

Feuille 1

Ex 1. 1) Via le dét, on bien en notant $B(A, r)$ la boule ouverte de rayon r pour la norme opérateur $\|\cdot\|$ sur $\mathcal{L}(V)$:

$$\forall A \in GL(V), \forall B \in \mathcal{L}(V) \text{ tq } \|B\| < 1/\|A^{-1}\|, \text{ on a}$$

$$A - B = A(\text{id} - A^{-1}B) \in GL(V)$$

$$\text{et donc } B(A, 1/\|A^{-1}\|) \subset GL(V).$$

2) $\mathcal{I}(A) = A^{-1}$. On a pour tout H tq $\|H\| < 1$:

$$\mathcal{I}(\text{id} + H) = \sum_{k \geq 0} (-1)^k H^k = \text{id} - H + \sum_{k \geq 2} (-1)^k H^k$$

Reste à voir que le reste est bien en $\sigma(H)$:

$$\sum_{k \geq 2} (-1)^k H^k = \|H\| \cdot \underbrace{\frac{H}{\|H\|}}_{\text{norme 1}} \cdot \underbrace{\sum_{k \geq 1} (-1)^{k+1} H^k}_{\xrightarrow{H \rightarrow 0} 0}. \quad \text{pour tout } H \neq 0, \|H\| < 1$$

Ainsi, \mathcal{I} est différentiable en id , et $\mathcal{D}_{\text{id}} \mathcal{I}(H) = -H$.

Pour le cas général : si $A \in GL(V)$, alors pour $\|H\| < 1/\|A^{-1}\|$

$A + H \in GL(V)$ et

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(A + H) &= (A + H)^{-1} = [A(\text{id} + A^{-1}H)]^{-1} \\ &= \mathcal{I}(\text{id} + A^{-1}H) A^{-1} = A^{-1} - A^{-1}H A^{-1} + \sigma(H). \end{aligned}$$

$$\text{D'où } \mathcal{D}_A \mathcal{I}(H) = -A^{-1}H A^{-1}.$$

3) $A \in GL(V) \mapsto \mathcal{D}_A \mathcal{I} \in \mathcal{L}(\mathcal{L}(V))$ est continue par continuité de l'inverse et du produit matriciel.

Ex 2 $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, 0 sinon.

Pour $(x, y) \neq (0, 0)$, $|f(x, y)| = |x| \cdot \frac{|xy|}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2} |x|$
d'où f continue en $(0, 0)$. $\leq \frac{1}{2} \|(x, y)\|_\infty$

Soit $v = (v_1, v_2) \neq 0$. Alors pour $t \neq 0$:

$$\frac{f(tv) - f(0)}{t} = \frac{t^3 v_1^2 v_2}{t^3 (v_1^2 + v_2^2)} = \frac{v_1^2 v_2}{v_1^2 + v_2^2}$$

f a donc une dérivée directionnelle selon v en 0 qui vaut : $\partial_v f(0) = \frac{v_1^2 v_2}{v_1^2 + v_2^2}$

Si f était différentiable en 0 , on aurait

$$\forall v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, \partial_v f(0) = D_0 f \cdot v$$

et la dépendance de $\partial_v f(0)$ en v serait linéaire, ce qui n'est pas le cas ici : f n'est pas différentiable en $(0, 0)$.

Rq : La linéarité de $\{v \mapsto \partial_v f(0)\}$ n'est pas suffisante pour avoir différentiabilité. Par exemple :

$\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par

$$\varphi(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \neq x^2 \text{ ou si } (x, y) = (0, 0) \\ 1 & \text{sinon} \end{cases}$$

Alors $\partial_v \varphi(0)$ existe et vaut $0 \forall v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$
alors que φ n'est même pas continue en 0 .

Pour $g(x, y) = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$, c'est du même acabit :

$$\rightarrow |g(x, y)| \leq |x| \Rightarrow g \text{ continue en } 0.$$

$$\rightarrow g(tv) = t g(v) \Rightarrow \partial_v g(0) = g(v) \quad \forall v \neq 0.$$

non linéaire en $v \Rightarrow$ pas diff. en 0 .

Ex 3 : $f(x, y) = \frac{|xy|^a}{x^2 + y^2}$ si $(x, y) \neq (0, 0)$, 0 sinon.

$$f(tv) = |t|^{2a-2} f(v) \quad \forall v \neq 0, \forall t \neq 0.$$

$$\frac{f(tv)}{t} = \varepsilon(t) \cdot |t|^{2a-3} f(v), \quad \text{où } \varepsilon(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t > 0 \\ -1 & \text{si } t < 0 \end{cases}$$

Ainsi, $\frac{f(tv)}{t}$ n'a pas de limite qd $t \rightarrow 0$ pour $a \leq \frac{3}{2}$.

Pour $a > \frac{3}{2}$, f admet des dérivées directionnelles (nulles) selon tout vecteur v en 0 .

Comme $f(0, y) = f(x, 0) = 0$ indépendamment de a , f admet des D.P. en 0 pour tout $a > 0$.

La fonction $\varphi: t \mapsto |t|^a$ est dérivablessi $a > 1$ et alors :

$$\varphi'(t) = \begin{cases} a t^{a-1} & \text{pour } t > 0 \\ 0 & \text{pour } t = 0 \\ -a |t|^{a-1} & \text{pour } t < 0 \end{cases}$$

Ainsi f admet des DP sur \mathbb{R}^2 ssi $a > 1$ et on a :

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{|y|^a}{x^2 + y^2} \times a x^{a-1} - |xy|^a \times \frac{2x}{(x^2 + y^2)^2} \quad \text{pour } x > 0$$
$$= 0 \quad \text{pour } x = 0$$

$$= -\frac{|y|^a}{x^2+y^2} a|x|^{a-1} - |xy|^a \cdot \frac{2x}{(x^2+y^2)^2} \text{ pour } x < 0.$$

et symétriquement par $\frac{\partial f}{\partial y}$. Supposons $a > \frac{3}{2}$.

$\frac{\partial f}{\partial x}$ est clairement continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{x=0\}$.

→ Continuité en $(0, \alpha)$, $\alpha \neq 0$?

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \leq C|x|^{a-1} + C'|x|^{a+1} \text{ au vois. de } (0, \alpha)$$

\hookrightarrow continue.

(car x^2+y^2 est minorée par une cte > 0 au vois. de $(0, \alpha)$)

→ Continuité en $(0, 0)$?

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \leq a \cdot \frac{|xy|^{a-1}}{\sqrt{x^2+y^2}} \cdot \underbrace{\frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\leq 1} + 2a \cdot \frac{|xy|^a}{(x^2+y^2)^{3/2}} \cdot \underbrace{\frac{|x|}{\sqrt{x^2+y^2}}}_{\leq 1}$$

et comme $\frac{|xy|}{x^2+y^2} \leq \frac{1}{2}$ on obtient :

$$\left| \frac{\partial f}{\partial x} \right| \leq \frac{a}{\sqrt{2}} \left(|xy|^{a-3/2} + |xy|^{a-3/2} \right).$$

D'où $\frac{\partial f}{\partial x} \rightarrow 0$ qd $(x, y) \rightarrow (0, 0)$. De même par $\frac{\partial f}{\partial y}$.

CCL : Pour $a > \frac{3}{2}$, f admet des D.P. continues sur \mathbb{R}^2
 \Rightarrow de classe $C^1 \Rightarrow$ différentiable en $(0, 0)$.

• Pour $a \leq \frac{3}{2}$, pas de dérivée directionnelle en $(0, 0)$
 selon $v = (1, 1)$ par exemple. \Rightarrow pas différentiable.

Ex 4 : $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}^2$. Différentiabilité en A ?

$$\forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \varphi(A+H) = (A+H)^2 = A^2 + AH + HA + H^2$$

• $H \mapsto AH + HA$ est linéaire en H

$$\bullet H^2 = \|H\| \cdot \frac{H}{\|H\|} \cdot H = o(H)$$

$\xrightarrow[H \rightarrow 0]{\text{orange}} 0$

D'où φ différentiable en A et $D_A \varphi \cdot H = AH + HA$.

Ex 5 : $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$.

1) Par son expression $\det M = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_i m_{\sigma(i), i}$, \det est une fonction polynomiale (homogène de deg. n) en les entrées de $M \mapsto C^\infty$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$.

2) Diff. en $A = \text{id}$: pour $H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on note

$$H = (h_1 | \dots | h_n) \text{ où } h_i \text{ sont les colonnes de } H \text{ et}$$

\det est une forme n -linéaire en les colonnes. Par continuité, il existe $C > 0$ tq $\det H \leq C \cdot \|h_1\|_\infty \dots \|h_n\|_\infty$, pour tout H .

$$\det(\text{id} + H) = \det(e_1 + h_1, \dots, e_n + h_n), \text{ où } e_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \leftarrow i.$$

$$= 1 + \sum_{i=1}^n \det(e_1, \dots, h_i, \dots, e_n) + \text{Reste}$$

où Reste est somme de termes de la forme

$$\det(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n), \text{ avec } \varepsilon_i \in \{e_i, h_i\}$$

et au moins deux indices i et j tq $\varepsilon_i = h_i$ $\varepsilon_j = h_j$.

D'où $| \text{Reste} | \leq C \|H\|_\infty^2$ au voisinage de 0.

$$\text{Ensuite } \det(e_1, \dots, h_i, \dots, e_n) = \begin{vmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & h_{ii} & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & h_{ii} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & 1 \end{vmatrix} = h_{ii}$$

D'où : $\det(\text{id} + H) = \det(\text{id}) + \text{Tr} H + o(H)$.

ce qui mq $\mathcal{D}_{\text{id}} \det(H) = \text{Tr} H$.

Ensuite en $A \in GL_n(\mathbb{R})$:

$$\begin{aligned} \det(A + H) &= \det A \cdot \det(\text{id} + A^{-1}H) \\ &= \det A + \underbrace{\text{Tr}(\det A \cdot A^{-1}H)}_{= \mathcal{D}_A \det \cdot H} + o(H). \end{aligned}$$

Enfin, comme $\det A \cdot A^{-1} = {}^t \text{Com} A$ pour tout $A \in GL_n(\mathbb{R})$,
et comme $A \mapsto \{ H \mapsto \text{Tr}({}^t \text{Com} A \cdot H) \}$ est continue et définie
sur tout $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, et coïncide avec $\mathcal{D}_A \det$ sur $GL_n(\mathbb{R})$, on
conclut par densité de $GL_n(\mathbb{R})$ que :

$$\forall A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \forall H \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \mathcal{D}_A \det(H) = \text{Tr}({}^t \text{Com} A \cdot H).$$

Ex 6 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ immersion propre.

1) $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ déf. par $g(x) = \|f(x) - a\|^2$, $\|\cdot\| =$ norme eucl.

Notons $\varphi(x) = \|x\|^2 = x_1^2 + x_2^2 = \langle x, x \rangle$. Alors φ est
 C^∞ sur \mathbb{R}^2 et $\forall x, h \in \mathbb{R}^2$, $\mathcal{D}_x \varphi \cdot h = 2 \langle x, h \rangle$.

Par composition, g est différentiable et $\forall x \in \mathbb{R}^2$

$$\mathcal{D}_x g = \mathcal{D}_{f(x)-a} \varphi \circ \mathcal{D}_x (f - a) = \mathcal{D}_{f(x)-a} \varphi \circ \mathcal{D}_x f.$$

Ainsi, $\mathcal{D}_x g \cdot h = 2 \langle f(x) - a, \mathcal{D}_x f \cdot h \rangle$.

2) Comme $f(u) \xrightarrow{\|u\| \rightarrow \infty} \infty$, et $g(u) \geq \|f(u)\| - \|a\|$,
 on a aussi $g(u) \xrightarrow{\|u\| \rightarrow \infty} \infty$. Il existe donc $R > 0$ tq $g(u) > g(0)$
 pour tout x tq $\|u\| \geq R$. Par compacité de $\bar{B}(0, R)$,
 g atteint un minimum dans $\bar{B}(0, R)$ et ce minimum
 est forcément un minimum global puisque $g(u) > g(0)$
 en dehors de la boule.

Soit x_0 un point où ce min est atteint.

Alors $D_{x_0} g = 0$, d'où $\forall h \in \mathbb{R}^2$,

$$\langle f(x_0) - a, D_{x_0} f \cdot h \rangle = 0.$$

Or $D_{x_0} f \in GL_2(\mathbb{R})$, et il existe h tel que

$$D_{x_0} f \cdot h = f(x_0) - a, \text{ d'où } \|f(x_0) - a\| = 0,$$

i.e. $f(x_0) = a$: f est surjective.



Ex 7. $(E, \|\cdot\|)$ evm. $N(x) = \|x\|$.

1) Pour $x \neq 0$, $\lambda \in \mathbb{R} \mapsto N(\lambda x) = |\lambda| \cdot N(x)$
 N est pas dérivable. Donc N n'est pas différentiable en 0.

2) Soit $\varphi: x \mapsto \lambda x$. Alors $N \circ \varphi = |\lambda| \cdot N$ sur \mathbb{R}^2 .

Si N est diff. en x alors $N \circ \varphi$ est différentiable en
 λx par composition, donc N aussi et on a :

$$D_{\lambda x} N = D_{\lambda x} (|\lambda| N \circ \varphi) = |\lambda| D_x N \circ D_{\lambda x} \varphi$$

$$D_{\lambda x} N \cdot h = D_x N \left(\frac{|\lambda|}{\lambda} \cdot h \right), \text{ soit } D_{\lambda x} N = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{signe}}}{\varepsilon(\lambda)} D_x N$$

Ex : $\varphi(x) = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ $D_x \varphi \cdot h = \frac{1}{2\sqrt{\langle x, x \rangle}} \times 2 \langle x, h \rangle = \left\langle \frac{x}{\|x\|}, h \right\rangle$

3) Si N est diff. en x , alors $D_x N(x) = \partial_x N(x)$

$$\text{et } \partial_x N(x) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} N(x + t x) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} |1+t| N(x) = N(x).$$

D'où $\|D_x N\| = \sup_{\|v\|=1} \|D_x N \cdot v\| \geq 1$. D'autre part,

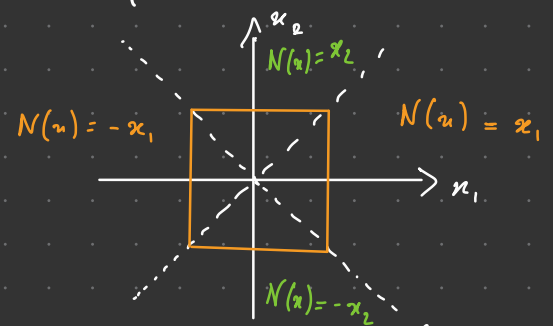
$$\forall v \in \mathbb{R}^m, N(x+v) = N(x) + D_x N \cdot v + \|v\| \varepsilon(v) \leq N(x) + N(v)$$

$$\text{si } \varepsilon(v) \xrightarrow{v \rightarrow 0} 0. \text{ D'où } \frac{D_x N \cdot v}{\|v\|} + \varepsilon(v) \leq 1.$$

$$\Rightarrow D_x N \left(\frac{v}{\|v\|} \right) \leq 1. \text{ pour tout } v \neq 0.$$

$$\text{Ainsi } \|D_x N\| = 1.$$

4) $\|x\| = \max |x_i|$.



N est différentiable sur l'ouvert

$$U = \left\{ x : \max |x_i| > \min \{ \max \{ |x_i|, \dots, |x_i|, \dots, |x_n| \}, i=1, \dots, n \} \right\}.$$

En effet, si $x \in U$ alors il existe i tq $N(x) = |x_i|$ et $\forall j \neq i, |x_j| < |x_i|$. Cette condition étant ouverte, $\exists V$ voisinage de x tel que $\forall y \in V, N(y) = |y_i|$. Ceci implique que N coïncide localement avec la fonction $|x_i|$, qui est différentiable au voisinage de x .

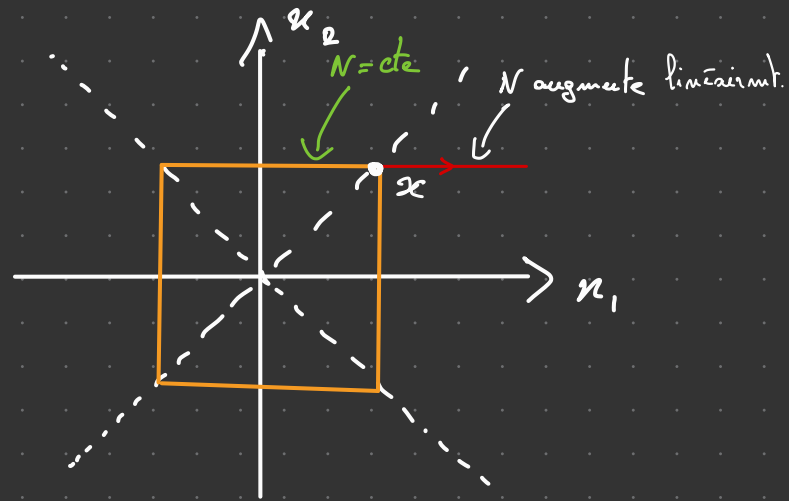
Si $x \notin U$, alors $\exists i \neq j$ tq $N(x) = |x_i| = |x_j|$. On note e_i, e_j les vecteurs de la base canonique. $\forall q \partial_{e_i} N(x)$ n'existe pas. Prenons $x_i > 0$. Alors pour $t < 0$ proche de 0, $|x_i + t| < |x_i|$ et $|x_i + t| > |x_i|$ pour tout $t > 0$. D'où :

$$\bullet N(x + t e_i) = N(x) = |x_j| \text{ pour } t < 0 \text{ proche de } 0$$

$$\bullet N(x + t e_i) = |x_i + t| = x_i + t \text{ pour } t > 0.$$

La fonction $N(x + te_i)$ n'est pas dérivable à $t=0$, donc N n'est pas différentiable en x .

Idem pour $x_i < 0$.



5) Pour $N = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ norme euclidienne, N est diff. sur $\mathbb{R}^m \setminus \{0\}$ par composition et $\forall x \neq 0$, on a :

$$D_x N \cdot h = \frac{1}{2N(x)} \cdot 2 \langle x, h \rangle = \left\langle \frac{x}{\|x\|}, h \right\rangle$$

Pour $N = \sum_{i=1}^m |x_i|$, on a différentiabilité sur l'ouvert :

$U = \{x : \forall i, x_i \neq 0\}$ puisque au voisinage de tout tel x , on a $N(y) = \sum \varepsilon_i y_i$, avec $\varepsilon_i = \text{signe de } x_i$.

$$\text{D'où } D_x N \cdot h = \sum \varepsilon_i h_i$$

Si $x \notin U$, alors $\exists i$ tq $x_i = 0$ et alors :

$$N(x + te_i) = \sum_{j \neq i} |x_j| + |t| \quad ; \quad \text{pas dérivable à } t=0$$

$\Rightarrow N$ non diff. en dehors de U .

Exo 8 : Par déf, f est diff et f^{-1} aussi. En différenciant

$$f^{-1} \circ f = \text{id} \quad \text{en } x \in U, \text{ on obtient :}$$

$$D_{f(x)} f^{-1} \circ D_n f = \text{id}_{\mathbb{R}^n} \Rightarrow D_n f \text{ inj} \Rightarrow n \leq m.$$

Et par symétrie $m = n$.

Ex 9 : Méthode 1 : Thm d'inversion globale.

$\varphi : (r, \theta) \in]0, +\infty[\times]-\pi, \pi[\mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_-$
est une bijection (ensembliste). Sa matrice jacobienne est donnée par :

$$J_{(r, \theta)} \varphi = \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}$$

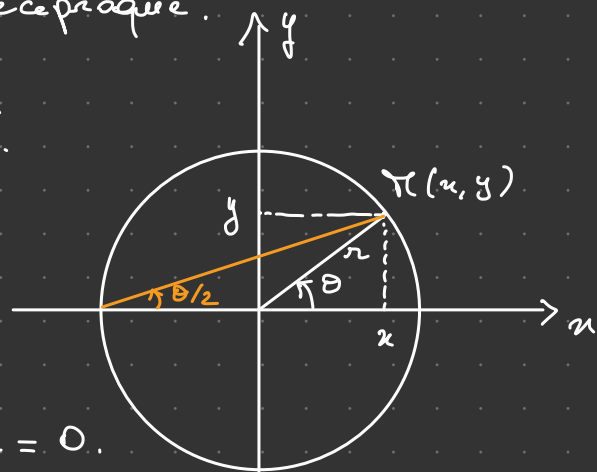
$$\Rightarrow |J_{r, \theta} \varphi| = r > 0.$$

Inv. globale $\Rightarrow \varphi$ est un C^1 -difféo.

Méthode 2 : On exhibe la réciproque.

Facile : $r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

Soit $\theta(x, y)$ l'argument de $\pi(x, y)$ dans $]-\pi, \pi[$.



$\tan \theta(x, y) = \frac{y}{x}$: pb à $x=0$.

Sol : angle moitié $\tan \frac{\theta}{2} = \frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_-$

$\frac{\theta}{2} \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, d'où :

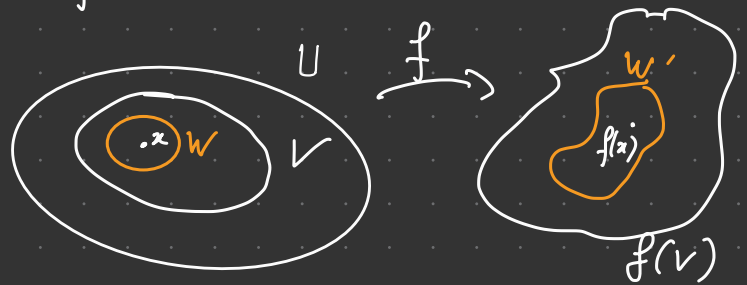
$$\begin{cases} r(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta(x, y) = 2 \operatorname{Arctan} \left(\frac{y}{x + \sqrt{x^2 + y^2}} \right) \end{cases}$$

$(x, y) \mapsto (r(x, y), \theta(x, y))$ est la bij réciproque de φ , et elle est bien C^1 sur $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{R}_-$.

Ex 10: Soit $V \subset U$ un ouvert. (noter $m = p$), disons $f \in C^k$ difféo. Si $x \in V$, alors par déf $\exists W \ni x$ ouvert, $W \subset V$ et $W' \subset \mathbb{R}^m$ local ouvert tq $f|_W$ est un difféo de W sur W' .

En particulier, W' est un voisinage de $f(x)$, contenu dans $f(V)$ ceci $\forall x$, ce qui montre que $f(V)$ est ouverte.

Si f est injective, alors c'est une bijection sur son image $U' = f(U)$, qui est ouverte.



Il faut vérifier que $f^{-1} : U' \rightarrow U$ est différentiable.

Soit $y \in U'$, soit $x = f^{-1}(y)$, soit $V \ni x$ tq $f|_V$ difféo sur son image. Alors $V' = f(V)$ est un voisinage ouvert de y et par unicité des antécédents, $(f^{-1})|_{V'} = (f|_V)^{-1}$,

ce qui mq f^{-1} est de classe C^k au voisinage de y , ceci $\forall y \in V'$, f^{-1} est donc de classe C^k .

Exo 11: $U \subset E, V \subset F, \phi : V \rightarrow E$ de classe C^k .

$$\begin{aligned} \psi : U \times V &\rightarrow E \times F \\ (x, y) &\mapsto (x + \phi(y), y) \end{aligned}$$

On m.q. ψ est injective sur $U \times V$ et que c'est un difféo local.

$$\psi(x', y') = \psi(x, y) \Leftrightarrow \begin{cases} x' + \phi(y') = x + \phi(y) \\ y' = y \end{cases}$$

d'où l'injectivité.

On m.q. ψ est un difféo local. Pour $(x, y) \in U \times V, (h, k) \in E \times F$

$$d_{(x,y)} \psi (h, k) = (h + d_y \phi k, k)$$

$$d_{(x,y)} \psi = \begin{pmatrix} \text{id}_E & d_y \phi \\ 0 & \text{id}_F \end{pmatrix} \in GL(E \times F)$$

Par le thm d'inv. local, ψ est un difféo local. Comme il est injectif, c'est un difféo sur son image.

Exo 12: $f(x, y) = (x + y, xy)$.

1) f est polynomiale, sa jacobienne est $J_f(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ y & x \end{pmatrix}$.

2) $\det J_f(x, y) = x - y$ est non nul en dehors de la première bissectrice $\{x = y\}$.

Exo 13: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ C^1 est k -Lip.ssi $|f'| \leq k$ sur \mathbb{R} .
(\Rightarrow direct, \Leftarrow TAF)

$$\Phi(x, y) = (x + f(y), y + f(x)) \text{ sur } \mathbb{R}^2.$$

1) Φ est diff par composition, et sa jacobienne est:

$$J_\Phi(x, y) = \begin{pmatrix} 1 & f'(y) \\ f'(x) & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det J_{\phi}(x, y) = 1 - f'(x)f'(y) > 0 \quad \text{car } |f'(x)f'(y)| < 1.$$

ϕ est donc un difféo local.

2) Injectivité de ϕ :

$$\phi(x, y) = \phi(x', y') \quad \text{ssi: } \begin{cases} x + f(y) = x' + f(y') & (a) \\ y + f(x) = y' + f(x') & (b) \end{cases}$$

$$(a) \Rightarrow |x - x'| = |f(y') - f(y)| \leq k |y - y'|$$

$$(b) \Rightarrow |y - y'| \leq k |x - x'|.$$

$$(a) \text{ et } (b) \Rightarrow \begin{cases} |x - x'| \leq k^2 |x - x'| \\ |y - y'| \leq k^2 |y - y'| \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = x' \quad \text{et} \quad y = y'$$

ϕ est donc un difféo sur son image. Il reste à voir la surjectivité. Par l'ex. 6, il suffit de vérifier que ϕ est propre.

$$\text{Pour tout } (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \phi(x, y) = (x, y) + (f(y), f(x)).$$

$$\|\phi(x, y)\|_1 \geq \|(x, y)\|_1 - \|(f(y), f(x))\|_1$$

$$\text{et comme } |f(t)| - |f(0)| \leq |f(t) - f(0)| \leq k|t|$$

$$\forall t, \quad |f(t)| \leq |f(0)| + k|t|$$

on obtient:

$$\|\phi(x, y)\|_1 \geq \|(x, y)\|_1 - k \|(x, y)\|_1 - 2|f(0)|.$$

$$\geq (1 - k) \|(x, y)\|_1 + Cte$$

D'où la propriété de Φ , et donc sa surjectivité.

Exo 14: α est obtenue en composant les applications

$$\iota: x \in \mathbb{R}^m \mapsto (A(x), x) \in \mathcal{T}_m(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^m$$

$$\text{et } \rho: (B, y) \in \mathcal{T}_m(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^m \mapsto B \cdot y$$

$$\forall x \in \mathbb{R}^m, \forall h \in \mathbb{R}^m, d_x \iota \cdot h = (d_x A \cdot h, h)$$

$$\forall (B, y) \in \mathcal{T}_m(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^m, \forall (H, k) \in \mathcal{T}_m(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^m,$$

$$\rho((B, y) + (H, k)) = (B + H)(y + k)$$

$$= By + \underbrace{Bk + Hy}_{d_{(B, y)} \rho \cdot (H, k)} + \underbrace{Hk}_{= \sigma(H, k)}$$

$$\text{D'où } d_x \alpha \cdot h = d_{\iota(x)} \rho \circ d_x \iota \cdot h$$

$$= d_{(A(x), x)} \rho \cdot (d_x A \cdot h, h)$$

$$= A(x)h + (d_x A \cdot h) \cdot x$$

$$\text{En } x = 0: d_0 \alpha \cdot h = A(0)h.$$

Ainsi, α est un difféo local au vois. de 0 car: $A(0) \in GL_m(\mathbb{R})$