice 10.