Exo 1 : $F(x,y) = \exp(x-y) - 1 - x - y$ définie et C^∞ sur $\mathbb{R}^2$.

1. On calcule $\frac{\partial F}{\partial y} = -\exp(x-y) - 1$

Par le thm des fonctions implicites, comme $\frac{\partial F}{\partial y}(0,0) \neq 0$, il existe $\phi :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}$, où $\varepsilon > 0$, ϕ C^∞, $\phi(0) = 0$, telle que $\forall |x| < \varepsilon$, $F(x, \phi(x)) = 0$.

2. Par composition, $\{x \mapsto F(x, \phi(x))\}$ est dérivable sur $]-\varepsilon, \varepsilon[$ de dérivée $\frac{\partial F}{\partial x}(x, \phi(x)) + \phi'(x) \frac{\partial F}{\partial y}(x, \phi(x))$.

Cette expression est donc $\equiv 0$. D'où en $x = 0$:

$$\underbrace{\frac{\partial F}{\partial x}(0,0)}_{=0} + \phi'(0) \underbrace{\frac{\partial F}{\partial y}(0,0)}_{\neq 0} = 0 \implies \phi'(0) = 0.$$

La formule de Taylor nous donne à l'ordre 2 : $\phi(x) = \frac{\phi''(0)}{2} x^2 + o(x^2)$

i.e. $\phi(x)/x^2 \xrightarrow[x \to 0]{} \phi''(0)/2$. On dérive donc une seconde fois :

$$0 = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, \phi(x)) + \phi'(x) \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, \phi(x)) + \phi''(x) \frac{\partial F}{\partial y}(x, \phi(x))$$

$$+ \phi'(x) \times [\ldots]$$

En évaluant à $x = 0$:

$$0 = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(0,0) + \phi''(0) \frac{\partial F}{\partial y}(0,0).$$

$\dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \exp(x-y)$, d'où $\phi''(0) = \dfrac{1}{2}$ et donc

$$\frac{\phi(x)}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{4}.$$

<u>Autre méthode</u> : Partant de $\phi'(0) = 0$, on sait que $\phi(x) = o(x)$. Comme $F(x, \phi(x)) = 0$, on déduit :

$$\phi(x) = e^{x-\phi(x)} - 1 - x$$

$$= 1 + (x - \phi(x)) + \frac{1}{2}(x-\phi(x))^2 - 1 - x + \underbrace{o((x-\phi(x))^2)}_{=o(x^2)}$$

Soit : $2\,\phi(x) = \dfrac{1}{2}x^2 \underbrace{- x\,\phi(x)}_{=o(x^2)} + \underbrace{\dfrac{1}{2}\phi(x)^2}_{=o(x^2)} + o(x^2)$

D'où $\phi(x) = \dfrac{1}{4}x^2 + o(x^2)$, comme attendu.

<u>Ex2</u>. $f(x,y) = x^3 + y^3 + x^2 + y^2 + y$, $f(0,0) = 0$

1. $\partial_y f(0,0) = 1 \neq 0$, il existe donc $\phi :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}$ C^∞, avec $\phi(0) = 0$, telle que $f(t, \phi(t)) = 0$, pour $|t| < \varepsilon$

2. On commence par dériver $f(t, \phi(t)) = 0$:

$$\partial_x f(t, \phi(t)) + \phi'(t)\,\partial_y f(t, \phi(t)) = 0$$

<u>$t=0$</u> : $\underbrace{\partial_x f(0,0)}_{=0} + \phi'(0)\,\underbrace{\partial_y f(0,0)}_{\neq 0} = 0$

D'où $\phi'(0) = 0$, et donc $\phi(t) = o(t)$.

Comme $f(t, \phi(t)) = 0$, on a :

$$\phi(t) = -t^2 - \phi(t)^2 - t^3 - \phi(t)^3 \quad \forall |t| < \varepsilon.$$

Comme $\phi(t) = o(t)$, $\phi(t)^2 = o(t^2)$ et $\phi(t)^3 = o(t^3)$.

Ainsi, $\phi(t) = -t^2 + o(t^2)$.

Et on recommence :

$$\phi(t) = -t^2 - \underbrace{\left(-t^2 + o(t^2)\right)^2}_{= o(t^3)} - t^3 - \underbrace{\left(-t^2 + o(t^2)\right)^3}_{= o(t^3)}$$

$$\phi(t) = -t^2 - t^3 + o(t^3).$$

Ex 3 : Soit $\phi : \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{r}\mathbb{R}^2\left[\right.\\ \mathbb{R}\left[\right.\end{array}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} (1 + x + y)\cos z + x^3 - 1 \\ x - y - z \end{pmatrix}$$

On note que $\phi(0,0,0) = (0,0)$. Il suffit de vérifier que la différentielle partielle selon (x,y) en $(0,0,0)$ est inversible. Elle a pour matrice :

$$\begin{pmatrix} \partial_x \phi_1(0) & \partial_y \phi_1(0) \\ \partial_x \phi_2(0) & \partial_y \phi_2(0) \end{pmatrix} \quad \text{où} \quad \phi = (\phi_1, \phi_2)$$

$$= \left.\begin{pmatrix} \cos z + 3x^2 & \cos z \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\right|_{x=y=z=0} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$$

Le thm des fonctions implicites nous donne donc une application diff. $\Psi :]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^2$, avec $\varepsilon > 0$, tq $\phi(0) = 0$.

$$\forall |z| < \varepsilon, \quad \phi(\Psi(z), z) = 0.$$

On écrit $\Psi(z) = (x(z), y(z))$. En dérivant la relation précédente, on obtient : $x'(0)\underbrace{\partial_x \phi(0)}_{= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} + y'(0)\underbrace{\partial_y \phi(0)}_{= \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}} + \underbrace{\partial_z \phi(0)}_{= \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}} = 0$.

D'où : $\begin{cases} x'(0) + y'(0) = 0 \\ x'(0) - y'(0) = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x'(0) = 1/2 \\ y'(0) = -1/2 \end{cases}$.

<u>Ex 4</u> : Soit $f : U \subset \mathbb{R}^n \to E \times F$, $f = (f_1, f_2)$ avec $\begin{cases} f_1 : U \to E \\ f_2 : U \to F \end{cases}$

Supposons que f_1 est une immersion. Mq f aussi.

Pour tout $x \in U$, et tout $h \in \mathbb{R}^n$,

$$d_x f \cdot h = (d_x f_1 \cdot h, d_x f_2 \cdot h) \in E \times F.$$

Ainsi $d_x f \cdot h = 0 \Rightarrow d_x f_1 \cdot h = 0 \Rightarrow h = 0$ par injectivité de $d_x f_1$.

D'où l'injectivité de $d_x f$.

<u>Ex 5</u> : $f : U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, C^∞.

1. f est une submersion en $x \in U$ ssi $d_x f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est surjective. Or $d_x f$ est une forme linéaire sur $\mathbb{R}^n$, elle est surjective ssi elle est non nulle.

2. Soit $f(x, y) = 2xy - y^3$. Alors $J_f(x, y) = (2y, 2x - 3y^2)$

$$J_f(x, y) = 0 \iff \begin{cases} 2y = 0 \\ 2x - y^3 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

f est donc une submersion en tout point de $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$.

3. Ici, $f(x_1, \dots, x_n) = x_1^2 + \dots + x_n^2$. Sa jacobienne est

$$J_f(x_1, \dots, x_n) = (2x_1, \dots, 2x_n)$$

Ainsi, $J_f(x) \neq 0$ ssi $x \neq 0$.

4. Par définition, $q(x) = b(x,x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

$\forall x, h \in \mathbb{R}^n$, $q(x+h) = q(x) + 2b(x,h) + q(h)$.

Par bilinéarité et continuité de b, on a $|q(h)| \leq C \cdot \|h\|^2$.

D'où $q(h) = o(h)$ et donc $d_x q\, h = 2b(x,h)$.

NB : On retrouve le résultat précédent dans le cas où $q(x) = x_1^2 + \dots + x_n^2$.

Maintenant, $d_x q = 0$ ssi $\forall h \in \mathbb{R}^n$ $d_x q\, h = 0$

ssi $\forall h \in \mathbb{R}^n$, $b(x,h) = 0$

ssi $x = 0$ car b est non dégénérée.

Ex 6. $P \in \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$, $P : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$

$$\underbrace{(z_1 \dots z_n)}_{z} \mapsto P(z_1, \dots, z_n)$$

$$\partial_z P = \left(\frac{\partial P}{\partial z_1}(z), \dots, \frac{\partial P}{\partial z_n}(z) \right) \in \mathbb{C}^n.$$

La différentielle en z de P, en tant que fonction $P : \mathbb{R}^{2n} \to \mathbb{R}^2$, est a priori une application $\mathbb{R}$-linéaire : $d_z P : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$.

$$\underline{Q} : \quad d_z P(u_1, \dots, u_n) \overset{?}{=} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial P}{\partial z_k}(z) \cdot u_k$$

pour $(u_1, \dots, u_n) \in \mathbb{C}^n$.

Les deux membres sont $\mathbb{R}$-linéaires, il suffit de tester l'identité sur une $\mathbb{R}$-base de $\mathbb{C}^n$.

Comme $u_k \in \mathbb{C} \longmapsto P(z_1, \dots, z_k + u_k, \dots, z_n)$ est polynomiale en u_k, on a :

$$P(z_1, \dots, z_k + u_k, \dots, z_n) = P(Z) + \frac{\partial P}{\partial z_k}(Z) . u_k + o(u_k)$$

(formule de Taylor dans $\mathbb{C}[X]$)

d'une part, et d'autre part :

$$P(z_1, \dots, z_k + u_k, \dots, z_n) = P(Z) + d_Z P . (0, \dots, u_k, \dots, 0) + o(u_k)$$

D'où $d_Z P(0, \dots, u_k, \dots, 0) = \frac{\partial P}{\partial z_k}(Z) . u_k$, ce qui suffit à établir la formule par linéarité.

Supposons que $\partial_Z P \neq 0$. Alors $\exists k : \frac{\partial P}{\partial z_k}(Z) \neq 0$, d'où

$$d_Z P(0, \dots, u_k, \dots, 0) = \underbrace{\frac{\partial P}{\partial z_k}(Z)}_{\neq 0} . u_k, \quad \forall u_k \in \mathbb{C}$$

ce qui montre que $d_Z P : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ est surjective.
Inversement, si P est une submersion en Z, alors $\partial_Z P \neq 0$ car sinon $d_Z P = 0$ par la formule.

<u>Ex 7</u> : Soit $f : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}$ holomorphe (i.e. $\forall z_1, \dots, z_n \in \mathbb{C}$, $\forall k$, $\{ z \longmapsto f(z_1, \dots, \underset{k\text{ème}}{z}, \dots, z_n) \}$ est holomorphe)

Il suffit de vérifier la même formule qu'à l'ex. 6.
En d'autres termes, on veut m.q. $d_Z f$ est $\mathbb{C}$-linéaire.

Il suffit de le voir composante par composante :

$$d_Z f(0,\dots, i u_k, \dots, 0) \overset{?}{=} i\, d_Z f(0,\dots, u_k, \dots, 0)$$

Soit $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ la fonction $g(z) = f(z_1,\dots, z_k + z, \dots, z_n)$.

$\forall h \in \mathbb{C}, \quad d_0 g . h = d_Z f(0,\dots, h, \dots 0)$.

Comme g est holomorphe, $d_0 g(ih) = i\, d_0 g\, h \quad \forall h \in \mathbb{C}$.
D'où la $\mathbb{C}$-linéarité de $d_Z f$. Précisément,

$d_Z f(h_1,\dots, h_n) = \sum_{k=1}^{n} h_k\, d_Z f(0,\dots,1,\dots,0)$, pour $h_1 \dots h_n \in \mathbb{C}$

et $d_Z f(0,\dots,1,\dots 0) = \dfrac{\partial f}{\partial z_k}(Z)$. En effet

$$f(Z + h.e_k) - f(Z) = d_Z f(h.e_k) + o(h), \quad e_k = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

d'où $$\frac{f(Z + he_k) - f(Z)}{h} = d_Z f(e_k) + o(1).$$

<u>Ex 8</u> $V = \{ (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : z^2 - xy = 1 \}$.

Soit $\phi : (x,y,z) \mapsto z^2 - xy - 1$, de sorte que $V = \{\phi = 0\}$
ϕ est polynomiale, donc différentiable, et son gradient est

$$\nabla \phi = \begin{pmatrix} -y \\ -x \\ 2z \end{pmatrix}.$$

$\nabla\phi \neq 0$ sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, et comme $0 \notin V$, ceci mq
ϕ est une submersion au voisinage de tout point de V.

Par le théorème de forme normale des submersions, V est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$, de codimension 1.

L'espace tangent (affine) au point $v_0 = (x_0, y_0, z_0) \in V$ est dirigé par le plan vectoriel $\operatorname{Ker} d_{v_0}\Phi = \nabla\Phi(v_0)^\perp$, où l'orthogonal se réfère au produit scalaire standard de $\mathbb{R}^3$.

L'équation du plan tangent est donc :

$$-y_0(x-x_0) - x_0(y-y_0) + 2z_0(z-z_0) = 0.$$

Pour trouver les points de V les plus proches de l'origine, on minimise la fonction $f(v) = \|v\|^2 = x^2+y^2+z^2$, où $v = (x,y,z)$, sur V.

En un point critique de f, ∇f et $\nabla\Phi$ sont colinéaires. Comme $\nabla f = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}$, cette condition se traduit analytiquement par :

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -y \\ -x \\ 2z \end{pmatrix} = 0 \quad \text{(produit vectoriel nul)}$$

i.e. $\begin{cases} 2yz + xz = 0 \\ yz + 2xz = 0 \\ y^2 - x^2 = 0 \end{cases}$, avec la condition $z^2 - xy = 1$.

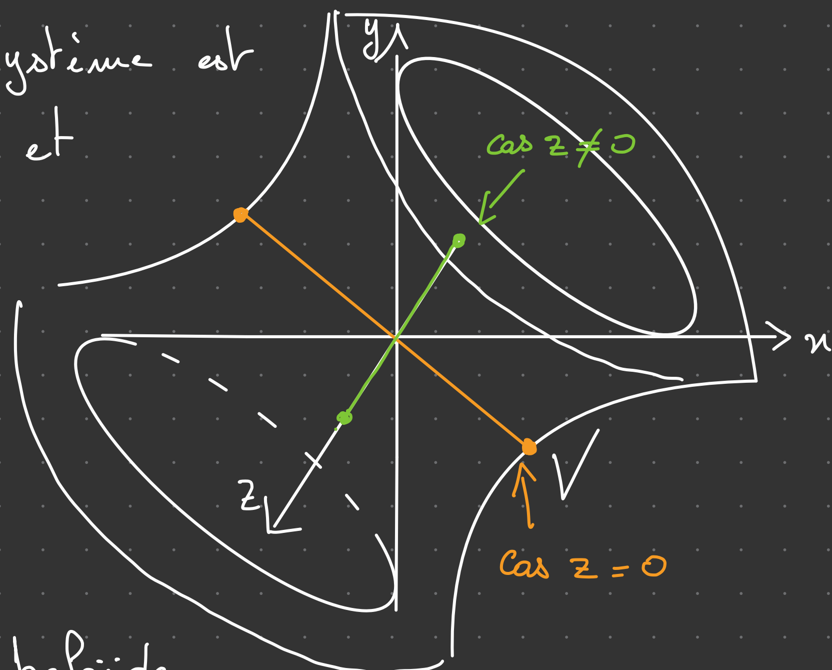
Si $z \neq 0$, les deux premières équations donnent :

$$2y + x = 0 \text{ et } y + 2x = 0 \iff x = y = 0,$$

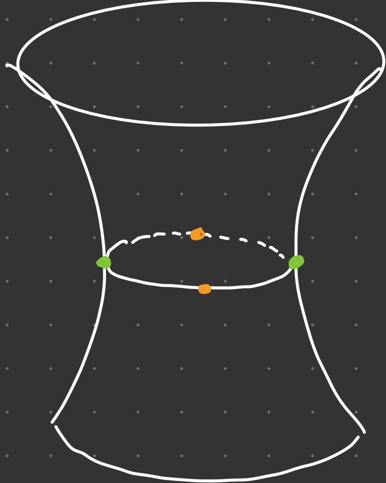
d'où $(x,y,z) = \pm(0,0,1)$

Si $z = 0$, alors le système est équivalent à $x = \pm y$ et comme $xy = -1$, on obtient :

$(x,y,z) = \pm(1,-1,0)$.



On obtient donc quatre candidats. <u>NB</u> : cet hyperboloïde n'est pas de révolution.



Il reste à argumenter que f <u>a</u> un minimum sur V.
On note que V est fermée, donc

$$K := V \cap \{(x,y,z) : x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$$

est compact (et non vide car contient $(0,0,\pm 1)$).

f admet donc (au moins) un minimum sur K, qui est forcément un minimum sur tout V. Un point de V où f réalise son minimum est un point critique. C'est donc au choix $(0,0,1)$ ou $(0,0,-1)$. Et le min $= 1$.

<u>Ex 9</u> : S sous-variété de $\mathbb{R}^n$, S' sous-variété de $\mathbb{R}^m$.
M.q. $S \times S' \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$ est une sous-variété.

Soit $(x,x') \in S \times S'$. Soit $k = \dim S$, $k' = \dim S'$. Il existe $U \ni x$, $U' \ni x'$ deux vois. ouverts de x et x', $\psi : U \to V$, $\psi' : U' \to V'$ deux difféo. sur des ouverts V et V' de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ respectivement tq $\psi(x) = 0$, $\psi'(x') = 0$ et

$$\psi(S \cap U) = \{(x_1, \dots, x_k, 0 \dots 0)\} \cap V$$

$$\psi'(S' \cap U') = \{(x_1, \dots, x_{k'}, 0 \dots, 0)\} \cap V'$$

Alors $U \times U'$ est un voisinage ouvert de (x,x') dans $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$,

$$\begin{aligned} \phi : U \times U' &\to V \times V' \\ (x, x') &\mapsto (\psi(x), \psi'(x')) \end{aligned}$$

est un difféo tq $\phi(x,x') = 0$ et

$$\phi((S \times S') \cap (U \times U')) = \psi(S \cap U) \times \psi(S' \cap U')$$

$$= \left(\{(x_1, \dots, x_k, 0 \dots 0)\} \cap V \right) \times \left(\{(x_1, \dots, x_{k'}, 0 \dots, 0)\} \cap V' \right)$$

$$= \underbrace{\{(x_1, \dots, x_k, 0 \dots 0, x_1, \dots, x_{k'}, 0 \dots 0)\}}_{\text{sous-espace de dim } k+k' \text{ de } \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m} \cap (V \times V').$$

D'où le résultat.

<u>Ex 10</u> . • $GL_n(\mathbb{R})$ est <u>ouvert</u> dans $M_n(\mathbb{R})$. C'est donc une sous-variété de dimension n^2. L'espace tangent est donc partout égal à $M_n(\mathbb{R})$.

• $SL_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) : \det M = 1\}$. On a vu que det est différentiable et qu'en toute A inversible,

$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $d_A(\det).H = \mathrm{Tr}(A^{-1}.H)$.

Ceci m.q. det est une submersion au voisinage de tout point de $SL_n(\mathbb{R})$, et donc que $SL_n(\mathbb{R})$ est une sous variété de dimension n^2-1 de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. L'espace tangent en $A \in SL_n(\mathbb{R})$ est $\mathrm{Ker}\, d_A(\det) = \{ H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \mathrm{Tr}(A^{-1}H) = 0 \}$

$$= \{ A.H,\ H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : \mathrm{Tr}\, H = 0 \}$$

- $O_n(\mathbb{R}) = \{ A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) : {}^tAA - I_n = 0 \}$.

  Soit $\phi : A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \mapsto {}^tAA - I_n \in \underbrace{\mathcal{S}_n(\mathbb{R})}_{\text{matrices symétriques}}$

$\forall A, H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$,

$$\phi(A+H) = \phi(A) + {}^tAH + {}^tHA + \underbrace{{}^tHH}_{=o(H)}$$

D'où ϕ différentiable en A et $d_A\phi.H = {}^tAH + {}^tHA$.

<u>Pb</u> : $d_A\phi$ surjective ? Soit $S \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})$. On cherche H telle que $\underbrace{{}^tAH + {}^tHA}_{= {}^tAH + {}^t({}^tAH)} = S$

Il suffit de prendre ${}^tAH = \frac{S}{2}$, i.e. $H = \frac{AS}{2}$ car $A\,{}^tA = I_n$.

Ainsi ϕ est une submersion au voisinage de tout point de $O_n(\mathbb{R})$ qui est donc une sous-variété de codimension $\dim \mathcal{S}_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n+1)}{2}$

d'où $\dim O_n(\mathbb{R}) = \frac{n(n-1)}{2}$

Enfin, l'espace tangent en A est $\operatorname{Ker} d_A\Phi$, soit :

$$\{H \in M_n(\mathbb{R}) : {}^tAH + {}^tHA = 0\}$$

$$= \{A.H,\ H \in M_n(\mathbb{R}) : {}^tH + H = 0\}$$

$$= A.\mathcal{A}_n(\mathbb{R}),$$ où $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ = espace des matrices antisymétriques.

<u>Ex 11</u> : Q forme quadratique non-dégénérée sur $\mathbb{R}^n$, de signe. (p,q), $p+q=n$. Soit $V = \{Q = 1\}$.

Différentielle de Q en x : soit $B : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ la forme polaire de Q (i.e. tq $Q(x) = B(x,x)$).

$$Q(x+h) = Q(x) + 2B(x,h) + Q(h).$$

Soit $$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \underbrace{x_1^2 + \dots + x_n^2}_{\text{noté } \|x\|^2} = 1\}.$$

Par continuité, Q est bornée sur S^{n-1}, mettons par $M > 0$.
On en déduit :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\},\ \left|Q\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right| \leq M$$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $|Q(x)| \leq M\|x\|^2$.
Ainsi, $Q(h) = o(h)$. Ceci nous donne que Q est différentiable en x et $\forall h \in \mathbb{R}^n$, $d_xQ.h = 2B(x,h)$.

Maintenant, Q non dégénérée signifie :

$$\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \ \exists h \in \mathbb{R}^n \mid B(x,h) \neq 0.$$

ou encore : $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \ d_x Q \neq 0.$

Q est donc une submersion au vois. de tout $x \neq 0$.
Comme $0 \notin V$, on en déduit que $V = \{Q = 1\}$ est une hypersurface de $\mathbb{R}^n$.

De plus, $\forall x \in V$, $T_x V = \mathrm{Ker}\, d_x Q$

$$= \{h \in \mathbb{R}^n : B(x,h) = 0\}$$

$= x^\perp$, où l'orthogonal est pris par rapport à B.

Ex : Si Q est déf. > 0, dans des coordonnées associées à une base orthonormée pour Q, $V = \mathbb{S}^{n-1}$ et on retrouve l'intuition :

Ex 12 : (i) Le fibré tangent de $\mathbb{S}^2$ est :

$$T\mathbb{S}^2 = \{(x,v) : x \in \mathbb{S}^2, v \in T_x \mathbb{S}^2\} \subset \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 = \mathbb{R}^6.$$

Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$. Alors $(x,y) \in T\mathbb{S}^2$ ~~ssi~~ $\|x\|^2 = 1$ et $\langle x, y\rangle = 0$, où $\langle x,y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$ et $\|x\|^2 = \langle x, x\rangle$.

Soit $\Phi : (x,y) \in \mathbb{R}^6 \longmapsto (\|x\|^2, \langle x,y\rangle) \in \mathbb{R}^2$.

Alors $TS^2 = \Phi^{-1}(\{(1,0)\})$. Calculons la jacobienne de Φ :

$$J_\Phi(x,y) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & y_3 & x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix}$$

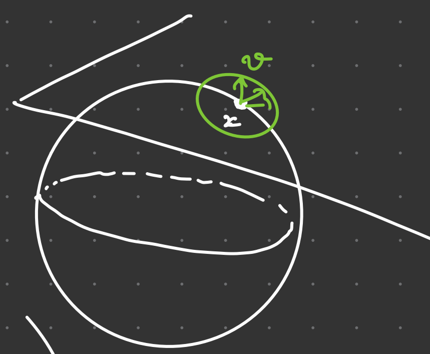
Si $(x,y) \in TS^2$, alors $\exists i$ tq $x_i \neq 0$. Disons $i=1$. Alors, le mineur encadré en orange vaut $2x_1^2 \neq 0$. Ainsi $J_\Phi(x,y)$ est de rang 2, donc surjective. (idem pour $i = 2$ ou 3).

Φ est donc une submersion au voisinage de tout point de TS^2, ce qui montre que TS^2 est une sous-variété de codimension 2 de $\mathbb{R}^6$.

(ii) Le fibré unitaire tangent de S^2 est :

$$T^1S^2 = \{(x,v) \in TS^2 : \|v\| = 1\}.$$

On définit de même



$$\Psi : (x,y) \mapsto (\|x\|^2, \langle x,y \rangle, \|y\|^2)$$

$$J_\Psi(x,y) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 2x_2 & 2x_3 & 0 & 0 & 0 \\ y_1 & y_2 & y_3 & x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 2y_1 & 2y_2 & 2y_3 \end{pmatrix}$$

On veut vérifier que cette matrice est de rang 3 en tout $(x,y) \in T^1S^2$. Les opérations sur les lignes et les colonnes ne changent pas le

rang, on se ramène à des matrices plus simples.
Quitte à permuter les colonnes, on peut supposer $x_1 \neq 0$ car $\|x\| = 1$. On divise $L_1/2$ et $L_3/2$. Puis on multiplie $x_1 . C_1$ et $x_1 . C_4$ (le rang n'est pas modifié car $x_1 \neq 0$), puis on fait $C_1 \leftarrow C_1 + x_2 C_2 + x_3 C_3$ et $C_4 \leftarrow C_4 + x_2 C_5 + x_3 C_6$. Comme $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$ et $x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 = 0$, on obtient :

$$\begin{pmatrix} 1 & x_2 & x_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y_2 & y_3 & 1 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}, \text{ de même rang que :}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & x_2 & x_3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & y_2 & y_3 & x_2 & x_3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_2 & y_3 \end{pmatrix}$$

Cette matrice est de rang 3 ssi $y_2 \neq 0$ ou $y_3 \neq 0$.
Si on avait $y_2 = y_3 = 0$, alors on aurait :

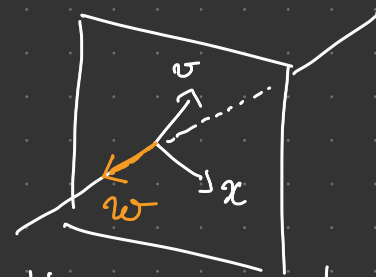
$0 = \langle x, y \rangle = x_1 y_1$, d'où $y_1 = 0$ car $x_1 \neq 0$, d'où $y = 0$, ce qui est exclus car $\|y\| = 1$.

Ceci montre donc que $d_{(x,v)} \Psi$ est surjective en tout $(x, v) \in T^1 \mathbb{S}^2$, et donc que $T^1 \mathbb{S}^2$ est une sous-variété de codimension 3 de $\mathbb{R}^6$.

On veut maintenant montrer que $T^1 \mathbb{S}^2 \underset{\text{difféo}}{\simeq} SO_3(\mathbb{R})$.

On commence par exhiber une bijection : Soit $(x, v) \in T^1 S^2$. Soit $w \in \mathrm{Vect}(x, v)^\perp$ l'unique vecteur normé tq la base (x, v, w) soit directe.

En d'autres termes, $w = x \wedge v$ le produit vectoriel de x et v



La matrice $\begin{pmatrix} x_1 & v_1 & w_1 \\ x_2 & v_2 & w_2 \\ x_3 & v_3 & w_3 \end{pmatrix}$ est donc orthogonale directe, et les w_i sont des polynômes en les x_i, v_i. Nous avons notre application :

$$f : (x, v) \in T^1 S^2 \longmapsto \begin{pmatrix} x_1 & v_1 & x_2 v_3 - x_3 v_2 \\ x_2 & v_2 & x_3 v_1 - x_1 v_3 \\ x_3 & v_3 & x_1 v_2 - x_2 v_1 \end{pmatrix} \in SO_3(\mathbb{R})$$

En fait, deux colonnes d'une matrice de $SO_3(\mathbb{R})$ déterminent toujours la troisième, de sorte que f est bijective, la bijection inverse étant simplement le couple des deux premières colonnes de la matrice.

Mq f est un difféo local. Pour cela, on calcule sa différentielle

$$d_{(x,v)} f : T_{(x\, v)}(T^1 S^2) \longrightarrow T_{f(x,v)} SO_3(\mathbb{R}).$$

Tout vecteur tangent $V \in T_{(x,v)}(T^1 S^2)$ s'écrit $V = (x'(0), v'(0))$ où $(x(t), v(t))$ est une courbe C^1 sur $T^1 S^2$ tq $x(0) = x$, $v(0) = v$.

Par définition : $d_{(x,v)} f \cdot V = \left.\dfrac{d}{dt}\right|_{t=0} f(x(t), v(t))$

$$= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \begin{pmatrix} x_1(t) & v_1(t) & w_1(t) \\ x_2(t) & v_2(t) & w_2(t) \\ x_3(t) & v_3(t) & w_3(t) \end{pmatrix}$$

où $w(t) = x(t) \wedge v(t)$. Ainsi :

$$d_{(x,v)}f \cdot V = \begin{pmatrix} x_1'(0) & v_1'(0) & * \\ x_2'(0) & v_2'(0) & * \\ x_3'(0) & v_3'(0) & * \end{pmatrix}$$

Ainsi, si $d_{(x,v)}f \cdot V = 0$, alors $V = 0$.

$d_{(x,v)}f$ est donc injective, mais aussi bijective car $\dim SO_3(\mathbb{R}) = \dim T^1\mathbb{S}^2 = 3$. Nous voyons que f est un difféo local, bijectif, de $T^1\mathbb{S}^2$ sur $\mathbb{S}^3$. Il suit que f^{-1} est aussi un difféo local et en particulier, f est un difféomorphisme de $T^1\mathbb{S}^2$ sur $SO_3(\mathbb{R})$.

Ex 13 : Connexe par arc implique toujours connexe.

Supposons $\mathcal{M}$ connexe. Soit $x \in \mathcal{M}$ et considérons

$$\mathcal{U} = \left\{ y \in \mathcal{M} \mid \exists \gamma : [0,1] \to \mathcal{M} \text{ continue avec } \begin{cases} \gamma(0) = x \\ \gamma(1) = y \end{cases} \right\}$$

Fait : $\mathcal{U}$ est ouvert dans $\mathcal{M}$.

En effet, si $y \in \mathcal{U}$, il existe $\mathcal{V} \subset \mathcal{M}$ un voisinage de y homéomorphe à une boule (par ex !). C'est là qu'on utilise que $\mathcal{M}$ est une sous variété : elle est localement homéomorphe à $\mathbb{R}^n$, $n = \dim \mathcal{M}$.

En particulier $\mathcal{V}$ est connexe par arc.

Ainsi $\forall z \in \mathcal{V}$, $\exists \bar{\gamma} : [0,1] \to \mathcal{V}$ tq $\bar{\gamma}(0) = y$, $\bar{\gamma}(1) = z$

Et comme $y \in \mathcal{U}$, on a γ chemin C^0 de x à y.

Ainsi, le chemin $\tilde{\gamma}$ déf. par :

$$\tilde{\gamma}(t) = \begin{cases} \gamma(2t) & \text{si } t \in [0, 1/2] \\ \overline{\gamma}(2t-1) & \text{si } t \in [1/2, 1] \end{cases}$$

est continue de x à z, ce $\forall z \in V$. Ainsi $V \subset U$, montrant que U est ouvert dans M.

Soit $\mathcal{R}$ la relation d'équivalence sur M :

$x \mathcal{R} y$ ssi $\exists \gamma : [0,1] \to M$ continu tq $\gamma(0) = x$, $\gamma(1) = y$.

On vient de démontrer que les classes d'équivalence sont ouvertes. Puisqu'elles partitionnent M, on obtient

$$M = \bigcup_{i \in A} U_i \text{, où les } U_i \text{ sont des ouverts disjoints}$$

Comme M est connexe, il n'y a qu'une seule classe d'équivalence : M est connexe par arc.

<u>Ex 14</u> : (i) Soit $\varphi : (x,y,z) \in U \mapsto (g(x,y,z), h(x,y,z)) \in \mathbb{R}^2$.
On veut mq $\varphi^{-1}(\{0\})$ est une sous-variété de $\mathbb{R}^3$.

Jacobienne de φ : $J_\varphi(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Comme $x > 0$, $y > 0$ et $z > 0$, les deux premières colonnes sont linéairement indépendantes. Donc J_φ est de rang 2 sur U, ce qui signifie que φ est une submersion, donc $\varphi^{-1}(\{0\})$ est une sous-variété.

(ii) Cherchons les points critiques de f sur $\mathcal{M} = \varphi^{-1}(\{0\})$.

Par le thm des extrema liés, si (x,y,z) est un tel point, alors $\nabla f(x,y,z) \in \mathrm{Vect}\left(\nabla g(x,y,z), \nabla h(x,y,z)\right)$, ce qui se traduit par :

$$\begin{vmatrix} +1/x^2 & +1/y^2 & +1/z^2 \\ \cancel{2}x & \cancel{2}y & \cancel{2}z \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

Soit :
$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2} & \frac{1}{x^2}+\frac{1}{z^2} \\ 0 & x+y & x+z \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

i.e. $$(x+y)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{z^2}\right) - (x+z)\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right) = 0.$$

$$\iff \cancel{\frac{1}{x}} + \frac{x}{z^2} + \frac{y}{x^2} + \frac{y}{z^2} - \cancel{\frac{1}{x}} - \frac{x}{y^2} - \frac{z}{x^2} - \frac{z}{y^2} = 0$$

$$\iff x\left(\frac{1}{z^2} - \frac{1}{y^2}\right) + \frac{1}{x^2}(y-z) + \frac{y}{z^2} - \frac{z}{y^2} = 0$$

$$\iff \frac{x}{y^2z^2}(y^2-z^2) + \frac{1}{x^2}(y-z) + \frac{y^3-z^3}{y^2z^2} = 0$$

$$\iff \underbrace{\frac{x\times(y+z)}{y^2z^2} + \frac{1}{x^2} + \frac{y^2+yz+z^2}{y^2z^2}}_{>0 \text{ car } (x,y,z)\in U} = 0 \quad \text{ou} \quad y = z$$

Ainsi, en un point critique de f sur $\mathcal{M}$, $y = z$. Quels points cela peut-il être ?

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = 1 \\ x-y-z = 0 \\ y = z \end{cases} \iff \begin{cases} 6z^2 = 1 \\ x = 2z \\ y = z \end{cases}$$

Ainsi $(x,y,z) = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right)$ et le seul point critique de f sur $\mathcal{M}$.

Il reste à voir que c'est un minimum. Comme précédemment, il suffit de voir qu'il existe un compact $K \subset \mathcal{M}$ tq un min. de f sur K est nécessairement un minimum de f sur $\mathcal{M}$. On aura alors existence d'au moins un minimum, qui sera forcément atteint en l'unique point critique qu'on vient de déterminer.

Soit $p_0 \in \mathcal{M}$ un point qcq et soit $C = f(p_0) > 0$.
Soit $p_n = (x_n, y_n, z_n)$ une suite dans $\mathcal{M} \cap \{f \leq C\}$.
Supposons que $(p_n) \to p \in \mathbb{R}^3$; $p = (x,y,z)$.

Comme $g(p_n) = h(p_n) = 0$, on a $g(p) = h(p) = 0$.
Et puisque $f(p_n) \leq C$, on a :

$$x_n \geq \frac{1}{C}, \; y_n \geq \frac{1}{C} \text{ et } z_n \geq \frac{1}{C}, \quad \text{d'où}$$

$$x \geq \frac{1}{C}, \; y \geq \frac{1}{C}, \; z \geq \frac{1}{C}, \quad \text{d'où } p \in \mathcal{U}.$$

Ainsi $p \in \mathcal{M}$ et comme $f(p_n) \leq C$, $f(p) \leq C$.

Ceci montre que $K = \mathcal{M} \cap \{f \leq C\}$ est un compact $\neq \emptyset$ de $\mathcal{M}$. Par continuité, $f|_K$ atteint un min. en un $p_0 \in K$.
Si $p \in \mathcal{M} \setminus K$, alors $f(p) > C \geq f(p_0)$ et donc f atteint un minimum global en p_0.

D'où $P_0 = \left(\sqrt{\frac{2}{3}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right)$ et $f(P_0) = 5\sqrt{\frac{3}{2}}$ est le minimum de f sur Γ.