

# Algèbre multilinéaire

## Notes de cours

22 janvier 2025

### Table des matières

<b>1</b>	<b>Rappels d'algèbre linéaire</b>	<b>2</b>
1.1	Introduction . . . . .	2
1.2	Premières définitions . . . . .	2
1.3	Espaces de dimension finie . . . . .	4
1.4	Espace $\mathcal{L}(E, V)$ des applications linéaires . . . . .	5
1.5	Matrice d'une application linéaire . . . . .	5
<b>2</b>	<b>Espaces euclidiens et leurs endomorphismes</b>	<b>6</b>
2.1	Produit scalaire sur un espace vectoriel réel . . . . .	6
2.2	Espaces euclidiens : définitions et premières propriétés . . . . .	10
2.3	Isomorphisme en dualité, Adjoint d'un endomorphisme . . . . .	11
2.4	Endomorphismes auto-adjoints, Théorème spectral . . . . .	14
2.5	Isométries linéaires d'un espace euclidien . . . . .	16
2.6	Théorème de Cartan-Dieudonné . . . . .	18
2.7	Endomorphismes orthogonaux en dimension 2 et 3 . . . . .	19
<b>3</b>	<b>Dualité linéaire</b>	<b>22</b>
3.1	Formes linéaires et hyperplans . . . . .	22
3.2	Base duale, base antéduale . . . . .	23
3.3	Orthogonal dual . . . . .	26
3.4	Intersection d'hyperplans. Interprétation des systèmes linéaires en dualité. . . . .	28
3.5	Transposée d'une application linéaire . . . . .	29
<b>4</b>	<b>Formes bilinéaires et formes quadratiques sur un espace vectoriel réel</b>	<b>30</b>
4.1	Formes bilinéaires . . . . .	30
4.2	Formes quadratiques réelles . . . . .	31
4.3	Matrice d'une forme quadratique. Expression en coordonnées. . . . .	32
4.4	Orthogonalité au sens d'une forme quadratique. Isotropie. . . . .	34
4.5	Interprétation en dualité . . . . .	37
4.6	Inertie de Sylvester. Signature d'une forme quadratique réelle. . . . .	40
4.7	Détermination pratique de la signature . . . . .	41
<b>5</b>	<b>Espaces hermitiens</b>	<b>44</b>
5.1	Rappels sur les nombres complexes . . . . .	44
5.2	Produits scalaires hermitiens, semi-linéarité . . . . .	45
5.3	Semi-isomorphisme en dualité . . . . .	48
5.4	Réduction des endomorphismes d'un espace hermitien . . . . .	49

<b>6</b>	<b>Formes multilinéaires, déterminants</b>	<b>52</b>
6.1	Applications multilinéaires . . . . .	52
6.2	Groupe symétrique : Rappels et notations . . . . .	54
6.3	Morphisme signature . . . . .	55
6.3.1	Construction de $\varepsilon$ . . . . .	55
6.3.2	Unicité de la signature . . . . .	57
6.3.3	À bien retenir de cette preuve . . . . .	57
6.4	Dimension de l'espace des formes multilinéaires alternées . . . . .	58
6.5	La $n$ -forme $\det_{\mathcal{B}}$ , où $\mathcal{B}$ est une base de $E$ . . . . .	61
6.6	Déterminant d'un endomorphisme . . . . .	61
6.7	Propriétés du déterminant . . . . .	62
6.8	Développement par rapport à une ligne ou une colonne. Comatrice. . . . .	63

## 1 Rappels d'algèbre linéaire

*On commence par un très bref survol de quelques notions fondamentales d'algèbre linéaire supposées connues. Ces rappels ne constituent pas un cours. Ils sont l'occasion de fixer certaines notations et de souligner certaines idées qui reviendront souvent dans le reste du cours.*

### 1.1 Introduction

L'algèbre linéaire consiste à étudier les espaces qui sont munis d'une *structure vectorielle*, qui s'apparente à la structure des vecteurs du plans ou de l'espace. L'opération fondamentale est la combinaison linéaire

$$\lambda x + \mu y \tag{1}$$

où  $\lambda, \mu$  sont des scalaires (y penser comme des nombres), et  $x, y$  des vecteurs. On manipule donc des objets qui n'ont pas la même nature : les vecteurs, et les scalaires. Pour formaliser ceci, on doit être en mesure de définir ce qu'est la somme de deux vecteurs, et ce qu'est la multiplication d'un vecteur par un scalaire. Il faut en outre que ces deux opérations soient compatibles afin de former un tout cohérent. C'est ce qui conduit à la définition axiomatique d'un espace vectoriel (Définition 1.1).

[Source externe pour les définitions de bases.]

### 1.2 Premières définitions

Dans tout ce chapitre, on notera  $K$  un corps quelconque. Nous serons amenés principalement à considérer les cas  $K = \mathbf{R}$  ou  $K = \mathbf{C}$  (ou plus rarement  $\mathbf{Q}$  ou  $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ ).

#### Définition 1.1

Un **espace vectoriel de corps de base  $K$** , ou encore un  **$K$ -espace vectoriel** en abrégé, est la donnée

1. d'un ensemble  $E$  ;
2. d'une loi de composition interne  $E \times E \rightarrow E$ , notée  $(x, y) \mapsto x + y$  ;
3. et d'une loi externe  $K \times E \rightarrow E$ , notée  $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$

telles que

1.  $(E, +)$  est un groupe commutatif, c'est-à-dire
  - (a) la loi  $+$  est associative et commutative ;
  - (b) admet un élément neutre, noté  $0$  ;
  - (c) tout élément admet un inverse pour la loi  $+$ , qu'on note  $-x$

2. Pour tous  $x, y \in E$  et pour tout  $\lambda, \mu \in K$ , on a

- (a)  $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ ;
- (b)  $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$ ;
- (c)  $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$ ;
- (d)  $1.x = x$ .

*Exemple 1.1.* Rappelons brièvement, sans en détailler la structure, quelques espaces classiques déjà rencontrés en Licence :

1. Pour  $n \geq 1$ ,  $K^n$  admet une structure d'espace vectoriel sur  $K$ .
2. L'ensemble des polynômes  $K[X]$  est muni également d'une structure de  $K$ -espace vectoriel. Rappelons qu'il s'agit, par définition, de  $K^{(\mathbf{N})}$ , l'ensemble des suites d'éléments de  $K$  à support fini, *i.e.* nulles à partir d'un certain rang. La même structure s'étend à  $K^{\mathbf{N}}$ , l'espace de toutes les suites d'éléments de  $K$ .<sup>a</sup>
3. L'ensemble des fonctions continues sur un intervalle  $I$ , noté  $\mathcal{C}^0(I, \mathbf{R})$ , admet une structure de  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel.

<sup>a</sup> Il s'agit de l'espace sous-jacent de l'anneau des séries formelles  $K[[X]]$ .

### Définition 1.2

Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel. Un sous-espace vectoriel de  $E$  est une partie  $F \subset E$ ,  $F \neq \emptyset$ , et qui est stable par combinaisons linéaires, *i.e.* telle que  $\forall x, y \in F, \forall \lambda \in K, x + \lambda y \in F$ .

En itérant l'opération (1), on parvient à la forme générale suivante d'une combinaison linéaire d'éléments d'un  $K$ -espace vectoriel  $E$  :

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n,$$

où  $x_1, \dots, x_n \in E$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ .

### Définition 1.3

Soit  $A \subset E$  une partie de  $E$ . On note

$$\text{Vect}(A) := \left\{ \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, n \geq 1, x_1, \dots, x_n \in A, \lambda_1, \dots, \lambda_n \in K \right\}$$

le sous-espace  $E$  engendré par  $A$ .

Vu sous cet angle, c'est l'ensemble des vecteurs de  $E$  qu'on peut « atteindre » en formant des combinaisons linéaires d'éléments de  $A$ . C'est un sous-espace vectoriel de  $E$ .

Vu sous un autre angle, c'est aussi le plus petit sous-espace vectoriel de  $E$  qui contient  $A$ , à savoir l'intersection de tous les sous-espaces de  $E$  qui contiennent  $A$  :

$$\text{Vect}(A) = \bigcap_{\substack{F \text{ sous-espace de } E \\ A \subset F}} F.$$

### Définition 1.4

Une famille d'éléments de  $E$  est une liste d'éléments  $(x_i)_{i \in I}$  indexée par un ensemble  $I$ , pas nécessairement fini.

Une famille  $(x_i)_{i \in I}$  est dite **libre** si pour tout sous-ensemble fini  $\{i_1, \dots, i_n\} \subset I$  et pour tous  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ , on a

$$\left( \sum_{k=1}^n \lambda_k x_{i_k} = 0 \right) \implies (\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0).$$

Une famille  $(x_i)_{i \in I}$  est dite **génératrice** si  $\text{Vect}(\{x_i, i \in I\}) = E$ .

Une famille  $(x_i)_{i \in I}$  est une **base** de  $E$  si elle est libre et génératrice.

*Remarque 1.1.* Dit autrement,  $(x_i)_{i \in I}$  est génératrice si  $\forall x \in E$ , il existe un sous-ensemble fini  $\{i_1, \dots, i_n\} \subset I$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  tels que  $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k x_{i_k}$ .

⌋ *Exemple 1.2.* Prenons  $E = K[X]$  l'espace des polynômes en une variable et à coefficients dans  $K$ . Soit  $I = \mathbf{N}$  et  $(x_i)_{i \in \mathbf{N}}$  la famille définie par  $\forall i \in \mathbf{N}$ ,  $x_i = X^i$ . Alors,  $(x_i)_{i \in I}$  est une base de  $E$ .

⌋ *Exemple 1.3.* Soit  $E = C_{2\pi}^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{C})$  le  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel usuelle des fonctions d'une variable réelle,  $2\pi$ -périodique et à valeurs dans  $\mathbf{C}$ . Pour tout  $k \in \mathbf{Z}$ , soit  $e_k \in E$  la fonction définie par  $\forall t \in \mathbf{R}$ ,  $e_k(t) = e^{ikt}$ . Alors,  $(e_k)_{k \in \mathbf{Z}}$  est une famille libre de  $E$ , mais ce n'est pas une base

⌋ *Exemple 1.4.* Soit  $E = C^\infty(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  avec sa structure de  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel usuelle.

1. Alors, la famille  $(\sin, \cos)$  est libre.
2. Par contre, la famille  $(1, \cos^2, \sin^2)$  n'est pas libre.
3. Pour tout  $k \in \mathbf{Z}$ , soit  $f_k \in E$  définie par  $\forall x \in \mathbf{R}$ ,  $f_k(x) = e^{kx}$ . Alors, la famille  $(f_k)_{k \in \mathbf{Z}}$  est libre.

## 1.3 Espaces de dimension finie

### Définition 1.5

Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel. On dit que  $E$  est de dimension finie s'il admet une partie génératrice finie.

### Théorème 1.1

Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie. Alors,

1.  $E$  admet des bases.
2. Toutes ses bases sont finies et ont le même cardinal.

*Remarque 1.2.* Un espace de dimension infinie admet également des bases. Ceci repose sur l'axiome de choix (Lemme de Zorn).

### Définition 1.6

Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie. On appelle dimension de  $E$ , et on note  $\dim E$ , le cardinal commun de toutes ses bases.

**Coordonnées.** Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension  $n$ . Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Alors, pour tout  $x \in E$ ,  $\exists! (x_1, \dots, x_n) \in K^n \mid x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ . Le  $n$ -uplet  $(x_1, \dots, x_n)$  est appelé coordonnées de  $x$  dans la base  $(e_i)$ .

On se donne à présent deux bases  $(e_1, \dots, e_n)$  et  $(e'_1, \dots, e'_n)$  de  $E$ , et on note

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \text{ et } X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}$$

les coordonnées de  $x$  dans les bases  $(e_i)$  et  $(e'_i)$  respectivement. On a alors la relation

$$\boxed{X = PX'}$$

où  $P$  désigne la matrice de passage de la base  $(e_i)$  à la base  $(e'_i)$ . Rappelons que  $P = (p_{ij})$  est la matrice carrée inversible de taille  $n \times n$  dont les coefficients sont déterminés par  $\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, e'_j = \sum_{i=1}^n p_{ij} e_i$ .

## 1.4 Espace $\mathcal{L}(E, V)$ des applications linéaires

### Définition 1.7

Soient  $E$  et  $F$  deux  $K$ -espaces vectoriels. Une application linéaire de  $E$  vers  $F$  est une application  $f : E \rightarrow F$  telle que  $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in K, f(x + \lambda y) = f(x) + \lambda f(y)$ .

On note  $\mathcal{L}(E, F)$  l'ensemble des applications linéaires de  $E$  vers  $F$ .

Étant données deux applications linéaires  $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ , alors l'application  $f + g : E \rightarrow F$  définie par  $\forall x \in E, (f + g)(x) = f(x) + g(x)$  est linéaire. De même, pour tout  $\lambda \in K$ , l'application  $\lambda f : E \rightarrow F$  définie par  $\forall x \in E, (\lambda f)(x) = \lambda f(x)$  est linéaire.

### Proposition 1.1

Soient  $E$  et  $F$  deux  $K$ -espaces vectoriels. Alors,  $\mathcal{L}(E, F)$  est un  $K$ -espace vectoriel, pour la loi de composition interne  $(f, g) \in \mathcal{L}(E, F) \times \mathcal{L}(E, F) \mapsto f + g \in \mathcal{L}(E, F)$  et la loi externe  $(\lambda, f) \in K \times \mathcal{L}(E, F) \mapsto \lambda f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

De plus, si  $E$  et  $F$  sont de dimension finie, alors  $\mathcal{L}(E, F)$  est de dimension finie, et

$$\dim \mathcal{L}(E, F) = \dim E \cdot \dim F$$

## 1.5 Matrice d'une application linéaire

On note  $n = \dim E$  et  $p = \dim F$  et on se donne  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et  $(f_1, \dots, f_p)$  une base de  $F$ . Soit  $\varphi : E \rightarrow F$  une application linéaire. On note

$$\text{Mat}_{(e_j), (f_i)}(\varphi) \in \mathcal{M}_{p, n}(K)$$

la matrice de  $\varphi$  avec  $(e_j)$  pour base de départ et  $(f_i)$  pour base d'arrivée. Rappelons que ses coefficients  $a_{ij}, 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq n$  sont définis par les relations  $\varphi(e_j) = \sum_{i=1}^p a_{ij} f_i$  pour  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ .

Les bases  $(e_1, \dots, e_n)$  et  $(f_1, \dots, f_p)$  étant fixées, l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(E, F) &\longrightarrow \mathcal{M}_{p, n}(K) \\ \varphi &\longmapsto \text{Mat}_{(e_j), (f_i)}(\varphi) \end{aligned}$$

est bijective. Ceci signifie  $\forall A \in \mathcal{M}_{p, n}(K), \exists! \varphi \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que  $A = \text{Mat}_{(e_j), (f_i)}(\varphi)$ .

Nous disposons donc, à bases de départ et d'arrivée fixées, d'un dictionnaire entre applications linéaires et matrices. Il nous permet de faire des aller-retours entre le monde

purement vectoriels des applications linéaires, et celui en coordonnées explicites des matrices.

Soient  $x \in E$  et  $y \in F$ . Soit  $X \in K^n$  le vecteur coordonnées (en colonne) de  $x$  dans la base  $(e_j)$  et  $Y \in K^p$  le vecteur coordonnées de  $y$  dans la base  $(f_i)$  et notons enfin  $M = \text{Mat}_{(e_j), (f_i)}(\varphi)$ . Nous avons alors

$$y = \varphi(x) \iff Y = MX.$$

Parmi d'autres propriétés, soulignons le fait que le produit matriciel correspond, à travers cette correspondance, à la composition des applications linéaires. Pour cela, considérons à présent trois  $K$ -espaces vectoriels  $E, F, G$ , munis respectivement des bases  $(e_1, \dots, e_n), (f_1, \dots, f_p), (g_1, \dots, g_q)$ . Soient  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $\psi \in \mathcal{L}(F, G)$ . Alors  $\psi \circ \varphi \in \mathcal{L}(E, G)$  et

$$\underbrace{\text{Mat}_{(e_i), (g_k)}(\psi \circ \varphi)}_{\in \mathcal{M}_{q,n}(K)} = \underbrace{\text{Mat}_{(f_j), (g_k)}(\psi)}_{\in \mathcal{M}_{q,p}(K)} \cdot \underbrace{\text{Mat}_{(e_i), (f_j)}(\varphi)}_{\in \mathcal{M}_{p,n}(K)}.$$

Souvent, la résolution d'un problème d'algèbre linéaire passe par un choix judicieux d'un système de coordonnées, et on a alors besoin de changer les bases dans lesquelles s'exprimaient nos applications linéaires.

**Changement de bases.** Soit  $\varphi : E \rightarrow F$  une application linéaire, et soient  $(e_1, \dots, e_n), (e'_1, \dots, e'_n)$  deux bases de  $E$ ,  $(f_1, \dots, f_p), (f'_1, \dots, f'_p)$  deux bases de  $F$ . Notons  $P \in \text{GL}_n(K)$  la matrice de passage de  $(e_i)$  à  $(e'_i)$ , et  $Q \in \text{GL}_p(K)$  celle de  $(f_j)$  à  $(f'_j)$ .

### Proposition 1.2

Si  $M = \text{Mat}_{(e_i), (f_j)}(\varphi)$  et  $M' = \text{Mat}_{(e'_i), (f'_j)}(\varphi)$ , alors  $M' = Q^{-1}MP$ .

### Exercice 1.1

Retrouver cette formule à l'aide de la relation  $X = PX'$  de changement de coordonnées d'un vecteur.

## 2 Espaces euclidiens et leurs endomorphismes

Dans toute cette section,  $E$  désignera un espace vectoriel sur  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$ . La plupart des résultats concerneront la dimension finie, mais on donnera des définitions et des exemples sortant de ce cadre.

### 2.1 Produit scalaire sur un espace vectoriel réel

#### Définition 2.1

Soit  $E$  un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel. Un produit scalaire sur  $E$  est une forme bilinéaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sur  $E$ , qui est symétrique, définie positive. C'est à dire :

1. Pour tous  $x, y \in E$ , si  $\varphi_x : E \rightarrow \mathbf{R}$  et  $\psi_y : E \rightarrow \mathbf{R}$  sont définies par  $\forall z \in E$

$$\begin{aligned}\varphi_x(z) &= \langle x, z \rangle \\ \psi_y(z) &= \langle z, y \rangle,\end{aligned}$$

alors  $\varphi_x$  et  $\psi_y$  sont linéaires (bilinéarité du produit scalaire).

2.  $\forall x, y \in E, \langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$  (symétrie)

3.  $\forall x \in E, \langle x, x \rangle \geq 0$ , et  $\langle x, x \rangle = 0 \Rightarrow x = 0$  (défini positif).

*Exemple 2.1.* 1. Sur  $E = \mathbf{R}^n$ , on dispose de  $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ .

2. Sur  $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$ , on définit  $\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt$ , qui est l'analogie continu de l'exemple précédent.

3. Sur  $E = \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ , on définit  $\langle A, B \rangle = \text{Tr}({}^tAB)$ .

### Définition 2.2

Un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel muni d'un produit scalaire est appelé un espace pré-hilbertien réel.

Rappelons la définition d'une norme sur un espace vectoriel réel.

### Définition 2.3

Soit  $E$  un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel. Une norme sur  $E$  est une application  $N : E \rightarrow \mathbf{R}_+$  telle que

1.  $\forall x \in E, N(x) = 0 \Rightarrow x = 0$  (séparation) ;
2.  $\forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbf{R}, N(\lambda.x) = |\lambda|.N(x)$  (homogénéité) ;
3.  $\forall x, y \in E, N(x + y) \leq N(x) + N(y)$  (inégalité triangulaire).

### Théorème 2.1 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace pré-hilbertien réel. Alors, pour tous  $x, y \in E$ , on a l'inégalité

$$|\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \cdot \sqrt{\langle y, y \rangle}.$$

De plus, il y a égalité si et seulement si  $x$  et  $y$  sont colinéaires.

*Démonstration.* Si  $x = 0$  ou  $y = 0$ , alors l'énoncé est vide. Supposons donc, sans perte de généralité, que ces deux vecteurs sont non nuls et considérons l'application  $\{t \in \mathbf{R} \mapsto P(t)\}$ , où  $P(t) = \langle x + ty, x + ty \rangle$ . D'une part, d'après la définition d'un produit scalaire,  $P \geq 0$  sur  $\mathbf{R}$ . D'autre part, par bilinéarité du produit scalaire,  $P(t) = \langle y, y \rangle t^2 + 2\langle x, y \rangle t + \langle x, x \rangle$  est un trinôme en  $t$ . Son discriminant  $\Delta$  est donc négatif ou nul. Ce dernier valant  $4\langle x, y \rangle^2 - 4\langle x, x \rangle \langle y, y \rangle$ , nous obtenons l'inégalité annoncée.

Si nous sommes dans le cas d'égalité, c'est que  $\Delta = 0$ . Le polynôme  $P$  admet donc une racine double  $t_0$ . En particulier,  $P(t_0) = \langle x + t_0 y, x + t_0 y \rangle = 0$ , d'où  $x + t_0 y = 0$  par définition du produit scalaire. On obtient bien que  $x$  et  $y$  sont colinéaires. L'autre implication étant immédiate, ceci termine la preuve.  $\square$

Notons  $\|x\| := \sqrt{\langle x, x \rangle}$  pour tout  $x \in E$ .

### Corollaire 2.1

L'application  $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbf{R}_+$  est une norme sur  $E$ .

*Démonstration.* Les axiomes de séparation et d'homogénéité sont immédiats. Pour celui de l'inégalité triangulaire, prenons deux vecteurs  $x$  et  $y$ . Nous avons alors

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\|\|y\|, \text{ d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz} \\ &= (\|x\| + \|y\|)^2. \end{aligned}$$

Nous avons donc bien  $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ .  $\square$

Les *identités de polarisation* permettent de retrouver l'expression d'un produit scalaire depuis la norme qu'il définit.

**Proposition 2.1** (Identités de polarisation)

Soit  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  un produit scalaire sur un espace vectoriel réel  $E$ . Soit  $\|\cdot\|$  la norme associée. Alors, nous avons  $\forall x, y \in E$

$$\begin{aligned}\langle x, y \rangle &= \frac{1}{4} (\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2) \\ &= \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2).\end{aligned}$$

Quelques notations standards :

1.  $x \perp y$  si  $\langle x, y \rangle = 0$ .
2.  $A^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in A, \langle x, y \rangle = 0\}$ .
3.  $F \perp G$  si  $\forall x \in F, \forall y \in G, \langle x, y \rangle = 0$ .

*Remarque 2.1.* On a toujours  $A^\perp = (\text{Vect}(A))^\perp$  pour toute partie  $A \subset E$ .

*Remarque 2.2.* On a toujours  $(F^\perp)^\perp \supset F$ , mais l'inclusion peut être stricte.

⌘ *Exemple 2.2.* Soit  $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbf{R})$  muni du produit scalaire  $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$ . Soit  $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$ . On vérifie que  $F^\perp = \{0\}$ , d'où  $(F^\perp)^\perp = E \neq F$ .

**Définition 2.4**

Soit  $(e_i)_{i \in I}$  une famille de vecteurs dans un espace pré-hilbertien  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .

1.  $(e_i)$  est dit orthogonale si  $\forall i, j \in I, i \neq j \Rightarrow e_i \perp e_j$ .
2.  $(e_i)$  est dite orthonormée si elle est orthogonale et si  $\forall i \in I, \|e_i\| = 1$ .

*Remarque 2.3.* Une famille orthonormée est nécessairement libre. En effet, si  $(e_i)_{i \in I}$  est orthonormée, si  $\{i_1, \dots, i_n\}$  est une famille quelconque d'indices, et si  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{R}$  sont des scalaires tels que  $\sum_{j=1}^n \lambda_j e_{i_j} = 0$ , alors pour tout  $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a

$$0 = \langle e_{i_k}, \sum_{j=1}^n \lambda_j e_{i_j} \rangle = \sum_{j=1}^n \lambda_j \langle e_{i_k}, e_{i_j} \rangle = \lambda_k.$$

Ainsi,  $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0$ . Ceci montre bien que la famille est libre.

**Théorème 2.2** (Identité de Pythagore)

Soit  $(e_1, \dots, e_p)$  une famille orthogonale dans un espace pré-hilbertien. Alors  $\|e_1 + \dots + e_p\|^2 = \|e_1\|^2 + \dots + \|e_p\|^2$ .

*Démonstration.* On procède par récurrence sur le cardinal de la famille.

$\boxed{p = 1}$  : La propriété est évidente.

$\boxed{\text{Hérédité}}$  : Soit  $p \geq 1$  et supposons le théorème vrai pour une famille de  $p$  vecteurs orthogonaux. Soit  $(e_1, \dots, e_{p+1})$  une famille orthogonale de vecteurs de  $E$ . Alors, par bilinéarité du produit scalaire,  $\langle (e_1 + \dots + e_p), e_{p+1} \rangle = 0$  et tous vecteurs  $x, y \in E$ , on a l'identité  $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\langle x, y \rangle$ . On déduit alors

$$\begin{aligned}\|e_1 + \dots + e_{p+1}\|^2 &= \|(e_1 + \dots + e_p) + e_{p+1}\|^2 \\ &= \|e_1 + \dots + e_p\|^2 + \|e_{p+1}\|^2 \quad \text{car } (e_1 + \dots + e_p) \perp e_{p+1} \\ &= \|e_1\|^2 + \dots + \|e_p\|^2 + \|e_{p+1}\|^2 \quad \text{par hypothèse de récurrence.}\end{aligned}$$

La propriété est donc vraie au rang  $p + 1$ , ce qui termine la récurrence.  $\square$

*Exemple 2.3.* Soit  $E = C_{2\pi}^0(\mathbf{R}, \mathbf{R})$  l'espace des fonctions réelles, continues et  $2\pi$ -périodiques. On le munit du produit scalaire  $\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$ .

On note  $(c_n)_{n \in \mathbf{N}}$  la famille définie pour tout  $n \geq 0$  par  $c_n(t) = \cos(nt)$ . Alors, comme  $\cos^2(nt) = \frac{1+\cos(2nt)}{2}$  et  $\cos(nt)\cos(mt) = \frac{\cos((n+m)t) + \cos((n-m)t)}{2}$ , on a

1.  $\langle c_0, c_0 \rangle = 1$  ;
2.  $\forall n \geq 1, \langle c_n, c_n \rangle = \frac{1}{2}$  ;
3.  $\forall n, m \geq 0, n \neq m \Rightarrow \langle c_n, c_m \rangle = 0$ .

Ainsi, la famille  $(c_n)_{n \in \mathbf{N}}$  est orthogonale.

On peut alors, en guise d'illustration, appliquer l'identité de Pythagore à la famille  $(a_0c_0, \dots, a_nc_n)$  pour tous  $a_0, \dots, a_n \in \mathbf{R}$  pour obtenir

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (a_0 + a_1 \cos(t) + \dots + a_n \cos(nt))^2 dt = a_0^2 + \frac{1}{2}(a_1^2 + \dots + a_n^2).$$

**Algorithme de Gram-Schmidt** En entrée, une famille libre et finie  $(e_1, \dots, e_n)$  de vecteurs d'un espace pré-hilbertien  $E$ .

En sortie, une famille orthonormée  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_n)$  telle que  $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ .

L'algorithme commence en définissant  $\varepsilon_1 := e_1/\|e_1\|$ . Si  $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k$  pour  $k \leq n-1$ , ont déjà été construits, alors on définit

$$\varepsilon'_{k+1} := e_{k+1} - \langle e_{k+1}, \varepsilon_k \rangle \varepsilon_k - \dots - \langle e_{k+1}, \varepsilon_1 \rangle \varepsilon_1.$$

Alors,  $\varepsilon'_{k+1} \neq 0$  puisque  $e_{k+1} \notin \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) = \text{Vect}(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k)$ . On a alors par construction  $\langle \varepsilon_{k+1}, \varepsilon'_k \rangle = \dots = \langle \varepsilon'_{k+1}, \varepsilon_1 \rangle = 0$ , et donc  $(\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, \varepsilon'_{k+1})$  est orthogonale. On vérifie facilement que  $\text{Vect}((\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, \varepsilon'_{k+1})) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k, e_{k+1})$ . En définissant alors  $\varepsilon_{k+1} := \varepsilon'_{k+1}/\|\varepsilon'_{k+1}\|$ , ce qui est légitime car  $\varepsilon'_{k+1} \neq 0$ , on obtient un vecteur de norme 1 et satisfait bien tous les critères. L'algorithme s'arrête dès que  $k+1 = n$ .

### Corollaire 2.2

Tout sous-espace  $F \subset E$  de dimension finie admet une base orthonormée. En particulier, si  $E$  est lui-même de dimension finie, alors il admet des bases orthonormées.

## Projection orthogonale sur un sous-espace de dimension finie.

### Proposition 2.2

Soit  $F \subset E$  un sous-espace de dimension finie égale à  $n$ . Alors

$$E = F \oplus F^\perp \text{ et } (F^\perp)^\perp = F.$$

On note  $p_F : E \rightarrow F$  la projection orthogonale sur  $F$ . Il s'agit de la projection sur  $F$  parallèlement à  $F^\perp$ . Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $F$ . On a alors l'expression

$$\forall x \in E, p_F(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i.$$

*Preuve.* Rappelons que  $F$  admet des bases orthonormées d'après le Corollaire 2.2, il est donc légitime de considérer  $(e_1, \dots, e_n)$ . Définissons

$$\forall x \in E, p_F(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i.$$

L'application  $p_F : E \rightarrow E$  est linéaire. Bien-sûr,  $\text{Im}(p_F) \subset F$ . De plus, pour tout  $x \in E$  et pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , nous avons  $\langle x - p_F(x), e_i \rangle = \langle x, e_i \rangle - \sum_{k=1}^n \langle x, e_k \rangle \langle e_k, e_i \rangle = 0$ . Par bilinéarité du produit scalaire, on obtient  $x - p_F(x) \in F^\perp$ . Par conséquent,

$$\forall x \in E, x = \underbrace{p_F(x)}_{\in F} + \underbrace{x - p_F(x)}_{\in F^\perp}.$$

Ceci montre que  $E = F + F^\perp$ . De plus, si  $x \in F \cap F^\perp$ , alors  $\langle x, x \rangle = 0$ , d'où  $F \cap F^\perp = \{0\}$ , et donc  $E = F \oplus F^\perp$ .

De plus, nous venons de voir que pour tout  $x \in E$ ,  $p_F(x)$  est la composante de  $x$  dans sa décomposition selon  $E = F \oplus F^\perp$ . Ceci montre donc que  $p_F$  est bien la projection sur  $F$  parallèlement à  $F^\perp$ .

On a déjà vu que  $F \subset (F^\perp)^\perp$ . Soit maintenant  $x \in (F^\perp)^\perp$ . Écrivons  $x = x_1 + x_2$  avec  $x_1 \in F$  et  $x_2 \in F^\perp$ . Par hypothèse, quel que soit  $y \in F^\perp$ ,  $\langle x, y \rangle = 0$ . En appliquant ceci à  $y = x_2$ , on obtient  $0 = \langle x, y \rangle = \langle x_1, x_2 \rangle + \langle x_2, x_2 \rangle$ , et puisque  $x_1 \perp x_2$ , on en déduit  $\|x_2\| = 0$ , et finalement  $x_2 = 0$ , d'où  $x = x_1$ , c'est-à-dire  $x \in F$ . Ainsi,  $x \in (F^\perp)^\perp \Rightarrow x \in F$ , i.e.  $(F^\perp)^\perp \subset F$ .  $\square$

## Distance à un sous-espace de dimension finie.

### Définition 2.5

Soit  $A$  une partie de  $E$ . Soit  $x \in E$ . On définit la distance de  $x$  à  $A$  comme étant

$$d(x, A) = \inf\{\|x - y\|, y \in A\}.$$

### Proposition 2.3

Soit  $F \subset E$  un sous-espace de dimension finie. Alors, pour tout  $x \in E$ ,  $d(x, F) = \|x - p_F(x)\|$  et  $p_F(x)$  est l'unique vecteur  $y$  de  $F$  tel  $\|x - y\| = d(x, F)$ .

*Preuve.* Soit  $y \in F$ . Alors

$$\|x - y\|^2 = \|x - p_F(x) + p_F(x) - y\|^2 = \|x - p_F(x)\|^2 + \|p_F(x) - y\|^2$$

puisque  $x - p_F(x) \in F^\perp$  et  $p_F(x) - y \in F$ . Par conséquent  $\|x - y\| \geq \|x - p_F(x)\|$ , et  $\|x - y\| = \|x - p_F(x)\|$  si et seulement si  $\|p_F(x) - y\| = 0$ .

Ceci montre que  $\inf\{\|x - y\|, y \in F\}$  vaut  $\|x - p_F(x)\|$  et est atteint une et une seule fois en  $y = p_F(x)$ .  $\square$

*Remarque 2.4.* Ce résultat a des applications en dehors du cadre de ce cours. Notamment, de l'inégalité  $\|p_F(x)\| \leq \|x\|$ , dite *de Bessel*, on déduit la convergence des séries  $\sum_{n \geq 0} a_n(f)^2$  et  $\sum_{n \geq 1} b_n(f)^2$ , où  $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  est continue,  $2\pi$ -périodique, et  $(a_n(f))$ ,  $(b_n(f))$  désignent ses coefficients de Fourier.

## 2.2 Espaces euclidiens : définitions et premières propriétés

### Définition 2.6

Un espace euclidien est un espace pré-hilbertien réel de dimension finie.

Si  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  est un espace euclidien, une base orthonormée de  $E$  est une base  $(e_1, \dots, e_n)$  qui est aussi une famille orthonormée.

Rappelons qu'on a vu plus haut que  $E$  admet systématiquement des bases orthonormées.

**Coordonnées en base orthonormée** Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée d'un espace euclidien  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ . Alors, pour tout  $x \in E$ , nous avons

$$x = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i.$$

Les coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$  sont donc données par  $x_i = \langle x, e_i \rangle$  pour tout  $i$ . De plus, si  $X, Y \in \mathbf{R}^n$  sont les coordonnées dans  $(e_i)$  (vecteurs colonnes) de  $x, y \in E$  respectivement, alors

$$\langle x, y \rangle = {}^tXY = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

### Exercice 2.1

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et soit  $(e_i)$  une base orthonormée. Montrer que

$$\text{Tr}(u) = \sum_{i=1}^n \langle u(e_i), e_i \rangle.$$

## 2.3 Isomorphisme en dualité, Adjoint d'un endomorphisme

On se donne  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien. La définition et la proposition suivantes seront généralisées plus tard dans le cours, elles reflètent un aspect fondamental de l'algèbre bilinéaire.

### Définition 2.7

On appelle *espace dual* de  $E$ , et on note  $E^*$ , l'espace  $\mathcal{L}(E, \mathbf{R})$ . Les éléments de  $E^*$  sont appelés des *formes linéaires*.

### Proposition 2.4

Soit  $\phi \in E^*$  une forme linéaire sur  $E$ . Alors, il existe un unique vecteur  $x_\phi \in E$  tel que

$$\forall x \in E, \phi(x) = \langle x_\phi, x \rangle.$$

De plus, l'application

$$\begin{aligned} f : E^* &\longrightarrow E \\ \phi &\longmapsto x_\phi \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

On dit que le vecteur  $x_\phi$  *représente* la forme linéaire  $\phi$ .

*Preuve.* On commence par observer que  $E^*$  est de dimension finie et que  $\dim E^* = \dim E$ .  $\dim \mathbf{R} = \dim E$ . Pour tout  $x \in E$ , définissons  $\phi_x \in E^*$  par

$$\forall y \in E, \phi_x(y) = \langle x, y \rangle.$$

Par linéarité du produit scalaire par rapport à sa deuxième entrée,  $\phi_x$  est bien linéaire. La linéarité par rapport à sa première entrée nous donne de plus

$$\forall x_1, x_2, y \in E, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \phi_{x_1 + \lambda x_2}(y) = \phi_{x_1}(y) + \lambda \phi_{x_2}(y).$$

Ainsi,

$$\forall x_1, x_2 \in E, \forall \lambda \in \mathbf{R}, \phi_{x_1 + \lambda x_2} = \phi_{x_1} + \lambda \phi_{x_2} \text{ (égalité entre formes linéaires),}$$

et donc, l'application  $g : E \rightarrow E^*$  définie par

$$\begin{aligned} g : E &\longrightarrow E^* \\ x &\longmapsto \phi_x \end{aligned}$$

est linéaire.

**Fait :**  $g$  est injective.

*Démonstration.* En effet, si  $x \in \ker g$ , cela signifie que  $\phi_x = 0$ , c'est à dire que pour tout  $y \in E$ ,  $\phi_x(y) = 0$ . En particulier,  $\phi_x(x) = \langle x, x \rangle = 0$ , d'où  $x = 0$ , ce qui montre  $\ker g = \{0\}$ .  $\square$

Comme  $E$  et  $E^*$  ont la même dimension, on en déduit que  $g$  est un isomorphisme. On appelle  $f = g^{-1} : E^* \rightarrow E$ . Si on note  $x_\phi = f(\phi)$  pour toute  $\phi \in E^*$ , alors l'égalité  $\phi = g(x_\phi)$  (entre formes linéaires) signifie

$$\forall x \in E, \phi(x) = (g(x_\phi))(x) = \phi_{x_\phi}(x) = \langle x_\phi, x \rangle,$$

ce qui est exactement ce qu'on attend de  $x_\phi$ . Enfin,  $f$  est un isomorphisme en tant qu'inverse de  $g$ .  $\square$

*Exemple 2.4.* Soit  $E = \mathbf{R}^n$  muni du produit scalaire usuel. Toute forme linéaire  $\phi \in E^*$  est de la forme  $\phi(x) = \sum a_i x_i$ , pour  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , où  $a_i = \phi(e_i)$ ,  $(e_1, \dots, e_n)$  étant la base canonique. Le vecteur  $x_\phi \in E$  de la proposition précédente est alors  $x_\phi = (a_1, \dots, a_n)$ .

Considérons à présent  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme de  $E$ .

### Définition 2.8

Soient  $u, v \in \mathcal{L}(E)$  deux endomorphismes. On dit que  $v$  est adjoint de  $u$  si

$$\forall x, y \in E, \langle u(x), y \rangle = \langle x, v(y) \rangle.$$

### Théorème 2.3 (Existence et unicité de l'adjoint)

Tout endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  admet un adjoint, et il est unique. On le note  $u^*$ , et on a de plus  $(u^*)^* = u$ .

*Preuve.* Pour tout  $y \in E$ , on considère la forme linéaire  $\phi_y \in E^*$  définie par

$$\forall x \in E, \phi_y(x) = \langle u(x), y \rangle.$$

Notons que  $\phi_y$  est bien linéaire par composition. La linéarité du produit scalaire par rapport à la deuxième variable fait que  $\phi_{y_1 + \lambda y_2} = \phi_{y_1} + \lambda \phi_{y_2}$  pour tous  $y_1, y_2 \in E$  et  $\lambda \in \mathbf{R}$ . Ainsi, l'application  $\Phi : y \in E \mapsto \phi_y \in E^*$  est linéaire. Soit  $f : E^* \rightarrow E$  l'isomorphisme donné par la Proposition 2.4. Définissons alors  $v = f \circ \Phi \in \mathcal{L}(E)$ .

**Fait :**  $v$  est un adjoint de  $u$ .

*Démonstration.* Par définition de  $f$ , pour tout  $y \in E$ ,  $f(\phi_y)$  est l'unique vecteur

$z \in E$  tel que  $\forall x \in E, \phi_y(x) = \langle x, z \rangle$ . Par conséquent,

$$\begin{aligned} \forall x, y \in E, \langle x, v(y) \rangle &= \langle x, f(\phi_y) \rangle \\ &= \phi_y(x) && \text{par définition de } f(\phi_y) \\ &= \langle u(x), y \rangle && \text{par définition de } \phi_y \end{aligned}$$

Ceci montre que  $v$  ainsi défini est bien adjoint de  $u$ .  $\square$

Même si c'est redondant, il est très rapide de vérifier directement l'unicité de l'adjoint. Supposons que  $v_1, v_2 \in \mathcal{L}(E)$  sont adjoints de  $u$ . On a alors pour tous  $x, y \in E$

$$\langle u(x), y \rangle = \langle x, v_1(y) \rangle = \langle x, v_2(y) \rangle.$$

D'où

$$\langle x, v_1(y) - v_2(y) \rangle = 0,$$

et en prenant  $x = v_1(y) - v_2(y)$ , on déduit  $v_1(y) = v_2(y)$  pour tout  $y \in E$ , comme annoncé.

Enfin, posons  $w = u^*$  par souci de clarté. Nous avons

$$\begin{aligned} \forall x, y \in E, \langle w(x), y \rangle &= \langle x, w^*(y) \rangle && \text{d'une part} \\ &= \langle x, u(y) \rangle && \text{d'autre part.} \end{aligned}$$

D'où  $w^* = u$  par unicité de l'adjoint de  $w$ . C'est-à-dire  $(u^*)^* = u$ .  $\square$

On passe en revue quelques propriétés de l'adjoint de  $u$ .

### Proposition 2.5

Soit  $u, v \in \mathcal{L}(E)$ . On a alors :

1. Pour tout  $\lambda \in \mathbf{R}$ ,  $(u + \lambda v)^* = u^* + \lambda v^*$
2.  $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$
3. Si  $u \in \text{GL}(E)$ ,  $(u^{-1})^* = (u^*)^{-1}$
4. Pour tout sous-espace  $F \subset E$ ,  $u(F) \subset F \iff u^*(F^\perp) \subset F^\perp$
5.  $\text{Ker } u^* = (\text{Im } u)^\perp$ ,  $\text{Im } u^* = (\text{Ker } u)^\perp$ ,  $\text{Rg}(u) = \text{Rg}(u^*)$ .

*Preuve.*

1. Par unicité de l'adjoint de  $u + \lambda v$ , il suffit de vérifier

$$\forall x, y \in E, \langle u(x) + \lambda v(x), y \rangle = \langle x, u^*(x) + \lambda v^*(x) \rangle.$$

Or par bilinéarité, nous avons

$$\begin{aligned} \langle x, u^*(x) + \lambda v^*(x) \rangle &= \langle x, u^*(y) \rangle + \lambda \langle x, v^*(y) \rangle \\ &= \langle u(x), y \rangle + \lambda \langle v(x), y \rangle \\ &= \langle (u + \lambda v)(x), y \rangle. \end{aligned}$$

2. Pour tous  $x, y \in E$ , nous avons

$$\begin{aligned} \langle (u \circ v)(x), y \rangle &= \langle u(v(x)), y \rangle = \langle v(x), u^*(y) \rangle = \langle x, v^*(u^*(y)) \rangle \\ &= \langle x, (v^* \circ u^*)(y) \rangle. \end{aligned}$$

Par unicité de l'adjoint de  $u \circ v$ , on a bien  $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$ .

3. Si  $u$  est inversible, alors on a par définition  $u \circ u^{-1} = \text{id}_E$ . Comme  $\text{id}_E^* = \text{id}_E$ , la relation précédente nous donne  $(u^{-1})^* \circ u^* = \text{id}_E$ . D'où  $(u^*)^{-1} = (u^{-1})^*$ .
4. Rappelons qu'en dimension finie,  $F = (F^\perp)^\perp$ . On a alors

$$\begin{aligned} u(F) \subset F &\iff \forall x \in F, u(x) \in F = (F^\perp)^\perp \\ &\iff \forall x \in F, \forall y \in F^\perp, \langle u(x), y \rangle = 0 \\ &\iff \forall x \in F, \forall y \in F^\perp, \langle x, u^*(y) \rangle = 0 \\ &\iff \forall y \in F^\perp, u^*(y) \in F^\perp \\ &\iff u^*(F^\perp) \subset F^\perp \end{aligned}$$

5. Montrons  $\text{Ker } u^* = \text{Im}(u)^\perp$ . Soit  $x \in E$ . On a alors

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker } u^* &\iff u^*(x) = 0 \\ &\iff \forall y \in E, \langle u^*(x), y \rangle = 0 \\ &\iff \forall y \in E, \langle x, u(y) \rangle = 0 \\ &\iff x \in (\text{Im}(u))^\perp, \end{aligned}$$

ce qui démontre l'égalité attendue. En appliquant ce qu'on vient de démontrer à  $u^*$ , on obtient que  $\text{Im}(u^*)^\perp = \text{Ker } u$ , puisque  $(u^*)^* = u$ . En prenant l'orthogonal de cette égalité, on obtient bien  $\text{Im}(u^*) = \text{Ker}(u)^\perp$ , en vertu de la Proposition 2.2. Enfin, d'après le théorème du rang, en notant  $n = \dim E = \dim E^*$ , nous obtenons  $\text{Rg}(u) = n - \dim \text{Ker}(u) = n - (n - \dim(\text{Ker } u)^\perp) = \dim \text{Im}(u^*) = \text{Rg}(u^*)$ . □

On interprète matriciellement l'adjoint d'un endomorphisme.

### Proposition 2.6

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  et soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base orthonormée de  $E$ . Alors,

$$\text{Mat}_{(e_i)}(u^*) = {}^t(\text{Mat}_{(e_i)}(u)).$$

En particulier,  $\text{Tr}(u^*) = \text{Tr}(u)$  et  $\det(u^*) = \det(u)$ .

*Preuve.* Notons  $(m_{ij})$  les entrées de la matrice  $\text{Mat}_{(e_i)}(u)$  et  $(m_{ij}^*)$  celles de la matrice  $\text{Mat}_{(e_i)}(u^*)$ . Par définition, pour tous  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $m_{ij}^*$  est la composante sur  $e_i$  de  $u^*(e_j)$ . Cette composante est donnée par  $m_{ij}^* = \langle u^*(e_j), e_i \rangle$ . Par définition de  $u^*$ , on a donc  $m_{ij}^* = \langle e_j, u(e_i) \rangle = m_{ji}$ . On a donc bien  $\text{Mat}_{(e_i)}(u^*) = {}^t(\text{Mat}_{(e_i)}(u))$ . □

## 2.4 Endomorphismes auto-adjoints, Théorème spectral

### Définition 2.9

Un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est dit *auto-adjoint* si  $u = u^*$ .

De façon équivalente,  $u$  est auto-adjoint si

$$\forall x, y \in E, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle.$$

On a la caractérisation matricielle suivante. Notons

$$\mathcal{S}_n(\mathbf{R}) = \{M \in M_n(\mathbf{R}) \mid {}^tM = M\} \subset M_n(\mathbf{R})$$

l'espace des matrices réelles symétriques de taille  $n \times n$ .

**Proposition 2.7**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On a alors les équivalences suivantes :

- $$\begin{aligned} & (1) \text{ } u \text{ est auto-adjoint} \\ \iff & (2) \exists (e_i) \text{ base orthonormée} \mid \text{Mat}_{(e_i)}(u) \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R}) \\ \iff & (3) \forall (e_i) \text{ base orthonormée, } \text{Mat}_{(e_i)}(u) \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R}) \end{aligned}$$

*Preuve.* On montre  $(3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1) \Rightarrow (3)$ .

—  $(3) \Rightarrow (2)$  : Immédiat.

—  $(2) \Rightarrow (1)$  : Soit  $(e_i)$  une base orthonormée telle que  $\text{Mat}_{(e_i)}(u) \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ . Alors  $\text{Mat}_{(e_i)}(u^*) = {}^t(\text{Mat}_{(e_i)}(u)) = \text{Mat}_{(e_i)}(u)$  d'après la Proposition 2.6. Ainsi,  $u$  et  $u^*$  ont la même matrice dans la base  $(e_i)$  : ceci implique que  $u = u^*$ .

—  $(1) \Rightarrow (3)$  : Si  $(e_i)$  est une base orthonormée quelconque et si  $u = u^*$ , alors  $\text{Mat}_{(e_i)}(u) = \text{Mat}_{(e_i)}(u^*) = {}^t(\text{Mat}_{(e_i)}(u))$ , ce qui montre que  $\text{Mat}_{(e_i)}(u) \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$ . □

⌘ *Exemple 2.5.* Soit  $F \subset E$  un sous-espace et soit  $p_F \in \mathcal{L}(E)$  la projection orthogonale sur  $F$ . Alors  $p_F$  est auto-adjoint.

**Exercice 2.2**

Montrer que tout  $p \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $p^2 = p$  et  $p^* = p$  est la projection orthogonale sur  $F = \text{Im}(p)$ .

⌘ *Exemple 2.6.* Soit  $H \subset E$  un hyperplan, et soit  $u \in H^\perp$  tel que  $\|u\| = 1$ . Alors, la réflexion par rapport à  $H$  se définit par

$$\forall x \in E, s_H(x) = x - 2\langle x, u \rangle u.$$

⌘ Alors  $s_H$  est auto-adjoint et  $s_H^2 = \text{id}$ .

**Théorème 2.4 (Théorème spectral)**

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien, et soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme auto-adjoint. Alors, il existe une base orthonormée  $(e_1, \dots, e_n)$  telle que  $\text{Mat}_{(e_i)}(u)$  est diagonale.

De façon équivalente, si  $\text{Sp}(u)$  désigne le spectre réel de  $u$ , alors

$$E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u),$$

et  $\forall \lambda, \mu \in \text{Sp}(u), \lambda \neq \mu \Rightarrow E_\lambda(u) \perp E_\mu(u)$ .

*Remarque 2.5.* On condense cela en disant «  $u$  est diagonalisable en base orthonormée », ou encore que «  $E$  est la somme directe orthogonale des espaces propres de  $u$  ».

Avant de donner la preuve du Théorème 2.4, énonçons son corollaire matriciel. Rappelons la définition du groupe orthogonal en dimension  $n$  :

$$O(n) = \{M \in M_n(\mathbf{R}) \mid {}^tMM = I_n\}.$$

**Corollaire 2.3** (Théorème spectral : version matricielle)

Soit  $M \in \mathcal{S}_n(\mathbf{R})$  une matrice symétrique. Alors, il existe  $U \in O(n)$  et  $D$  une matrice diagonale telles que

$$M = U^{-1}DU.$$

*Preuve.* Le point de départ est le suivant. Il permet de faire une récurrence sur la dimension de l'espace en nous restreignant à l'orthogonal d'un espace propre non-nul.

**Lemme 2.1**

Toutes les valeurs propres de  $u$  sont réelles.

*Preuve.* On considère une matrice  $M$  de  $u$  par rapport à une base orthonormée arbitraire et on considère  $\lambda \in \text{Sp}_{\mathbf{C}}(M)$  une valeur propre complexe de  $M$ . On a alors existence de  $X \in \mathbf{C}^n \setminus \{0\}$  tel que  $MX = \lambda X$ . Nous avons alors d'une part  ${}^t\bar{X}MX = \lambda {}^t\bar{X}X$ , et d'autre part  ${}^t\bar{X}MX = {}^t({}^t\bar{X}MX)$ , puisque  $M$  est symétrique à coefficients réels. On en déduit  $\lambda = \bar{\lambda}$  puisque  $X \neq 0 \Rightarrow {}^t\bar{X}X > 0$ .  $\square$

On peut par récurrence sur  $n \geq 1$  la propriété  $\mathcal{P}(n)$  : "Pour tout espace euclidien  $E$  de dimension  $n$ , tout endomorphisme autoadjoint de  $E$  est diagonalisable en base orthonormée."

Initialisation : Immédiate.

Hérédité : Soit  $n > 1$ . Supposons  $\mathcal{P}(n-1)$  et montrons la propriété au rang  $n$ . Soit  $E$  un espace euclidien de dimension  $n$  et soit  $u$  un endomorphisme auto-adjoint de  $E$ . Par le lemme,  $u$  admet une valeur propre réelle, dont on peut choisir un vecteur propre  $v \in E \setminus \{0\}$ . Puisque  $u$  est auto-adjoint et préserve  $\mathbf{R}.v$ , il préserve l'hyperplan  $H = v^\perp$ . On applique l'hypothèse de récurrence à la restriction  $u|_H$  (qui est auto-adjoint) : il existe  $(e_1, \dots, e_{n-1})$  une base orthonormée de  $H$  formée de vecteurs propres. Par construction,  $(e_1, \dots, e_{n-1}, v)$  est une base orthonormée de  $E$  formée de vecteurs propres, terminant la récurrence.  $\square$

## 2.5 Isométries linéaires d'un espace euclidien

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien.

**Définition 2.10**

On dit qu'un endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(E)$  est **orthogonal** si  $\forall x, y \in E, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ . On note  $O(E)$  l'ensemble des endomorphismes orthogonaux de  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ .

En particulier, un endomorphisme orthogonal préserve la norme :  $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$ .

**Exercice 2.3**

Montrer qu'inversement, si  $u \in \mathcal{L}(E)$  est tel que  $\forall x \in E, \|u(x)\| = \|x\|$ , alors  $u \in O(E)$ .

**Définition 2.11**

On dit qu'une application  $f : E \rightarrow E$  est une isométrie si pour tous  $x, y \in E$ , on a  $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ .

*Exemple 2.7.*

1. Si  $u \in O(E)$ , alors  $u : E \rightarrow E$  est une isométrie.
2. Soit  $x_0 \in E$ . On définit la *translation* de vecteur  $x_0$  comme étant l'application  $f : E \rightarrow E$  donnée par  $f(x) = x + x_0$  pour tout  $x \in E$ . Alors toute translation est une isométrie.  
Par contre, la seule translation qui est linéaire est  $\text{id}_E$  (correspondant à  $x_0 = 0$ ). Pourquoi ?
3. Si  $f$  et  $g$  sont des isométries, alors  $f \circ g$  est une isométrie.

**Exercice 2.4**

Montrer que si  $f : E \rightarrow E$  est une isométrie, telle que  $f(0) = 0$ , alors  $f$  est linéaire.

Comme pour les endomorphismes auto-adjoints, on a une caractérisation matricielle des endomorphismes orthogonaux.

**Proposition 2.8**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On a les équivalences suivantes.

$$\begin{aligned}
 u \in O(E) &\iff u^*u = \text{id}_E \\
 &\iff (1) \exists(e_1, \dots, e_n) \text{ orthonormée} \mid \text{Mat}_{(e_i)}(u) \in O(n) \\
 &\iff (2) \forall(e_1, \dots, e_n) \text{ orthonormée}, \text{Mat}_{(e_i)}(u) \in O(n) \\
 &\iff (3) \exists(e_1, \dots, e_n) \text{ orthonormée} \mid (u(e_1), \dots, u(e_n)) \text{ est orthonormée} \\
 &\iff (4) \forall(e_1, \dots, e_n) \text{ orthonormée}, (u(e_1), \dots, u(e_n)) \text{ est orthonormée}
 \end{aligned}$$

*Preuve.* Nous avons  $u \in O(E) \iff \forall x, y \in E, \langle u(x), u(y) \rangle = \langle x, y \rangle \iff \forall x, y \in E, \langle x, u^*(u(y)) \rangle = \langle x, y \rangle \iff u^*u = \text{id}_E$ , ce qui montre la première équivalence.

Supposons (3). Soient  $x, y \in E$ . Notons  $(x_1, \dots, x_n)$  et  $(y_1, \dots, y_n)$  leurs coordonnées respectives dans la base  $(e_i)$ . Puisque  $(e_i)$  est orthonormée, nous avons  $x_i = \langle x, e_i \rangle$  et  $y_i = \langle y, e_i \rangle$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Par linéarité de  $u$ , nous avons également  $u(x) = \sum_i x_i u(e_i)$  et  $u(y) = \sum_i y_i u(e_i)$ . Or nous supposons que  $(u(e_i))$  est une base orthonormée, et donc

$$\langle u(x), u(y) \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i = \langle x, y \rangle,$$

ce qui prouve que  $u \in O(E)$ .

Supposons que  $u \in O(E)$  et soit  $(e_i)$  une base orthonormée. Alors,  $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ , le symbole de Kronecker

$$\delta_{ij} := \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Comme  $u \in O(E)$ , nous avons également  $\langle u(e_i), u(e_j) \rangle = \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$ , ce qui signifie que  $(u(e_1), \dots, u(e_n))$  est orthonormée.

L'implication (4)  $\Rightarrow$  (3) est immédiate, et nous avons donc prouvé  $u \in O(E) \iff$  (3)  $\iff$  (4).

Soit  $(e_i)$  une base quelconque. Soit  $M = (m_{ij}) = \text{Mat}_{(e_i)}(u)$ . Alors,

$$M \in O(n) \iff \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{k=1}^n m_{ki} m_{kj} = \delta_{ij}.$$

Ainsi, si  $(e_i)$  est orthonormée, comme  $(m_{1j}, \dots, m_{nj})$  sont les coordonnées de  $u(e_j)$  dans la base  $(e_i)$ , nous avons

$$\begin{aligned} (u(e_1), \dots, u(e_n)) \text{ orthonormée} &\iff \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \langle u(e_i), u(e_j) \rangle = \delta_{ij} \\ &\iff \forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{k=1}^n m_{ki} m_{kj} = \delta_{ij} \\ &\iff M \in O(n). \end{aligned}$$

Ceci montre donc que (1)  $\iff$  (3) et (2)  $\iff$  (4), terminant la preuve.  $\square$

On retiendra bien qu'un endomorphisme orthogonal est représentée par une matrice orthogonale dans les bases orthonormées uniquement, et que ceci revient à dire qu'il envoie base orthonormée sur base orthonormée.

### Définition 2.12

Soit  $F \subset E$  un sous-espace vectoriel. Comme  $E = F \oplus F^\perp$ ,  $\forall x \in E$ ,  $\exists!(x_1, x_2) \in F \times F^\perp \mid x = x_1 + x_2$ . On définit alors  $s_F \in \mathcal{L}(E)$  par  $s_F(x) = x_1 - x_2$ . On l'appelle la **symétrie orthogonale** par rapport à  $F$ . Quand  $F$  est un hyperplan de  $E$ , on dit que  $s_F$  est une **réflexion**.

### Proposition 2.9

Toute symétrie orthogonale  $s_F$  est un endomorphisme orthogonal de  $E$  tel que  $s_F^2 = \text{id}_E$ . C'est aussi un endomorphisme auto-adjoint.

De plus, pour tout  $s \in \mathcal{L}(E)$  tel que  $s^2 = \text{id}_E$ , on a

$$s^* = s \iff s \in O(E).$$

Si  $H$  est un hyperplan et si  $u \in H^\perp \setminus \{0\}$ , alors  $s_H(x) = x - 2 \frac{\langle x, u \rangle}{\|u\|^2} u$ .

*Preuve.* Si  $x = x_1 + x_2$  est la décomposition de  $x$  selon la somme directe  $E = F \oplus F^\perp$ , alors  $s_F \circ s_F(x) = s_F(x_1 - x_2) = x_1 + x_2 = x$ . D'où  $s_F \circ s_F = \text{id}_E$ . Soit  $y \in E$ , et soit  $y = y_1 + y_2$  sa décomposition dans  $E = F \oplus F^\perp$ . Nous avons alors

$$\begin{aligned} \langle s(x), y \rangle &= \langle x_1 - x_2, y_1 + y_2 \rangle = \langle x_1, y_1 \rangle - \langle x_2, y_2 \rangle \\ &= \langle x_1 + x_2, y_1 - y_2 \rangle = \langle x, s(y) \rangle. \end{aligned}$$

Ainsi,  $s = s^*$  et en particulier  $ss^* = s^2 = \text{id}_E$  :  $s$  est auto-adjoint et  $s \in O(E)$ .

Supposons maintenant qu'un endomorphisme  $s \in \mathcal{L}(E)$  vérifie  $s^2 = \text{id}_E$  et  $s = s^*$ . On peut lui appliquer le théorème spectral<sup>a</sup>. Puisque  $s$  est auto-adjoint, il est diagonalisable en base orthonormée. Ses valeurs propres sont nécessairement racines de  $X^2 - 1$ , donc valent 1 ou  $-1$ , et donc  $E = E_1(s) \oplus E_{-1}(s)$  et les espaces propres sont orthogonaux. Ceci signifie que  $s = s_F$ , où  $F = E_1(s)$ .

Enfin, si  $H$  est un hyperplan et  $u \in H^\perp$  est non nul, alors  $E = H \oplus \mathbf{R}.u$  et la somme est orthogonale. Par construction, si  $x \in H$ , alors  $s_H(x) = x$  et  $s_H(u) = -u$ . Il s'agit donc bien de la réflexion par rapport à  $H$ .  $\square$

<sup>a</sup> Bien que ce soit un outil bien trop fort pour une situation aussi élémentaire. On sait d'une façon générale que si  $s^2 = \text{id}$ , alors par le lemme des noyaux,  $s$  est la symétrie par rapport  $F := \text{Ker}(s - \text{id})$  et parallèlement à  $G := \text{Ker}(s + \text{id})$ . C'est-à-dire :  $E = F \oplus G$  et  $s(x) = x_1 - x_2$  dans cette décomposition. Il est immédiat de vérifier  $F \perp G$ .

## 2.6 Théorème de Cartan-Dieudonné

### Théorème 2.5

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien et soit  $u \in O(E)$ . Alors, il existe un entier  $k \leq \dim E$  et  $s_1, \dots, s_k \in O(E)$  des réflexions orthogonales telles que  $u = s_k \circ \dots \circ s_1$ .

En théorie des groupes, cela signifie que le groupe orthogonal  $O(E)$  est engendré par les réflexions orthogonales. On a même un contrôle sur le nombre de réflexions nécessaires pour décomposer un élément quelconque de  $O(E)$ .

*Preuve.* On procède par récurrence sur  $n = \dim E$ . La propriété est évidente pour  $n = 1$ . Supposons que pour un entier  $n \geq 1$  donné, pour tout espace euclidien  $F$ , tout  $u \in O(F)$  se décompose comme un produit d'au plus  $n$  réflexions. Soit alors  $E$  un espace euclidien de dimension  $n + 1$  et  $u \in O(E)$ . Si  $u = \text{id}$ , alors pour toute réflexion  $s$ , on a  $s \circ s = \text{id} = u$ . Nous pouvons donc supposer que  $u \neq \text{id}$ . Il existe donc  $x_0 \in E$  tel que  $u(x_0) \neq x_0$ . Puisque  $u \in O(E)$ , on a  $\|u(x_0)\| = \|x_0\|$ . Soit alors  $s_0$  la réflexion par rapport à l'hyperplan  $(u(x_0) - x_0)^\perp$ . Nous avons alors

$$\forall x \in E, s_0(x) = x - 2 \frac{\langle u(x_0) - x_0, x \rangle}{\|u(x_0) - x_0\|^2} (u(x_0) - x_0).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} s_0(x_0) &= x_0 - 2 \frac{\langle u(x_0) - x_0, x_0 \rangle}{\|u(x_0) - x_0\|^2 - 2\langle u(x_0), x_0 \rangle + \|x_0\|^2} (u(x_0) - x_0) \\ &= x_0 - 2 \frac{\langle u(x_0), x_0 \rangle - \|x_0\|^2}{2\|x_0\|^2 - 2\langle u(x_0), x_0 \rangle} (u(x_0) - x_0) \\ &= x_0 + (u(x_0) - x_0) = u(x_0). \end{aligned}$$

Soit alors  $v = s_0 \circ u$ . Nous avons alors par construction  $v(x_0) = x_0$ . Comme  $v \in O(E)$ , si  $H = x_0^\perp$ , on a alors  $v(H) = H$  et  $v|_H$  induit un endomorphisme orthogonal de l'hyperplan  $H$ . On peut alors appliquer l'hypothèse de récurrence à  $v|_H$ . Nous avons alors l'existence de  $k \leq n$  et  $\tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_k \in O(H)$  des réflexions telles que  $v|_H = \tilde{s}_1 \circ \dots \circ \tilde{s}_k$ . On étend alors les réflexions  $\tilde{s}_i$  de  $H$  en des réflexions  $s_i$  de  $E$  déterminées par

$$\begin{aligned} \forall x \in H, s_i(x) &= \tilde{s}_i(x) \\ s_i(x_0) &= x_0 \end{aligned}$$

Comme  $E = H \oplus \mathbf{R}.x_0$  et la somme est orthogonale, ceci définit bien une réflexion orthogonale de  $E^a$ . On vérifie alors que  $v = s_0 \circ u = s_1 \circ \dots \circ s_k$ . Cette égalité est vraie sur  $H$  par construction, mais aussi en  $x_0$  puisque  $v(x_0) = x_0$  et car nous avons défini les  $s_i$  en déclarant qu'ils fixent  $x_0$ . Finalement,  $u = s_0 \circ s_1 \circ \dots \circ s_k$  est le produit de  $k + 1$  réflexions, et  $k + 1 \leq n + 1 = \dim E$ . Ceci prouve donc l'hérédité de la propriété, et termine la preuve par récurrence.  $\square$

*a.* Une réflexion de  $E$  est un élément de  $\mathcal{L}(E)$  tel qu'il existe une base orthonormée dans laquelle

sa matrice est de la forme  $\begin{pmatrix} -1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}$

## 2.7 Endomorphismes orthogonaux en dimension 2 et 3

Rappelons que pour tout entier  $n \geq 2$ , on note  $O_n(\mathbf{R}) = \{M \in M_n(\mathbf{R}) \mid {}^tMM = I_n\}$ . Quelques rappels également :

1. En appliquant le déterminant à la relation  ${}^tMM = I_n$ , on tire que  $\det M^2 = 1$  pour toute  $M \in O_n(\mathbf{R})$ . En particulier, toute matrice orthogonale est inversible, de déterminant  $\pm 1$ .
2. En fait, une matrice  $M \in O_n(\mathbf{R})$  si et seulement si c'est la matrice de passage entre deux bases orthonormées d'un certain espace euclidien de dimension  $n$ .
3. En particulier,  $M$  est dans  $O_n(\mathbf{R})$  si et seulement si c'est la matrice de passage de la base canonique de  $\mathbf{R}^n$  vers une autre base orthonormée de  $\mathbf{R}^n$  avec son produit scalaire standard  $\langle X, Y \rangle = {}^tXY$ . De façon encore équivalente, cela revient à imposer à ses colonnes de former une base orthonormée de  $\mathbf{R}^n$  avec la structure euclidienne standard.

La Proposition 2.8 ramène la compréhension du groupe orthogonal  $O(E)$  d'un espace euclidien quelconque à celle de  $O(n)$ . Dans cette section, on décrit ce dernier dans les cas  $n = 2$  et  $n = 3$ .

Une matrice

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

est dans  $O_2(\mathbf{R})$  si et seulement si  $a^2 + c^2 = b^2 + d^2 = 1$  et  $ab + cd = 0$ . Ceci revient à dire que ses colonnes forment une base orthonormée de  $\mathbf{R}^2$ . Le vecteur  $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$  est normé, ceci revient à dire qu'il existe  $\theta \in \mathbf{R}$  tel que

$$\begin{cases} a = \cos(\theta) \\ c = \sin(\theta) \end{cases}$$

La droite vectorielle orthogonale à  $\begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$  est dirigée par le vecteur normé  $\begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix}$ . Ainsi, un vecteur unitaire  $\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} \in \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}^\perp$  si et seulement si

$$\begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \text{ ou } \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \\ -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Ceci montre ainsi que

$$O_2(\mathbf{R}) = \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}, \theta \in \mathbf{R} \right\}}_{=:SO_2(\mathbf{R})} \cup \underbrace{\left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}, \theta \in \mathbf{R} \right\}}_{=:O_2^-(\mathbf{R})},$$

et la réunion est disjointe.

### Définition 2.13

Soit  $\theta \in \mathbf{R}$ . On appelle matrice de rotation d'angle  $\theta$  modulo  $2\pi$ , et on note  $R_\theta$ , la matrice

$$R_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

On notera également

$$S_\theta = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Ainsi, toute matrice de  $O_2(\mathbf{R})$  est ou bien de la forme  $R_\theta$  ou bien de la forme  $S_\theta$ . On notera que

$$S_\theta = R_\theta \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = R_\theta S_0 = S_0 R_{-\theta}.$$

**Proposition 2.10**

$S_\theta$  est la symétrie orthogonale par rapport à la droite vectorielle

$$D_\theta = \mathbf{R} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \end{pmatrix}.$$

Pour toute  $M \in O_2(\mathbf{R})$ , on a

$$\begin{aligned} \det M = 1 &\iff \exists \theta \in \mathbf{R} \mid M = R_\theta \\ \det M = -1 &\iff \exists \theta \in \mathbf{R} \mid M = S_\theta \end{aligned}$$

**Définition 2.14**

On définit  $SO_2(\mathbf{R}) = \{M \in O_2(\mathbf{R}) \mid \det M = 1\}$  et  $O_2^-(\mathbf{R}) = O_2(\mathbf{R}) \setminus SO_2(\mathbf{R}) = \{M \in O_2(\mathbf{R}) \mid \det M = -1\}$ .

**Proposition 2.11**

Pour tous  $\theta_1, \theta_2 \in \mathbf{R}$ , nous avons

$$\begin{aligned} R_{\theta_1} R_{\theta_2} &= R_{\theta_1 + \theta_2} \\ R_{\theta_1} S_{\theta_2} &= S_{\theta_1 - \theta_2} \\ S_{\theta_1} R_{\theta_2} &= S_{\theta_1 - \theta_2} \\ S_{\theta_1} S_{\theta_2} &= R_{\theta_1 - \theta_2}. \end{aligned}$$

*Preuve.* La première identité est une conséquence des formules donnant  $\cos(\theta_1 \pm \theta_2)$  et  $\sin(\theta_1 \pm \theta_2)$  en fonction de  $\cos(\theta_1)$ ,  $\sin(\theta_1)$ ,  $\cos(\theta_2)$  et  $\sin(\theta_2)$ .

Pour la deuxième, nous avons

$$R_{\theta_1} S_{\theta_2} = R_{\theta_1} R_{\theta_2} S_0 = R_{\theta_1 + \theta_2} S_0 = S_{\theta_1 + \theta_2}.$$

Pour la troisième, on procède similairement

$$S_{\theta_1} R_{\theta_2} = S_0 R_{-\theta_1} R_{\theta_2} = S_0 R_{\theta_2 - \theta_1} = S_{\theta_1 - \theta_2}.$$

Pour la dernière, on écrit que

$$S_{\theta_1} S_{\theta_2} = S_0 R_{-\theta_1} R_{\theta_2} S_0 = S_0 R_{\theta_2 - \theta_1} S_0 = S_0^2 R_{\theta_1 - \theta_2} = R_{\theta_1 - \theta_2}.$$

□

*Remarque 2.6.* On notera que la règle de composition

◦	Rotation	Symétrie
Rotation	Rotation	Symétrie
Symétrie	Symétrie	Rotation

est une conséquence immédiate de la règle de produit des signes. Par exemple, si  $M_1$  est une rotation et  $M_2$  est une symétrie, alors  $\det(M_1 M_2) = \det(M_1) \det(M_2) = -1$ , donc  $M_1 M_2$  est une symétrie en vertu de la Proposition 2.10.

On se place à présent dans un espace euclidien orienté de dimension 3.

### Proposition 2.12

Tout  $u \in \text{SO}(E)$  se met sous la forme

$$\text{Mat}_{(e_i)}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

où  $(e_1, e_2, e_3)$  est une base orthonormée de  $E$ .

*Preuve.* Comme  $\dim E = 3$ , le polynôme caractéristique  $\chi_u$  est de degré 3 et admet donc une racine réelle  $\lambda$ . Si  $v \in E_\lambda(u) \setminus \{0\}$ , alors  $\|u(v)\| = \|v\| = |\lambda|\|v\|$ , d'où  $\lambda = \pm 1$ . Suit alors une petite discussion sur  $\dim E_\lambda(u)$ .

1.  $\dim E_\lambda(u) = 3$  : Alors  $\lambda = 1$  et  $u = \text{id}_E$ .
2.  $\dim E_\lambda(u) = 2$  et  $\lambda = 1$  : Alors  $u$  préserve  $E_\lambda(u)^\perp$  qui est une droite, nécessairement propre. La valeur propre vaut également  $\pm 1$ , mais ceci est exclu car  $u \neq \text{id}_E$  et  $\det(u) = 1$ .
3.  $\dim E_\lambda(u) = 2$  et  $\lambda = -1$  : Le même argument que ci-dessus donne que  $u$  est un renversement.
4.  $\dim E_\lambda(u) = 1$  et  $\lambda = 1$  : L'orthogonal  $P = E_\lambda(u)^\perp$  est un plan  $u$ -invariant et de plus  $u|_P \in \text{SO}(P)$  est une rotation de  $P$ . Il suffit alors de prendre une base orthonormée subordonnée à la somme directe  $E = E_1(u) \oplus P$ .
5.  $\dim E_\lambda(u) = 1$  et  $\lambda = -1$  : L'orthogonal  $P = E_\lambda(u)^\perp$  serait un plan  $u$ -invariant et de plus  $u|_P \in O^-(P)$  une symétrie de  $P$ , contredisant  $\dim E_{-1}(u) = 1$ . Ce cas ne se produit pas.

□

*Remarque 2.7.* L'angle  $\theta$  n'est pas défini modulo  $2\pi$ , ni modulo  $\pi$ . Un autre choix de base peut conduire à  $-\theta$ .

## 3 Dualité linéaire

Dans tout ce chapitre,  $K$  désigne un corps quelconque. On pourra garder en tête principalement les cas de  $\mathbf{R}$  ou  $\mathbf{C}$  (ou encore  $\mathbf{Q}$  ou  $\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}$ ).

### 3.1 Formes linéaires et hyperplans

#### Définition 3.1

Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel. On appelle **forme linéaire** sur  $E$  une application linéaire  $\phi : E \rightarrow K$ . On définit l'**espace dual** de  $E$ , qu'on note  $E^*$ , l'espace  $\mathcal{L}(E, K)$  des formes linéaires sur  $E$ .

*Exemple 3.1.*

1. Si  $E = K^n$ , et si  $a_1, \dots, a_n \in K$ , alors l'application  $f : (x_1, \dots, x_n) \in E \mapsto \sum_{i=1}^n a_i x_i \in K$  est une forme linéaire sur  $E$ .
2. Si  $E = M_n(K)$ , et si  $A \in E$ , alors l'application  $M \in E \mapsto \text{Tr}(AM) \in K$  est une forme linéaire sur  $E$ .
3. Si  $E = K[X]$ , et si  $a \in K$ , alors l'application  $P \in E \mapsto P(a) \in K$  est une forme linéaire sur  $E$ . De même, l'application  $P \in E \mapsto P'(a) \in K$  ou encore  $P \in E \mapsto P^{(k)}(a) \in K$  sont d'autres exemples de formes linéaires.



4. Si  $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{R})$  (avec sa structure usuelle de  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel), alors l'application  $f \in E \mapsto \int_a^b f(t)dt \in \mathbf{R}$  est une forme linéaire sur  $E$ .

### Définition 3.2

Soit  $E$  un espace vectoriel sur  $K$ . On appelle **hyperplan de  $E$**  tout sous-espace vectoriel  $H \subset E$  tel qu'il existe une droite vectorielle  $D$  telle que  $E = H \oplus D$ .

En particulier, si  $E$  est de dimension finie, alors un hyperplan de  $E$  est un sous-espace de dimension  $\dim E - 1$ .

### Proposition 3.1

Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel. Un sous-espace vectoriel  $H \subset E$  est un hyperplan si et seulement s'il existe une forme linéaire  $\phi \in E^* \setminus \{0\}$  telle que  $H = \text{Ker } \phi$ .

*Preuve.* Soit  $H$  un sous-espace de  $E$ . Supposons que  $H$  est un hyperplan. Alors, par définition, il existe une droite  $D$  supplémentaire à  $H$ . Soit  $x_0 \in D \setminus \{0\}$ . Alors,  $D = K.x_0$  et donc, pour tout  $x \in E$ , il existe un unique  $x_H \in H$  et un unique  $\lambda_x \in K$  tels que  $x = x_H + \lambda_x x_0$ . Comme  $\lambda_x$  est unique, on dispose d'une application

$$\begin{aligned} \phi : E &\longrightarrow K \\ x &\longmapsto \lambda_x. \end{aligned}$$

On vérifie que  $\phi$  est linéaire. Soient  $x, y \in E$  et  $\alpha \in K$ . Alors, il existe  $x_H, y_H \in H$  uniques tels que  $x = x_H + \phi(x).x_0$  et  $y = y_H + \phi(y).x_0$ . On a alors  $x + \alpha y = x_H + \phi(x).x_0 + \alpha(y_H + \phi(y).x_0) = x_H + \alpha.y_H + (\phi(x) + \alpha\phi(y)).x_0$ . Comme  $x_H + \alpha.y_H \in H$ , on a  $\phi(x + \alpha y).x_0 = (\phi(x) + \alpha\phi(y)).x_0$  par unicité de la décomposition selon  $E = H \oplus D$ , d'où  $\phi(x + \alpha y) = \phi(x) + \alpha\phi(y)$ , ce qui montre que  $\phi$  est linéaire. Par définition,  $\phi(x) = 0 \iff x \in H$ , ce qui signifie  $H = \text{Ker } \phi$ .

Supposons à présent qu'il existe  $\phi \in E^* \setminus \{0\}$  telle que  $H = \text{Ker}(\phi)$ . Comme  $\phi \neq 0$ , il existe  $x_0 \in E$  tel que  $\phi(x_0) \neq 0$ . Montrons que  $E = H \oplus K.x_0$ . Soit  $x \in H \cap K.x_0$ . Alors, il existe  $\lambda \in K$  tel que  $x = \lambda.x_0$  d'une part, et d'autre part,  $\phi(x) = \lambda\phi(x_0) = 0$ , d'où  $\lambda = 0$ , d'où  $x = 0$ . Si  $x \in E$ , alors

$$\phi \left( x - \frac{\phi(x)}{\phi(x_0)} x_0 \right) = 0,$$

montrant que  $x - \frac{\phi(x)}{\phi(x_0)} x_0 \in \text{Ker } \phi$ . Ainsi, comme  $x = (x - \frac{\phi(x)}{\phi(x_0)} x_0) + \frac{\phi(x)}{\phi(x_0)} x_0$ , ceci montre que  $E = \text{Ker } \phi + K.x_0$ , et  $\text{Ker } \phi$  est bien un hyperplan de  $E$ .  $\square$

*Remarque 3.1.* Pour toute  $\phi \in E^*$ ,  $\phi \neq 0 \iff \text{Im}(\phi) = K$ . En dimension finie, le théorème du rang nous donne donc directement que  $\text{Ker } \phi$  est de dimension  $\dim E - 1$  dès que  $\phi$  est non-nulle.

*Remarque 3.2.* Si  $H = \text{Ker } \phi_1 = \text{Ker } \phi_2$  pour  $\phi_1, \phi_2 \in E^*$ , alors il existe  $\lambda \in K^*$  tel que  $\phi_2 = \lambda\phi_1$  (cf TD3).

**On suppose désormais que  $E$  est de dimension finie, et on note  $n = \dim E$ .**

## 3.2 Base duale, base antéduale

On commence par observer que  $E^*$  est de dimension finie et

$$\dim E^* = \dim \mathcal{L}(E, K) = \dim E.$$

**Proposition 3.2**

Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . On note, pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $e_j^* \in E^*$  la forme linéaire définie par

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, e_j^*(e_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Alors,  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  est une base de  $E^*$ .

*Preuve.* Comme  $\dim E^* = n$ , il nous suffit de vérifier que  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  est libre. Prenons  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$  tels que  $\lambda_1 e_1^* + \dots + \lambda_n e_n^* = 0$ . Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , en évaluant cette identité sur  $x = e_i$ , on obtient  $\lambda_i = 0$  par définition des  $e_i^*$ .  $\square$

**Définition 3.3**

Étant donnée  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ , la base  $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$  telle que définie dans la Proposition 3.2 est appelée **base duale** de  $(e_1, \dots, e_n)$ .

*Remarque 3.3.* On prendra garde au fait que la notation peut être trompeuse. C'est à partir de **toute** la base  $(e_1, \dots, e_n)$  qu'on définit les  $e_j^*$ . Par exemple, en dimension 2, si  $(e_1, e_2)$  est une base de  $E$ , alors  $(e_1, e_1 + e_2)$  aussi, et si  $(e_1^*, e_2^*)$  est la base duale de  $(e_1, e_2)$ , alors celle de  $(e_1, e_1 + e_2)$  est  $(e_1^* - e_2^*, e_2^*)$ . Donc, l'élément  $e_1^*$  dépend de  $e_1$  **et de**  $e_2$ , et pas juste de  $e_1$ .

*Exemple 3.2.* Soit  $E = K^n$ , et soit  $(e_1, \dots, e_n)$  la base canonique. Alors sa base duale  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  est caractérisée par

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, \forall x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^n, e_i^*(x) = x_i.$$

Ainsi  $e_i^* : K^n \rightarrow K$  est la  $i$ -ème application coordonnée.

*Exemple 3.3.* Soit  $E = K_n[X]$  et soit  $\mathcal{B} = (P_0, \dots, P_n) = (1, X, \dots, X^n)$  la base canonique. On définit  $\phi_0, \dots, \phi_n \in E^*$  par

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \forall P \in E, \phi_k(P) = \frac{1}{k!} P^{(k)}(0).$$

Alors,  $\mathcal{B}^* = (\phi_0, \dots, \phi_n)$ .

**Proposition 3.3**

Soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$  et soit  $\mathcal{B}^* = (e_1^*, \dots, e_n^*)$  sa base duale. Alors, nous avons

$$\forall x \in E, x = \sum_{k=1}^n e_k^*(x) e_k$$

$$\forall \phi \in E^*, \phi = \sum_{k=1}^n \phi(e_k) e_k^*.$$

Dit autrement, les coordonnées de  $x$  dans la base  $(e_i)$  sont  $(e_1^*(x), \dots, e_n^*(x)) \in K^n$ , et celles de  $\phi$  dans la base  $(e_i^*)$  sont données par  $(\phi(e_1), \dots, \phi(e_n)) \in K^n$ .

*Preuve.* Soit  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$  le vecteur coordonnées de  $x$  dans la base  $(e_i)$ . Nous avons  $x = \sum_{k=1}^n \lambda_k e_k$ . Pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , en appliquant  $e_i^*$  à cette égalité, nous obtenons  $e_i^*(x) = \lambda_i$ , d'où la première identité.

Soit  $(\mu_1, \dots, \mu_n)$  le vecteur coordonnées de  $\phi$  dans la base  $(e_i^*)$ . Nous avons  $\phi = \sum_{k=1}^n \mu_k e_k^*$ . En évaluant ces deux formes linéaires égales sur le vecteur  $e_i$ , pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , nous obtenons  $\phi(e_i) = \mu_i$ , d'où la deuxième identité.  $\square$

*Remarque 3.4.* Dans le cas de  $K^n$  et de sa base canonique  $(e_1, \dots, e_n)$ , la relation  $x = \sum_{i=1}^n e_i^*(x)e_i$  n'est rien d'autre que la décomposition évidente  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ .

*Remarque 3.5.* Dans le cas de  $K_n[X]$  et de sa base canonique  $(1, X, \dots, X^n)$ , la relation  $x = \sum_{i=1}^n e_i^*(x)e_i$  se traduit par la formule de Taylor  $P(X) = \sum_{k=0}^n \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$ .

### Théorème 3.1 (Base antéduale)

Soit  $(\phi_1, \dots, \phi_n)$  une base quelconque de  $E^*$ . Alors, il existe une unique base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  telle que  $\mathcal{B}^* = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ .

*Preuve.* On se donne une base  $(\phi_1, \dots, \phi_n)$  de  $E^*$ . Considérons l'application

$$\begin{aligned} \Phi : E &\longrightarrow K^n \\ x &\longmapsto (\phi_1(x), \dots, \phi_n(x)). \end{aligned}$$

Alors,  $\Phi$  est linéaire par linéarité des  $\phi_i$ .

**Fait :**  $\Phi$  est injective.

En effet, si  $x \in \text{Ker } \Phi$ , c'est que  $\phi_i(x) = 0$  pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Par conséquent, si  $\phi \in E^*$  est quelconque, alors elle s'écrit  $\phi = \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi_i$ , avec  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in K$ , et donc  $\phi(x) = \sum_{i=1}^n \lambda_i \phi_i(x) = 0$  pour toute forme linéaire. On conclut  $\text{Ker } \Phi = \{0\}$  avec le lemme suivant.

#### Lemme 3.1

Soit  $x \in E$  tel que  $\forall \phi \in E^*, \phi(x) = 0$ . Alors  $x = 0$ .

*Preuve du lemme.* On procède par contraposée. Supposons que  $x \neq 0$ . Alors  $D = K.x$  est une droite vectorielle. Soit  $H \subset E$  un hyperplan supplémentaire à  $D$ . D'après la Proposition 3.1, il existe  $\phi \in E^*$  telle que  $H = \text{Ker } \Phi$ . Comme  $x \notin H$ , on a  $\phi(x) \neq 0$ .  $\square$

Ainsi,  $\Phi : E \rightarrow K^n$  est injective. Comme  $\dim E = \dim K^n$ ,  $\Phi$  est un isomorphisme. Notons  $(\varepsilon_i)$  la base canonique de  $K^n$  et définissons pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $e_i = \Phi^{-1}(\varepsilon_i)$ . Alors,  $\mathcal{B} := (e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$  car image de la base  $(\varepsilon_i)$  de  $K^n$  par l'isomorphisme  $\Phi^{-1}$ . Vérifions que  $\mathcal{B}^* = (\phi_1, \dots, \phi_n)$ .

Soient  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Alors,  $\Phi(e_i) = (\phi_1(e_i), \dots, \phi_n(e_i)) = \varepsilon_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)$  avec le 1 en  $i$ -ème position. Ainsi,  $\phi_j(e_i) = 0$  si  $j \neq i$  et  $\phi_i(e_i) = 1$ . On a donc bien  $\phi_j = e_j^*$  pour tout  $j$ , ce qui montre l'existence de la base  $\mathcal{B}$  annoncée.

L'unicité suit directement de la preuve précédente. En effet, une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  de  $E$  est telle que  $\mathcal{B}^* = (\phi_1, \dots, \phi_n)$  si et seulement si  $\Phi(e_i) = \varepsilon_i$  pour tout  $i$ . Comme nous avons montré que  $\Phi$  est injective, il n'y a donc qu'un seul choix pour  $\mathcal{B}$ .  $\square$

### Définition 3.4

Si  $(\phi_1, \dots, \phi_n)$  est une base de  $E^*$ , l'unique base  $(e_1, \dots, e_n)$  donnée par le Théorème 3.1 est appelée **base antéduale** de  $(\phi_1, \dots, \phi_n)$ .

Formellement, nous avons construit une application

$$\mathcal{D} : \begin{array}{ccc} \{\text{Bases de } E\} & \longrightarrow & \{\text{Bases de } E^*\} \\ \mathcal{B} & \mapsto & \mathcal{B}^* \end{array}$$

et nous venons de voir que c'est une bijection.

La proposition suivante permet de montrer très efficacement qu'une famille de  $E$  ou de  $E^*$  est libre.

### Proposition 3.4

Soit  $(e_1, \dots, e_k)$  une famille de vecteurs de  $E$  et soit  $(\phi_1, \dots, \phi_k)$  une famille de formes linéaires de  $E^*$ . Supposons

$$\forall i, j \in \llbracket 1, k \rrbracket, \phi_i(e_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Alors  $(e_1, \dots, e_k)$  et  $(\phi_1, \dots, \phi_k)$  sont libres. En particulier, si  $k = n = \dim E$ , alors ce sont des bases de  $E$  et  $E^*$  respectivement, et  $(\phi_1, \dots, \phi_n)$  est la base duale de  $(e_1, \dots, e_n)$ .

*Remarque 3.6.* Cette proposition est l'analogie de la propriété des espaces euclidiens qui assure qu'une famille orthonormée de vecteurs d'un espace euclidien est toujours libre. La preuve est similaire.

*Preuve.* Soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$  tels que  $\sum_{i=1}^k \lambda_i e_i = 0$ . Alors, pour tout  $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$ , on a  $0 = \phi_j \left( \sum_{i=1}^k \lambda_i e_i \right) = \lambda_j$ . La famille  $(e_1, \dots, e_k)$  est donc libre.

Si on suppose maintenant  $\sum_{i=1}^k \lambda_i \phi_i = 0$ , alors pour tout  $j \in \llbracket 1, k \rrbracket$ , on a  $0 = \left( \sum_{i=1}^k \lambda_i \phi_i \right) (e_j) = \lambda_j$ . La famille  $(\phi_1, \dots, \phi_k)$  est donc libre.  $\square$

*Exemple 3.4* (Polynômes interpolateurs de Lagrange). Soit  $E = K_n[X]$  et soit  $a_0, \dots, a_n \in K$  deux-à-deux distincts. Pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , on note  $\phi_i \in E^*$  la forme linéaire définie par  $\phi_i(P) = P(a_i)$  pour tout  $P \in K_n[X]$ , et on note  $P_i \in E$  le polynôme

$$P_i(X) = \prod_{\substack{0 \leq j \leq n \\ j \neq i}} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

On vérifie que  $\phi_i(P_j) = \delta_{ij}$ . Comme  $\dim E = n + 1$ , ceci montre que  $(\phi_0, \dots, \phi_n)$  est une base de  $E^*$ , dont la base antéduale est  $(P_0, \dots, P_n)$ .

La Proposition 3.3 nous donne alors que les coordonnées d'un polynôme  $P \in K_n[X]$  dans la base  $(P_0, \dots, P_n)$  sont données par  $(P(a_0), \dots, P(a_n))$ . En particulier, pour tous  $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in K$ , il existe un unique polynôme  $P$  de degré au plus  $n$  tel que  $P(a_i) = \lambda_i$  pour tout  $i \in \llbracket 0, n \rrbracket$ , à savoir  $P = \sum_i \lambda_i P_i$ .

## 3.3 Orthogonal dual

On note toujours  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie et  $E^*$  son espace dual.

### Définition 3.5

Soit  $A \subset E$  une partie quelconque de  $E$ . On définit son **orthogonal dual** comme étant le sous-espace  $A^\perp \subset E^*$  défini par

$$A^\perp = \{\phi \in E^* \mid \forall x \in A, \phi(x) = 0\}.$$

Si  $B \subset E^*$  est un sous-espace vectoriel, on définit similairement son orthogonal dual dans  $E$  comme étant le sous-espace  $B^\circ \subset E$  défini par

$$B^\circ = \{x \in E \mid \forall \phi \in B, \phi(x) = 0\}.$$

*Remarque 3.7. Attention :* L'orthogonal dual de  $A$  de  $E$  n'est pas inclus dans  $E$  mais dans  $E^*$ . Ainsi,  $A$  et  $A^\perp$  ne sont pas contenu dans le même espace vectoriel.

On retrouve des propriétés très similaires à celles qu'on a vu en géométrie euclidienne.

### Proposition 3.5

Pour toutes parties  $A_1, A_2 \subset E$ , et  $B_1, B_2 \subset E^*$ , on a

1.  $A_1 \subset A_2 \Rightarrow A_2^\perp \subset A_1^\perp$ .
2.  $B_1 \subset B_2 \Rightarrow B_2^\circ \subset B_1^\circ$ .

On a également, pour tous  $A \subset E$  et  $B \subset E^*$ ,

$$A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp \text{ et } B^\circ = \text{Vect}(B)^\circ.$$

*Preuve.* Supposons  $A_1 \subset A_2$ . Soit  $\phi \in A_2^\perp$  et soit  $x \in A_1$ . Alors,  $x \in A_2$  et donc  $\phi(x) = 0$ . D'où  $\phi \in A_1^\perp$ . L'autre identité se prouve similairement.

Soit  $A \subset E$ . Comme  $A \subset \text{Vect}(A)$ , nous avons  $\text{Vect}(A)^\perp \subset A^\perp$  d'après ce qui précède. On montre l'autre inclusion. Soit  $\phi \in A^\perp$  et soit  $x \in \text{Vect}(A)$ . Alors, il existe  $x_1, \dots, x_k \in A$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in K$ , tels que  $x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$ . On en déduit par linéarité de  $\phi$  que  $\phi(x) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \phi(x_i) = 0$  puisque  $\phi(x_i) = 0$  pour tout  $i$ . Ainsi  $\phi \in \text{Vect}(A)^\perp$ , ce qui montre l'inclusion attendue. L'autre identité se prouve similairement.  $\square$

### Utilisation des bases.

#### Proposition 3.6

Soit  $F \subset E$  un sous-espace vectoriel de dimension  $p$ . Soit  $(e_1, \dots, e_p)$  une base de  $F$  telle que  $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ . Soit  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  sa base duale. Alors,  $F^\perp = \text{Vect}(e_{p+1}^*, \dots, e_n^*)$ .

Soit  $G \subset E^*$  un sous-espace vectoriel de dimension  $q$ . Soit  $(\phi_1, \dots, \phi_q)$  une base de  $G$  telle que  $G = \text{Vect}(\phi_1, \dots, \phi_q)$ . Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  sa base antéduale. Alors,  $G^\circ = \text{Vect}(e_{q+1}, \dots, e_n)$ .

*Remarque 3.8.* On notera l'analogie très forte avec les espaces euclidiens. Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace euclidien, et  $F \subset E$  un sous-espace vectoriel. Si  $(e_1, \dots, e_p)$  est une base orthonormée de  $F$  telle que  $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ , alors l'orthogonal **euclidien** de  $F$  est donné par  $F^\perp = \text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$ . Nous verrons une explication de cette similarité au chapitre suivant.

*Preuve.* On donne la preuve pour le premier point, le deuxième se montrant similairement. On procède par double inclusion.

Soit  $\phi \in F^\perp$ . D'après la Proposition 3.3, nous avons  $\phi = \sum_{i=1}^n \phi(e_i) e_i^*$ . Comme  $e_1, \dots, e_p \in F$ , on a  $\phi(e_1) = \dots = \phi(e_p) = 0$ , et donc  $\phi \in \text{Vect}(e_{p+1}^*, \dots, e_n^*)$ .

Inversement, soit  $\phi \in \text{Vect}(e_{p+1}^*, \dots, e_n^*)$ . On écrit  $\phi = \sum_{i=p+1}^n \lambda_i e_i^*$  et on a

$\phi(e_j) = 0$  pour tout  $j \in \llbracket 1, p \rrbracket$  par définition de la base duale. Ainsi,  $\phi \in \{e_1, \dots, e_p\}^\perp = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)^\perp = F^\perp$ .  $\square$

### Corollaire 3.1

Pour tous sous-espaces  $F \subset E$  et  $G \subset E^*$ , on a  $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$  et  $\dim G^\circ = \dim E - \dim G$ .

On a également  $(F^\perp)^\circ = F$  et  $(G^\circ)^\perp = G$ .

*Preuve.* Rappelons <sup>a</sup> que si  $p = \dim F$ , on peut toujours choisir une base  $(e_1, \dots, e_p)$  de  $F$  telle que  $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ . Le calcul des dimensions est alors immédiat avec la proposition précédente.

Nous obtenons en particulier que  $\dim((F^\perp)^\circ) = \dim F$  et  $\dim((G^\circ)^\perp) = \dim G$ . Il suffit donc à chaque fois de montrer une seule inclusion. Dans le premier cas, si  $x \in F$ , alors quel que soit  $\phi \in F^\perp$ ,  $\phi(x) = 0$ . Donc  $x \in (F^\perp)^\circ$ . Dans le deuxième, si  $\phi \in G$ , alors quel que soit  $x \in G^\circ$ ,  $\phi(x) = 0$ . Donc  $\phi \in (G^\circ)^\perp$ .  $\square$

<sup>a</sup>. On commence par choisir une base de  $F$ , qu'on complète ensuite en une base de  $E$ .

## 3.4 Intersection d'hyperplans. Interprétation des systèmes linéaires en dualité.

Rappelons que dans un espace vectoriel quelconque, si  $x_1, \dots, x_k$  sont des vecteurs, le rang de la famille  $(x_1, \dots, x_k)$  se définit par  $\text{Rg}(x_1, \dots, x_k) = \dim \text{Vect}(x_1, \dots, x_k)$ .

Reprenons  $E$  de dimension finie égale à  $n$ .

### Proposition 3.7

Soit  $p \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . Soit  $\phi_1, \dots, \phi_p \in E^*$ . Alors,

$$\dim \left( \bigcap_{i=1}^p \text{Ker}(\phi_i) \right) = n - \text{Rg}(\phi_1, \dots, \phi_p).$$

En particulier, si  $(\phi_1, \dots, \phi_p)$  est libre,  $\dim(\bigcap_{i=1}^p \text{Ker}(\phi_i)) = n - p$ .

Inversement, si  $F \subset E$  est un sous-espace de dimension  $n - p$ , alors il existe  $\phi_1, \dots, \phi_p$  linéairement indépendantes telles que  $F = \bigcap_{i=1}^p \text{Ker}(\phi_i)$ .

*Preuve.* Ceci repose sur la propriété suivante qu'on commence par vérifier.

### Lemme 3.2

Pour toutes formes linéaires  $\phi_1, \dots, \phi_p \in E^*$ ,

$$\bigcap_{i=1}^p \text{Ker}(\phi_i) = (\text{Vect}(\phi_1, \dots, \phi_p))^\circ.$$

*Démonstration.* On procède par double inclusion. Soient  $x \in \bigcap_{i=1}^p \text{Ker}(\phi_i)$  et  $\phi \in \text{Vect}(\phi_1, \dots, \phi_p)$ . Alors, il existe  $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in K$  tels que  $\phi = \sum_{i=1}^p \lambda_i \phi_i$ . On a alors  $\phi(x) = \sum_{i=1}^p \lambda_i \phi_i(x) = 0$ , d'où  $x \in (\text{Vect}(\phi_1, \dots, \phi_p))^\circ$ . Pour l'autre inclusion, pour tout  $i$ , comme  $\{\phi_i\} \subset \text{Vect}(\phi_1, \dots, \phi_p)$ , la Proposition 3.5 nous donne  $(\text{Vect}(\phi_1, \dots, \phi_p))^\circ \subset \{\phi_i\}^\circ = \text{Ker}(\phi_i)$ . D'où  $(\text{Vect}(\phi_1, \dots, \phi_p))^\circ \subset \bigcap_{i=1}^p \text{Ker}(\phi_i)$ .  $\square$

Ainsi, la dimension de  $\bigcap_{i=1}^p \text{Ker}(\phi_i)$  est celle de  $(\text{Vect}(\phi_1, \dots, \phi_p))^\circ$ , c'est-à-dire

$n - \text{Rg}(\phi_1, \dots, \phi_p)$  d'après le Corollaire 3.1.

Soit  $F \subset E$  un sous-espace de dimension  $n - p$ . Alors  $\dim F^\perp = p$  d'après le Corollaire 3.1. Soit  $(\phi_1, \dots, \phi_p)$  une base de  $F^\perp$ . Or  $F = (F^\perp)^\circ$  toujours d'après le Corollaire 3.1, et ainsi  $F = (\text{Vect}(\phi_1, \dots, \phi_p))^\circ = \bigcap_{i=1}^p \text{Ker}(\phi_i)$ .  $\square$

*Exemple 3.5.* Si  $E = K^n$ , alors toute forme linéaire  $\phi \in E^*$  s'écrit  $\phi(x) = \sum_{i=1}^n a_i x_i$  où  $a_k = \phi(e_k)$ , si  $(e_1, \dots, e_n)$  désigne la base canonique de  $K^n$ . Ainsi, un vecteur  $x = (x_1, \dots, x_n)$  est dans  $F = \bigcap_{i=1}^p \text{Ker}(\phi_i)$  si et seulement si ses coordonnées sont solutions du système linéaire à  $p$  équations

$$(S) \begin{cases} \phi_1(x) = 0 \\ \vdots \\ \phi_p(x) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{p1}x_1 + \dots + a_{pn}x_n = 0 \end{cases}$$

où  $a_{ij} = \phi_i(e_j)$ . Ainsi,  $F$  est l'espace des solutions du système linéaire homogène  $(S)$ . La proposition nous dit alors que la dimension de l'espace solution d'un système général est donnée par

$$\underbrace{\text{Nombre d'inconnues}}_{=n} - \underbrace{\text{Nombre d'équations linéairement indépendantes}}_{=\text{Rg}(\phi_1, \dots, \phi_p)}$$

### 3.5 Transposée d'une application linéaire

Dans ce dernier paragraphe, on note  $E_1, E_2$  deux  $K$ -espaces vectoriels de dimension  $n$  et  $p$  respectivement. Soit  $u \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ . Alors, pour tout  $\phi \in E_2^* = \mathcal{L}(E_2, K)$ ,  $\phi \circ u \in \mathcal{L}(E_1, K) = E_1^*$ , puisque la composée de deux applications linéaires est linéaire. De plus, pour tous  $\phi_1, \phi_2 \in E_2^*$  et  $\lambda \in K$ , nous avons  $(\phi_1 + \lambda\phi_2) \circ u = \phi_1 \circ u + \lambda\phi_2 \circ u$ , ce qui signifie que la correspondance  $\phi \in E_2^* \mapsto \phi \circ u \in E_1^*$  est linéaire.

#### Définition 3.6

Soit  $u \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ . On appelle transposée de  $u$ , et on note  ${}^t u \in \mathcal{L}(E_2^*, E_1^*)$ , l'application linéaire définie par

$$\begin{aligned} {}^t u : E_2^* &\longrightarrow E_1^* \\ \phi &\longmapsto \phi \circ u \end{aligned}$$

#### Proposition 3.8

Soit  $u \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ . Soient  $\mathcal{B}_1$  une base de  $E_1$ ,  $\mathcal{B}_2$  une base de  $E_2$ . Alors,

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}_2^*, \mathcal{B}_1^*}({}^t u) = {}^t(\text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(u)).$$

*Remarque 3.9.* On notera que dans le terme de gauche, la transposée  ${}^t$  est celle d'une application linéaire, alors que dans le terme de droite, c'est celle des matrices.

*Preuve.* On écrit  $\mathcal{B}_1 = (e_1, \dots, e_n)$  et  $\mathcal{B}_2 = (f_1, \dots, f_p)$ . Soit  $M = (m_{ij}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2}(u)$ . Nous avons par définition, et en vertu de la Proposition 3.3,  $m_{ij} = f_i^*(u(e_j))$  pour tous  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$  et  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ . D'où  $m_{ij} = [{}^t u(f_i^*)](e_j)$ . Si on note  $N = (n_{kl}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}_2^*, \mathcal{B}_1^*}({}^t u)$ , alors pour tout  $k \in \llbracket 1, p \rrbracket$  et  $l \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $n_{kl} = [{}^t u(f_l^*)](e_k)$  toujours d'après la Proposition 3.3. Ainsi,  $n_{kl} = m_{lk}$ , d'où la proposition.  $\square$

En conséquence directe de cette interprétation matricielle, nous avons :

### Corollaire 3.2

Pour tout  $u \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ , on a  $\text{Rg}({}^t u) = \text{Rg}(u)$ .

Si  $E_3$  est un troisième espace vectoriel, et si  $v \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$  et  $u \in \mathcal{L}(E_2, E_3)$ , alors  ${}^t(u \circ v) = {}^t v \circ {}^t u \in \mathcal{L}(E_3^*, E_1^*)$ .

Si  $E_1 = E_2 = E$  et si  $u \in \mathcal{L}(E)$ , alors  $\chi_{{}^t u} = \chi_u \in K_n[X]$ , où ces derniers désignent les polynômes caractéristiques de  ${}^t u$  et  $u$  respectivement.

### Proposition 3.9

Soit  $u \in \mathcal{L}(E_1, E_2)$ . Alors

1.  $\text{Im}({}^t u) = \text{Ker}(u)^\perp$ .
2.  $\text{Ker}({}^t u) = \text{Im}(u)^\perp$ .

*Preuve.* Pour le premier point, on montre d'abord l'inclusion  $\square$ . Soit  $\phi \in \text{Im}({}^t u) \subset E_1^*$ . Alors, il existe  $\psi \in E_2^*$  telle que  $\phi = \psi \circ u$ . Soit  $x \in \text{Ker}(u) \subset E_1$ . Alors,  $\phi(x) = [\psi \circ u](x) = \psi(u(x)) = 0$ . Ceci quel que soit  $x \in \text{Ker}(u)$ , donc  $\phi \in \text{Ker}(u)^\perp$ . On examine maintenant les dimensions. Nous avons  $\dim \text{Im}({}^t u) = \text{Rg}({}^t u) = \text{Rg}(u) = \dim E_1 - \dim \text{Ker}(u) = \dim \text{Ker}(u)^\perp$ . On a donc une inclusion et égalité des dimensions, d'où la première égalité.

Pour la deuxième, nous avons, pour tout  $\psi \in E_2^*$ ,

$$\psi \in \text{Ker}({}^t u) \iff \psi \circ u = 0 \iff \text{Im}(u) \subset \text{Ker} \psi \iff \psi \in \text{Im}(u)^\perp.$$

D'où l'égalité recherchée.  $\square$

## 4 Formes bilinéaires et formes quadratiques sur un espace vectoriel réel

Dans tout ce chapitre,  $E$  désigne un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, égale à  $n$ .

### 4.1 Formes bilinéaires

#### Définition 4.1

On appelle **forme bilinéaire** sur  $E$  toute application  $b : E \times E \rightarrow \mathbf{R}$  telle que, si on définit pour  $x, y \in E$ ,  $\phi_x : E \rightarrow \mathbf{R}$  et  $\psi_y : E \rightarrow \mathbf{R}$  par  $\forall z \in E$

$$\begin{aligned}\phi_x(z) &= b(x, z) \\ \psi_y(z) &= b(z, y),\end{aligned}$$

alors  $\phi_x$  et  $\psi_y$  sont des formes linéaires.

*Remarque 4.1.* Cela revient à imposer pour tous  $x, y, z \in E$  et pour tout  $\lambda \in \mathbf{R}$ ,

- $b(x, y + \lambda z) = b(x, y) + \lambda b(x, z)$  (linéarité de  $\phi_x$ )
- $b(x + \lambda z, y) = b(x, y) + \lambda b(z, y)$  (linéarité de  $\psi_y$ ).

#### Définition 4.2

Une forme bilinéaire  $b : E \times E \rightarrow \mathbf{R}$  est dite **symétrique** si

$$\forall x, y \in E, b(x, y) = b(y, x).$$

- Exemple 4.1.*
1. Tout produit scalaire  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  sur  $E$  est un cas particulier de forme bilinéaire symétrique.
  2. Sur  $E = \mathbf{R}^2$ , on définit une forme bilinéaire symétrique en posant pour tous  $x = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$  et  $y = (y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2$ ,  $b(x, y) = x_1y_1 - x_2y_2$ . Par contre,  $b$  n'est pas un produit scalaire puisque, en notant  $(e_1, e_2)$  la base canonique,  $b(e_2, e_2) = -1 < 0$ .
  3. Toujours sur  $E = \mathbf{R}^2$ , l'expression  $b(x, y) = x_1y_1$  définit une forme bilinéaire symétrique, et ce n'est pas non plus un produit scalaire puisque  $b(e_2, e_2) = 0$ .
  4. Toujours sur  $E = \mathbf{R}^2$ , l'expression  $b(x, y) = x_1y_2 - x_2y_1$  définit une forme bilinéaire, mais elle n'est pas symétrique puisqu'on a  $b(y, x) = -b(x, y)$ .

## 4.2 Formes quadratiques réelles

### Définition 4.3

On appelle **forme quadratique** sur  $E$  toute application  $q : E \rightarrow \mathbf{R}$  telle qu'il existe une forme bilinéaire symétrique  $b : E \times E \rightarrow \mathbf{R}$  telle que

$$\forall x \in E, q(x) = b(x, x).$$

### Proposition 4.1

Si  $q$  est une forme quadratique, alors la forme bilinéaire  $b$  associée est unique, déterminée par les **formules de polarisation**

$$\begin{aligned} b(x, y) &= \frac{1}{2}(q(x+y) - q(x) - q(y)) \\ &= \frac{1}{4}(q(x+y) - q(x-y)). \end{aligned}$$

On dit alors que  $b$  est la **forme polaire** de  $q$ .

*Preuve.* Si  $b$  est telle que  $q(x) = b(x, x)$ , alors on peut développer, par bilinéarité et symétrie de  $b$ , pour obtenir  $q(x+y) = b(x+y, x+y) = b(x, x) + 2b(x, y) + b(y, y) = q(x) + 2b(x, y) + q(y)$ . Similairement,  $q(x-y) = q(x) - 2b(x, y) + q(y)$ . Les deux formules de polarisation s'en déduisent immédiatement.  $\square$

- Exemple 4.2.*
1. Sur  $E = \mathbf{R}^3$ ,  $q(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$  est une forme quadratique de forme polaire  $b$  définie par  $b(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 - x_3y_3$ .
  2. Sur  $E = \mathbf{R}^n$ , toute expression du type  $x_i^2$  se polarise en  $x_iy_i$ . Une expression du type  $x_ix_j$  se polarise en  $\frac{1}{2}(x_iy_j + x_jy_i)$ .
  3. Sur  $E = M_n(\mathbf{R})$ , l'application  $q(M) = \text{Tr}(M^2)$  est une forme quadratique dont la forme polaire est définie par  $b(M, N) = \text{Tr}(MN)$ .

### Proposition 4.2

Si  $E = \mathbf{R}^n$ , alors une application  $q : \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}$  est une forme quadratique si et seulement si  $q$  est un polynôme de  $n$  variables, homogène de degré 2.

*Preuve.* Supposons que  $q$  est une forme quadratique. Soit  $b$  sa forme polaire. Alors, en notant, pour tous  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $a_{ij} = b(e_i, e_j)$ , nous avons

$$q(x) = b\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{i=1}^n x_i e_i\right) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} b(x_i e_i, x_j e_j) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i x_j,$$

montrant que  $q$  est bien une expression polynomiale homogène de degré 2 en les  $x_i$ .

Inversement, supposons que  $q$  est polynomiale homogène de degré 2 en les  $x_i$ . Il existe donc  $(\alpha_{ij})_{1 \leq i < j \leq n}$  des réels tels que  $q(x) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_{ij} x_i x_j$ . Définissons alors

$$b(x, y) := \sum_{1 \leq i < j \leq n} \frac{1}{2} \alpha_{ij} (x_i y_j + x_j y_i).$$

On vérifie immédiatement que  $b$  est une forme bilinéaire symétrique sur  $\mathbf{R}^n$ , et que  $q(x) = b(x, x)$ .  $\square$

- Exemple 4.3. 1. L'expression  $x_1 x_3 + x_2^2 - x_5 x_7$  définit une forme quadratique sur  $E = \mathbf{R}^7$ .
2. L'expression  $x_1^3 + x_2^2 - x_3^2$  ne définit pas une forme quadratique sur  $E = \mathbf{R}^3$ .
3. L'expression  $x_1^2 + x_2 + x_3 x_4$  ne définit pas une forme quadratique sur  $E = \mathbf{R}^4$ .

### 4.3 Matrice d'une forme quadratique. Expression en coordonnées.

#### Définition 4.4

Soit  $q$  une forme quadratique sur  $E$ , de forme polaire  $b$ . Soit  $(e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . On appelle matrice de  $q$  dans la base  $(e_i)$ , et on note  $\text{Mat}_{(e_i)}(q)$ , la matrice **symétrique**  $A \in S_n(\mathbf{R})$  dont les entrées sont  $\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $A_{ij} = b(e_i, e_j)$ .

**Attention :**  $q$  n'est **pas** une application linéaire. Il s'agit ici, en apparence, d'une nouvelle notion de matrice associée à une application.

Par exemple, si  $n = 3$ , alors

$$\text{Mat}_{(e_i)}(q) = \begin{pmatrix} b(e_1, e_1) & b(e_1, e_2) & b(e_1, e_3) \\ b(e_2, e_1) & b(e_2, e_2) & b(e_2, e_3) \\ b(e_3, e_1) & b(e_3, e_2) & b(e_3, e_3) \end{pmatrix}$$

Exemple 4.4. Si  $E = \mathbf{R}^3$ , et si  $q(x) = 2x_1 x_2 + x_3^2$  (qui est bien une forme quadratique), on a

$$\text{Mat}_{(e_i)}(q) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

#### Exercice 4.1

Écrire la matrice dans la base canonique de la forme quadratique sur  $E = \mathbf{R}^5$  donnée par  $q(x) = 3x_1^2 - 4x_2 x_4 + 2x_3 x_5$ .

**Proposition 4.3**

Soit  $q$  une forme quadratique sur  $E$ , de forme polaire  $b$ . Soit  $(e_i)$  une base de  $E$ , et soit  $M = \text{Mat}_{(e_i)}(q)$ . Pour  $x, y \in E$ , notons  $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$  et  $Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$  les vecteurs (colonne) coordonnées de  $x$  et  $y$  dans la base  $(e_i)$ . On a alors

$$b(x, y) = {}^tXMY.$$

*Preuve.* Par définition, nous avons  $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$  et  $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$ , et donc

$$\begin{aligned} b(x, y) &= b\left(\sum_{i=1}^n x_i e_i, \sum_{i=1}^n y_i e_i\right) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} b(e_i, e_j) x_i y_j \\ &= \sum_{i=1}^n x_i \underbrace{\left(\sum_{j=1}^n b(e_i, e_j) y_j\right)}_{=(MY)_i} = {}^tX(MY). \end{aligned}$$

□

En particulier,  $q(x) = {}^tXMX$ .

*Remarque 4.2.* Inversement, si  $M \in S_n(\mathbf{R})$  est une matrice symétrique réelle, si  $E$  est un  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension  $n$ , muni d'une base  $(e_1, \dots, e_n)$ , alors, toujours en notant  $X$  le vecteur coordonnées de  $x$  dans la base  $(e_i)$ , l'expression  $q(x) = {}^tXMX$  définit une forme quadratique sur  $E$ , telle que  $\text{Mat}_{(e_i)}(q) = M$ .

**Formule de changement de base.** Soient  $\mathcal{B} = (e_i)$  et  $\mathcal{B}' = (e'_i)$  deux bases de  $E$  et soit  $P = P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B}'}$  la matrice de passage. Soient  $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$  et  $M' = \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(q)$ . On déduit de l'expression précédente de la forme quadratique  $q$  la formule

$$M' = {}^tPMP.$$

*Preuve.* Soient  $x, y \in E$  et soient  $X, Y$  (resp.  $X', Y'$ ) les coordonnées de  $x, y$  dans la base  $\mathcal{B}$  (resp.  $\mathcal{B}'$ ). On sait que  $X = PX', Y = PY'$ , et que si  $b$  est la forme polaire de  $q$ , alors

$$\begin{aligned} b(x, y) &= {}^tXMY = {}^t(X')M'Y' \\ &= {}^t(PX')M(PY') \\ &= {}^t(X')({}^tPMP)Y'. \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tous  $x, y \in E$ , on en déduit que pour tous vecteurs colonnes  $X', Y' \in \mathbf{R}^n$ ,  ${}^t(X')M'Y' = {}^t(X')({}^tPMP)Y'$ . On conclut avec le lemme ci-dessous.

**Lemme 4.1**

Soient  $A, B \in M_n(\mathbf{R})$  telles que  $\forall X, Y \in \mathbf{R}^n, {}^tXAY = {}^tXBY$ . Alors,  $A = B$ .

*Démonstration.* Soit  $Y \in \mathbf{R}^n$ . Alors,  $\forall X \in \mathbf{R}^n, {}^tX(AY - BY) = 0$ . Ceci signifie que, pour le produit scalaire canonique de  $\mathbf{R}^n$ , le vecteur  $AY - BY$  est orthogonal à tous les vecteurs de  $\mathbf{R}^n$ . D'où  $AY = BY$ . Ceci étant vrai pour tous  $Y \in \mathbf{R}^n$ ,  $A = B$ . □

En appliquant ce lemme à notre situation, on déduit  $M' = {}^tPMP$ .  $\square$

*Remarque 4.3. **Attention.*** La formule de changement de base n'est pas celle qu'on connaît pour la matrice d'un endomorphisme.

#### Définition 4.5

Deux matrices carrées  $M$  et  $N$  telles que  $\exists P \in \text{GL}_n(\mathbf{R})$  telle que  $N = {}^tPMP$  sont dites **congruentes**.

#### Exercice 4.2

Soit  $q$  la forme quadratique sur  $\mathbf{R}^2$  définie par  $q(x) = x_1^2 - x_2^2$ . Montrer qu'il existe une base  $(e'_1, e'_2)$  telle dans laquelle, en notant  $(x'_1, x'_2)$  les coordonnées de  $x$  dans la base  $(e'_i)$ , on a  $q(x) = 2x'_1x'_2$ .

### 4.4 Orthogonalité au sens d'une forme quadratique. Isotropie.

On reprend à présent les définitions d'orthogonalité.

#### Définition 4.6

Soit  $q$  une forme quadratique sur  $E$ , de forme polaire  $b$ .

1. Deux vecteurs  $x, y \in E$  sont dits orthogonaux au sens de  $q$  si  $b(x, y) = 0$ . On note alors  $x \perp y$ .
2. Soient  $A, B \subset E$  deux parties. On dit que  $A$  et  $B$  sont orthogonales pour  $q$ , et on note  $A \perp B$ , si  $\forall x \in A$  et  $\forall y \in B$ ,  $b(x, y) = 0$ .
3. Si  $A \subset E$  est une partie quelconque, on définit son orthogonal (au sens de  $q$ ) :

$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in A, b(x, y) = 0\}.$$

*Remarque 4.4.* Si le contexte est ambiguë, on notera  $\perp_q$  pour signifier que l'orthogonal est pris relativement à la forme quadratique  $q$ .

*Remarque 4.5.* Un phénomène nouveau par rapport aux produits scalaires est l'existence de vecteurs **orthogonaux à eux-mêmes** : il est possible que  $x \neq 0$  et  $x \perp x$ .

⌘ *Exemple 4.5.* Sur  $E = \mathbf{R}^2$ , soit  $q(x) = x_1^2 - x_2^2$ . Alors,  $x = (1, 1)$  est orthogonal à lui-même, au sens de  $q$ .

On retrouve des propriétés classiques des orthogonaux.

#### Proposition 4.4

Soient  $A, B \subset E$  deux parties quelconques et  $F \subset E$  un sous-espace vectoriel. Alors

1.  $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$ .
2.  $A^\perp = (\text{Vect}(A))^\perp$
3.  $F \subset (F^\perp)^\perp$ .

*Preuve.* En exercice.  $\square$

*Remarque 4.6.* Attention là encore : il se peut que  $F \cap F^\perp \neq \{0\}$ , contrairement aux espaces euclidiens. Par exemple, toujours avec  $E = \mathbf{R}^2$  muni de  $q(x) = x_1^2 - x_2^2$ , si  $F = \mathbf{R} \cdot (1, 1)$ , alors on a  $F^\perp = F$ .

### Définition 4.7

Soit  $q$  une forme quadratique sur  $E$ , de forme polaire  $b$ . Un vecteur  $x \in E$  est dit **isotrope** si  $q(x) = 0$ . L'ensemble des vecteurs isotropes

$$\mathcal{C}_q = \{x \in E \mid q(x) = 0\}$$

est appelé **cône isotrope** de  $q$ .

Le **noyau** (ou aussi **radical**) de  $q$  est défini par

$$\text{Ker}(q) = \{x \in E \mid \forall y \in E, b(x, y) = 0\} = E^\perp.$$

On dit que la forme quadratique  $q$  est non-dégénérée si  $\text{Ker}(q) = \{0\}$ .

*Remarque 4.7.* Quelques observations :

1. On a toujours  $\text{Ker}(q) \subset \mathcal{C}_q$ , mais l'inclusion est stricte en général. Attention donc à l'erreur classique :

$$\text{Ker}(q) \neq \{x \in E \mid q(x) = 0\} \text{ (sauf cas particuliers).}$$

2. En général,  $\mathcal{C}_q$  **n'est pas** un sous-espace vectoriel de  $E$ . C'est un cône de  $E$ , c'est-à-dire qu'il est invariant par homothéties.  
En revanche,  $\text{Ker}(q)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$  (on verra un peu plus loin que c'est le noyau d'une application linéaire naturelle).
3. En général, on peut avoir  $q$  non-dégénérée et  $\mathcal{C}_q \neq \{0\}$ .
4. Si  $q$  est définie et positive (*i.e.* si c'est une norme euclidienne), alors  $\text{Ker}(q) = \mathcal{C}_q = \{0\}$ . Ces objets sont donc "invisibles" dans un espace euclidien.

*Exemple 4.6.* 1. Un premier exemple évident : la forme quadratique nulle  $q = 0$ .

On a alors  $\text{Ker}(q) = \mathcal{C}_q = E$ .

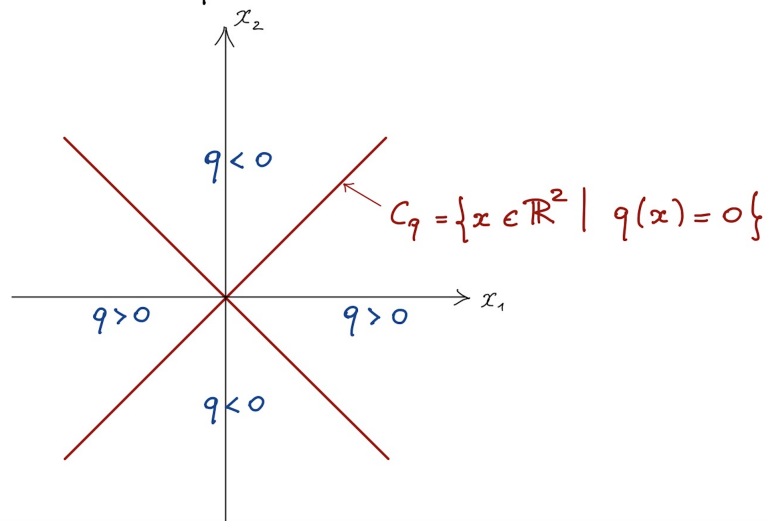
2. Si  $E = \mathbf{R}^2$  et  $q(x) = x_1^2$ , alors  $\text{Ker}(q) = \mathcal{C}_q = \mathbf{R}.e_2$ .

En effet, sa forme polaire est  $b(x, y) = x_1 y_1$ . Si  $x = (x_1, x_2) \in \mathcal{C}_q$ , alors  $q(x) = x_1^2 = 0$ . D'où  $x = (0, x_2)$ , et donc  $\mathcal{C}_q = \mathbf{R}.e_2$ , l'autre inclusion étant évidente. Comme pour tout  $x \in \mathbf{R}^2$ , on a  $b(x, e_2) = 0$ , on a  $\mathbf{R}.e_2 \subset \text{Ker}(q) \subset \mathcal{C}_q = \mathbf{R}.e_2$ . D'où  $\text{Ker}(q) = \mathcal{C}_q = \mathbf{R}.e_2$ .

3. Soient  $E = \mathbf{R}^2$  et  $q(x) = x_1^2 - x_2^2$ . Alors  $\text{Ker}(q) = \{0\}$  et  $\mathcal{C}_q = \mathbf{R}.(1, 1) \cup \mathbf{R}.(1, -1)$ .

En effet, sa forme polaire est  $b(x, y) = x_1 y_1 - x_2 y_2$ . Donc, si  $x \in \text{Ker}(q)$ , alors  $x$  doit être (en particulier) orthogonal à  $y := (x_1, -x_2)$ . D'où  $b(x, y) = x_1^2 + x_2^2 = 0$ , et donc  $x = 0$ . Ensuite, quel que soit  $x \in E$ ,  $x \in \mathcal{C}_q$  si et seulement si  $x_1^2 = x_2^2$ , ce qui est équivalent à  $x_1 = \pm x_2$ , d'où  $\mathcal{C}_q = \mathbf{R}.(1, 1) \cup \mathbf{R}.(1, -1)$ .

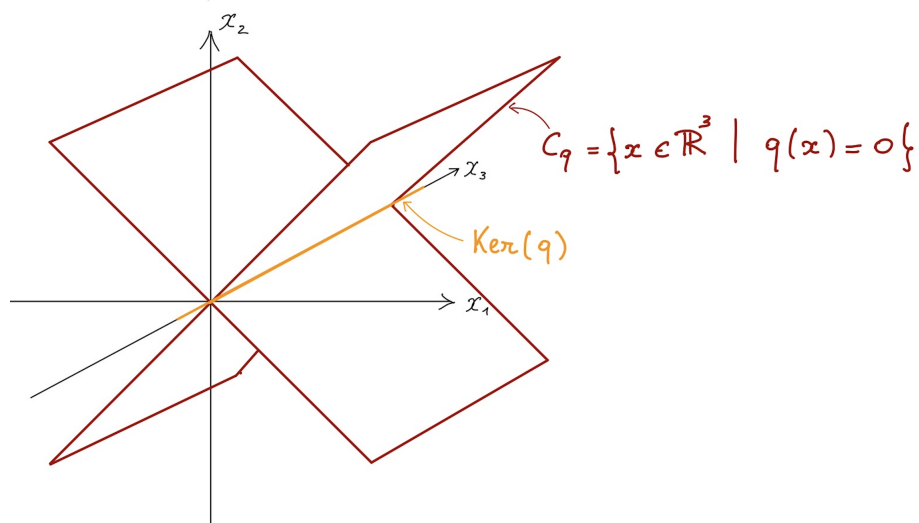
$$E = \mathbb{R}^2, \quad q(x) = x_1^2 - x_2^2$$



4. Soient  $E = \mathbf{R}^3$  et  $q(x) = x_1^2 - x_2^2$ . Alors,  $\text{Ker}(q) = \mathbf{R}.e_3$  et

$$C_q = \text{Vect}((1, 1, 0), (0, 0, 1)) \cup \text{Vect}((1, -1, 0), (0, 0, 1)).$$

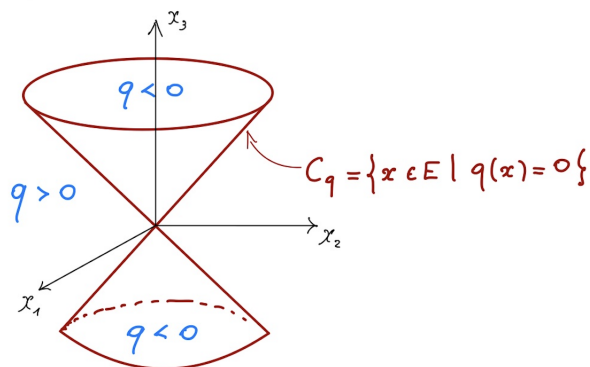
$$E = \mathbb{R}^3, \quad q(x) = x_1^2 - x_2^2$$



5. Soient  $E = \mathbf{R}^3$  et  $q(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$ . Alors  $q$  est non-dégénérée et son cône isotrope est le cône de révolution de  $\mathbf{R}^3$  d'équation  $x_1^2 + x_2^2 = x_3^2$ .



$$q(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2$$



### Exercice 4.3

Soit  $E$  un espace vectoriel, et soient  $F, G \subset E$  deux sous-espaces vectoriels. Montrer que si  $F \cup G$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ , alors  $F \subset G$  ou  $G \subset F$ .

*Remarque 4.8.* Les formes quadratiques non-définies positives jouent un rôle très important en physique. Un exemple célèbre est celui de la Relativité restreinte, formulée par Einstein en 1905. Afin de trouver un cadre théorique dans lequel la vitesse de la lumière est invariante par changement de référentiel, l'évolution d'un système matériel est transcrite dans l'espace-temps plat, qui n'est rien d'autre que  $\mathbf{R}^4 = \underbrace{\mathbf{R}^3}_{\text{espace}} \times \underbrace{\mathbf{R}}_{\text{temps}}$ .

Les quatre coordonnées  $(x, y, z, t)$  d'un événement de l'espace temps correspondent aux coordonnées spatiales  $(x, y, z)$  et à l'instant  $t$  auquel il se produit. La forme quadratique  $q(x, y, z, t) = x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$ , où  $c$  désigne la vitesse de la lumière dans le vide, permet alors de distinguer dans l'espace-temps les trajectoires qui correspondent à l'évolution d'un système matériel. Un photon, particule de lumière, qui se situe à l'origine, va évoluer en suivant une des directrices du cône isotrope  $\mathcal{C}_q$ . Une particule de matière va en revanche évoluer à l'intérieur du cône, c'est à dire dans l'ouvert  $U_- = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid q((x, y, z, t)) < 0\}$ , traduisant qu'aucune particule massive ne peut aller plus vite que la lumière. La géométrie du cône isotrope d'une telle forme quadratique fait que  $U_-$  est divisé en deux composantes connexes, l'une représentant le futur d'un point et l'autre son passé.

## 4.5 Interprétation en dualité

### Définition 4.8

Soit  $q$  une forme quadratique sur  $E$ , de forme polaire  $b$ . On définit une application linéaire  $\varphi_q : E \rightarrow E^*$  en posant

$$\begin{aligned} \varphi_q \quad E &\longrightarrow E^* \\ x &\longmapsto \phi_x \end{aligned}$$

où comme dans la Définition 4.1,  $\phi_x \in E^*$  est définie par  $\forall y \in E, \phi_x(y) = b(x, y)$ .

### Proposition 4.5

Le noyau de  $q$ , comme défini plus haut, coïncide avec celui de l'application linéaire  $\varphi_q$  :

$$\text{Ker}(q) = \text{Ker } \varphi_q.$$

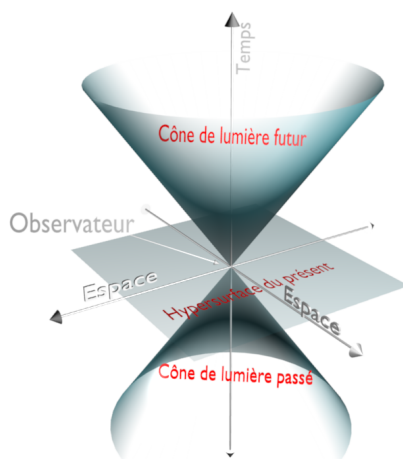


FIGURE 1 – Représentation du cône isotrope de l'espace-temps, Wikipedia

En particulier,

$$q \text{ est non-dégénérée} \iff \varphi_q \text{ est un isomorphisme}.$$

Si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ , de base duale  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ , alors

$$\text{Mat}_{(e_i)}(q) = \text{Mat}_{(e_i), (e_j^*)}(\varphi_q).$$

*Preuve.* Pour tout  $x \in E$ , on a

$$\begin{aligned} x \in \text{Ker}(\varphi_q) &\iff \phi_x = 0 \\ &\iff \forall y \in E, \phi_x(y) = 0 \\ &\iff \forall y \in E, b(x, y) = 0 \\ &\iff x \in \text{Ker}(q). \end{aligned}$$

Pour tout  $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a  $\varphi_q(e_j) = \sum_i m_{ij} e_i^*$ . D'où  $m_{ij} = [\varphi_q(e_j)](e_i) = b(e_i, e_j)$ .  $\square$

Ainsi, la matrice de  $q$  dans la base  $(e_i)$ , qui n'est initialement pas définie comme matrice d'une application linéaire, s'interprète comme la matrice de l'application  $\varphi_b : E \rightarrow E^*$  avec pour base de départ  $(e_i)$  et pour base d'arrivée  $(e_i^*)$ , la base duale.

#### Corollaire 4.1

Soit  $q$  une forme quadratique sur  $E$ . Alors

$$\begin{aligned} q \text{ est non-dégénérée} &\iff \exists (e_i) \text{ base de } E \mid \text{Mat}_{(e_i)}(q) \in \text{GL}_n(\mathbf{R}) \\ &\iff \forall (e_i) \text{ base de } E, \text{Mat}_{(e_i)}(q) \in \text{GL}_n(\mathbf{R}). \end{aligned}$$

Si  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$ , et si  $f : \mathbf{R}^n \rightarrow E$  est l'isomorphisme correspondant, alors  $\text{Ker}(q) = f(\text{Ker}(\text{Mat}_{\mathcal{B}}(q)))$ .

*Exemple 4.7.* Si  $E$  est de dimension 3, et si

$$\text{Mat}_{(e_i)}(q) = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 0 \\ 4 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

§ alors  $\text{Ker}(q) = \mathbf{R}.e_3$ .

**Lemme 4.2**

Soit  $F \subset E$  un sous-espace vectoriel. Pour toute forme quadratique  $q$ , nous avons

$$F^{\perp q} = \varphi_q^{-1}(F^\perp),$$

où  $F^\perp = \{\phi \in E^* \mid \forall x \in F, \phi(x) = 0\} \subset E^*$  désigne l'orthogonal dual de  $F$

*Preuve.* Soit  $x \in E$ . Alors

$$\begin{aligned} x \in F^{\perp q} &\iff \forall y \in F, b(x, y) = 0 \\ &\iff \forall y \in F, \phi_x(y) = 0 \\ &\iff \phi_x \in F^\perp \\ &\iff x \in \varphi_q^{-1}(F^\perp). \end{aligned}$$

où on note  $\phi_x = \varphi_q(x)$ . □

**Proposition 4.6**

Soit  $F$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Si  $q$  est non-dégénérée, alors  $\dim F^{\perp q} + \dim F = \dim E$ .

*Preuve.* Comme  $q$  est non-dégénérée,  $\varphi_q : E \rightarrow E^*$  est un isomorphisme. D'après le Lemme 4.2, nous avons  $\dim F^{\perp q} = \dim \varphi_q^{-1}(F^\perp) = \dim F^\perp$  puisque  $\varphi_q$  est un isomorphisme. Comme  $\dim F^\perp = \dim E - \dim F$ , on en déduit l'identité annoncée. □

*Remarque 4.9.* L'énoncé est faux sans l'hypothèse de non-dégénérescence de  $q$ . Par exemple si  $q = 0$ , alors  $F^{\perp q} = E$  quel que soit  $F$ .

*Remarque 4.10.* Pour tout sous-espace vectoriel  $F \subset E$ , nous avons toujours  $\dim F^{\perp q} + \dim F \geq \dim E$ . Précisément,

$$\dim F + \dim F^{\perp q} = \dim E + \dim(F \cap \text{Ker}(q)).$$

(Voir TD6)

*Remarque 4.11.* Si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ , et si  $q$  est une forme quadratique, alors  $(\varphi_q(e_1), \dots, \varphi_q(e_n)) = (e_1^*, \dots, e_n^*)$  si et seulement si  $q$  est définie positive et  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base orthonormée de  $E$ .

Dans ce cas, si  $F = \text{Vect}(e_1, \dots, e_p)$ , son orthogonal dual est donné par  $F^\perp = \text{Vect}(e_{p+1}^*, \dots, e_n^*)$ , qui est bien identifié à  $\text{Vect}(e_{p+1}, \dots, e_n)$  à travers  $\varphi_q$ .

On revient à la notation  $\perp$  pour l'orthogonal au sens de  $q$ .

**Proposition 4.7**

Soient  $q$  une forme quadratique non-dégénérée sur  $E$ , et  $F \subset E$  un sous-espace vectoriel. Alors

$$q|_F \text{ est non-dégénérée} \iff E = F \oplus F^\perp$$

*Démonstration.* Comme  $q$  est non-dégénérée,  $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$ . Par conséquent,  $E = F \oplus F^\perp \iff F \cap F^\perp = \{0\}$ .

Il est immédiat que la forme polaire de  $q|_F$  est  $b|_{F \times F}$  où  $b$  est la forme polaire de  $q$ . Par conséquent,  $\text{Ker}(q|_F) = \{x \in F \mid \forall y \in F, b(x, y) = 0\} = F \cap F^\perp$ , montrant que  $F \cap F^\perp = \{0\}$  si et seulement si  $q|_F$  est non-dégénérée.  $\square$

*Remarque 4.12.* Il est toujours vrai que si  $q$  est définie positive, alors pour tout sous-espace  $F \subset E$ ,  $q|_F$  est définie positive, et donc en particulier non-dégénérée. On retrouve donc que  $F \oplus F^\perp = E$  dans un espace euclidien.

*Remarque 4.13.* On peut avoir  $q$  non-dégénérée et  $\text{Ker}(q|_F) \neq \{0\}$ .

⌋ *Exemple 4.8.* Si  $x \in \mathcal{C}_q$  est un vecteur isotrope de  $q$ , et si  $D = \mathbf{R}.x$ , alors  $D \subset D^\perp$ .

⌋ *Exemple 4.9.* Supposons  $q$  non-dégénérée. Soit  $x \in E$  tel que  $q(x) \neq 0$ . Alors  $E = \mathbf{R}.x \oplus (\mathbf{R}.x)^\perp$ .

## 4.6 Inertie de Sylvester. Signature d'une forme quadratique réelle.

### Théorème 4.1

Soit  $E$  un espace vectoriel réel de dimension finie égale à  $n$ . Soit  $q$  une forme quadratique sur  $E$ , et soit  $k = \dim \text{ker}(q)$ . Alors :

1. Il existe une base  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  et  $r, s \geq 0$  des entiers vérifiant  $r + s + k = n$ , tels que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \left( \begin{array}{c|c|c} I_r & 0 & 0 \\ \hline 0 & -I_s & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

2. Un tel couple d'entiers  $(r, s)$  est unique. Cela signifie que si  $\mathcal{B}'$  est une autre base telle que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}'}(q) = \left( \begin{array}{c|c|c} I_{r'} & 0 & 0 \\ \hline 0 & -I_{s'} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

alors nécessairement  $r = r'$  et  $s = s'$ .

*Preuve. Existence de  $\mathcal{B}$ .* Soit  $\mathcal{B}_0$  une base arbitraire de  $E$  et soit  $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(q)$ . Comme  $M$  est symétrique, le théorème spectral nous fournit une matrice orthogonale  $P \in O(n)$  telle que  ${}^t P M P = D$ , où  $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ , avec  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres de  $M$  comptées avec multiplicité. Soient  $r = \text{Card}\{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid \lambda_i > 0\}$  et  $s = \text{Card}\{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid \lambda_i < 0\}$ . Notons que  $r + s + k = n$ . Quitte à réordonner les vecteurs propres de  $M$  dans la matrice de passage  $P$ , nous pouvons supposer que  $\lambda_i > 0$  pour tout  $i \in \llbracket 1, r \rrbracket$ ,  $\lambda_i < 0$  pour tout  $i \in \llbracket r + 1, r + s \rrbracket$  et  $\lambda_i = 0$  pour tout  $i \in \llbracket r + s + 1, n \rrbracket$ .

Pour tout  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , notons  $\mu_i = \sqrt{|\lambda_i|}$ , de sorte que  $\lambda_i = \mu_i^2$  pour  $1 \leq i \leq r$  et  $\lambda_i = -\mu_i^2$  pour  $r + 1 \leq i \leq r + s$ . Notons  $D_0 = \text{diag}(1, \dots, 1, -1, \dots, -1, 0, \dots, 0)$  et  $Q = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_r, \mu_{r+1}, \dots, \mu_{r+s}, 1, \dots, 1)$ , de sorte que  $D = Q D_0 Q = {}^t Q D_0 Q$ . Nous avons donc  ${}^t(Q^{-1}) {}^t P M P Q^{-1} = D_0$ , c'est-à-dire  ${}^t(PQ^{-1}) M (PQ^{-1}) = D_0$ . Soit  $\mathcal{B}$  la base de  $E$  telle que  $PQ^{-1}$  est la matrice de passage de  $\mathcal{B}_0$  à  $\mathcal{B}$ . D'après la formule de changement de base pour la matrice d'une forme quadratique, nous avons  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = {}^t(PQ^{-1}) \text{Mat}_{\mathcal{B}_0}(q) (PQ^{-1}) = D_0$ .

Unicité de  $(r, s)$ . Soient  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  deux bases de  $E$  telles que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(q) = \left( \begin{array}{c|c|c} I_r & 0 & 0 \\ \hline 0 & -I_s & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \text{ et } \text{Mat}_{\mathcal{B}'}(q) = \left( \begin{array}{c|c|c} I_{r'} & 0 & 0 \\ \hline 0 & -I_{s'} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Nécessairement,  $k = n - (r + s) = n - (r' + s')$ , d'où  $r + s = r' + s'$ . Notons  $(\phi_1, \dots, \phi_n) = \mathcal{B}^*$  et  $(\psi_1, \dots, \psi_n) = (\mathcal{B}')^*$  les bases duales correspondantes. En combinant l'écriture  $x = \sum_{i=1}^n e_i^*(x)e_i$  et la Proposition 4.3, nous obtenons

$$\begin{aligned} q(x) &= \phi_1(x)^2 + \dots + \phi_r(x)^2 - \phi_{r+1}(x)^2 - \dots - \phi_{r+s}(x)^2 \\ q(x) &= \psi_1(x)^2 + \dots + \psi_{r'}(x)^2 - \psi_{r'+1}(x)^2 - \dots - \psi_{r'+s'}(x)^2. \end{aligned}$$

Supposons par l'absurde que  $r < r'$ . Alors  $r + s' + k < n$ . Ceci implique que la famille  $(\phi_1, \dots, \phi_r, \psi_{r'+1}, \dots, \psi_n)$  ne peut pas être génératrice puisque de cardinal  $< n$ . Ainsi,  $G := \text{Vect}(\phi_1, \dots, \phi_r, \psi_{r'+1}, \dots, \psi_n) \subsetneq E^*$ , et donc  $G^\circ \neq \{0\}$ , où  $G^\circ = \{x \in E \mid \forall \phi \in G, \phi(x) = 0\}$  désigne l'orthogonal dual de  $G$  dans  $E$ . Soit alors  $x \in G^\circ, x \neq 0$ . Nous avons donc  $\phi_1(x) = \dots = \phi_r(x) = \psi_{r'+1}(x) = \dots = \psi_n(x) = 0$ .

Puisque  $x \neq 0$ , il existe  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $\psi_i(x) \neq 0$  (car sinon on aurait  $\forall \phi \in E^*, \phi(x) = 0$ , d'où  $x = 0$ ). Comme  $x \in G^\circ$ , on a nécessairement  $i \in \llbracket 1, r' \rrbracket$ , et donc

$$q(x) = \psi_1(x)^2 + \dots + \psi_{r'}(x)^2 \geq \psi_i(x)^2 > 0.$$

D'autre part,

$$q(x) = -\psi_{r+1}(x)^2 - \dots - \psi_{r+s}(x)^2 \leq 0,$$

ce qui est contradictoire. Par conséquent,  $r \geq r'$ .

Par symétrie,  $r' \geq r$  et donc  $r = r'$  et  $s = s'$ . □

On retiendra bien les deux choses suivantes de la preuve du Théorème 4.1 :

1. Toute forme quadratique  $q$  sur un espace vectoriel réel  $E$  de dimension  $n$  se s'écrit sous la forme

$$q(x) = \phi_1(x)^2 + \dots + \phi_r(x)^2 - \phi_{r+1}(x)^2 - \dots - \phi_{r+s}(x)^2,$$

où  $\phi_1, \dots, \phi_{r+s} \in E^*$  sont linéairement indépendantes et  $r + s = n - \dim \text{Ker}(q)$ . Ces formes linéaires ne sont pas uniques, mais le couple  $(r, s)$  est unique.

2. Si  $\mathcal{B}$  est une base quelconque, et  $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$ , et si  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  sont les valeurs propres de  $M$  comptées avec multiplicité, alors

$$\begin{aligned} r &= \text{Card}\{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid \lambda_i > 0\}, \\ s &= \text{Card}\{i \in \llbracket 1, n \rrbracket \mid \lambda_i < 0\}. \end{aligned}$$

#### Définition 4.9

Si  $q$  est une forme quadratique sur un espace vectoriel réel  $E$  de dimension  $n$ , alors l'unique couple  $(r, s)$  défini par le Théorème 4.1 est appelé la **signature** de  $q$ .

On a toujours  $r + s \leq \dim E$ , et  $r + s = \dim E$  si et seulement si  $q$  est non-dégénérée.

## 4.7 Détermination pratique de la signature

Dans la pratique, on dispose de deux approches systématiques pour obtenir la signature d'une forme quadratique.

★ *Signe des valeurs propres de  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$ .*

On connaît une expression (ou juste certaines propriétés) de la matrice de  $q$  dans une certaine base  $\mathcal{B}$ , et on parvient à déterminer les signes des valeurs propres de cette matrice.

Exemple 4.10. Si  $\dim E = 2$  et  $M = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(q)$ , notons  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}$  ses valeurs propres. On a l'arbre de décision suivant.

- Si  $\det M > 0$ , alors  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont non-nulles et de même signe. Et donc,
  - Ou bien  $\text{Tr}(M) > 0$ , et  $q$  est de signature  $(2, 0)$ ,
  - Ou bien  $\text{Tr}(M) < 0$ , et  $q$  est de signature  $(0, 2)$ .
- Si  $\det M < 0$ , alors  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  sont non-nulles et de signes opposés. Donc,  $q$  est de signature  $(1, 1)$ .
- Si  $\det(M) = 0$ , alors
  - Ou bien  $M = 0$ , et  $q$  est de signature  $(0, 0)$ .
  - Ou bien  $M$  est de rang 1 et donc exactement l'une des deux valeurs propres est non-nulle. Par conséquent,
    - Ou bien  $\text{Tr}(M) > 0$  et  $q$  est de signature  $(1, 0)$ .
    - Ou bien  $\text{Tr}(M) < 0$  et  $q$  est de signature  $(0, 1)$ .

Remarque 4.14. Cette discussion selon la trace et le déterminant de  $M$  est très utile en Calcul Différentiel, dans la recherche des extrema locaux des fonctions de deux variables. On applique ceci pour déterminer la signature de la matrice hessienne d'une fonction, en un point critique de la fonction.

★ *Méthode de Gauss.*

On dispose d'une expression développée de la forme quadratique  $q$  dans les coordonnées  $(x_1, \dots, x_n)$  d'une certaine base.

$$q(x) = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} a_{ij} x_i x_j.$$

La méthode de Gauss va permettre d'écrire  $q = \sum_{1 \leq i \leq r} \phi_i^2 - \sum_{r+1 \leq i \leq r+s} \phi_i^2$  avec  $\phi_1, \dots, \phi_{r+s} \in E^*$  **linéairement indépendantes**, et donc de déterminer la signature de  $q$ . L'idée est de savoir se ramener au cas à  $n - 1$  coordonnées ou moins, et itérer le processus.

Pour cela, on distingue deux cas :

Cas 1 : Il existe  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $a_{ii} \neq 0$ , *i.e.* l'expression de  $q(x)$  contient au moins un carré. Disons  $i = 1$  pour simplifier les notations.

On repère **toutes** les instances de  $x_1$  dans l'expression de  $q$  ailleurs que dans  $a_{11}x_1^2$  et on factorise  $x_1$ . On obtient ainsi

$$q(x_1, \dots, x_n) = a_{11}x_1^2 + x_1\phi(x_2, \dots, x_n) + \tilde{q}(x_2, \dots, x_n),$$

où  $\phi$  est linéaire en  $x_2, \dots, x_n$  et  $\tilde{q}$  est une forme quadratique en  $x_2, \dots, x_n$  (*i.e.* un polynôme homogène de degré 2 en ces variables). On a alors

$$\begin{aligned} q(x) &= a_{11} \left( \left( x_1 + \frac{1}{2a_{11}} \phi(x_2, \dots, x_n) \right)^2 - \frac{\phi(x_2, \dots, x_n)^2}{4a_{11}^2} \right) + \tilde{q}(x_2, \dots, x_n) \\ &= \underbrace{\frac{a_{11}}{|a_{11}|}}_{\in \{\pm 1\}} \left( \underbrace{\sqrt{|a_{11}|} \left( x_1 + \frac{1}{2a_{11}} \phi(x_2, \dots, x_n) \right)}_{:=\phi_1(x)} \right)^2 + \underbrace{\tilde{q}(x_2, \dots, x_n) - \frac{1}{4a_{11}} \phi(x_2, \dots, x_n)^2}_{:=\bar{q}(x_2, \dots, x_n)}. \end{aligned}$$

Ainsi, on a  $q = \pm\phi_1^2 + \bar{q}$ , avec  $\phi_1 \in (\mathbf{R}^n)^*$  et  $\bar{q}$  une forme quadratique en  $x_2, \dots, x_n$ .

Cas 2 : Quel que soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $a_{ii} = 0$ , i.e. l'expression  $q(x)$  ne contient aucun carré de coordonnée. On suppose évidemment que  $q \neq 0$ , sinon il n'y a rien à faire. Il existe donc nécessairement  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $i < j$ , tels que  $a_{ij} \neq 0$ . Supposons pour simplifier les notations que  $i = 1$  et  $j = 2$ .

On repère alors **toutes** les instances de  $x_1$  ailleurs que dans  $a_{12}x_1x_2$ , et on factorise par  $x_1$ , puis on fait pareil avec  $x_2$ . Il ne restera alors plus qu'une expression quadratique en  $x_3, \dots, x_n$ , c'est-à-dire :

$$q(x) = a_{12}x_1x_2 + x_1\psi_1(x_3, \dots, x_n) + x_2\psi_2(x_3, \dots, x_n) + \tilde{q}(x_3, \dots, x_n),$$

où  $\psi_1$  et  $\psi_2$  sont linéaires en  $x_3, \dots, x_n$ , et  $\tilde{q}$  est quadratique en  $x_3, \dots, x_n$ . On a alors

$$q(x) = a_{12} \left( \left( x_1 + \frac{\psi_2(x_3, \dots, x_n)}{a_{12}} \right) \left( x_2 + \frac{\psi_1(x_3, \dots, x_n)}{a_{12}} \right) - \frac{\psi_1(x_3, \dots, x_n)\psi_2(x_3, \dots, x_n)}{a_{12}^2} \right) + \tilde{q}(x_3, \dots, x_n)$$

et donc

$$q(x) = a_{12} \underbrace{\left( x_1 + \frac{\psi_2(x_3, \dots, x_n)}{a_{12}} \right)}_{:=\tilde{\phi}_1(x)} \underbrace{\left( x_2 + \frac{\psi_1(x_3, \dots, x_n)}{a_{12}} \right)}_{:=\tilde{\phi}_2(x)} + \underbrace{\tilde{q}(x_3, \dots, x_n) - \frac{\psi_1(x_3, \dots, x_n)\psi_2(x_3, \dots, x_n)}{a_{12}}}_{:=\bar{q}(x_3, \dots, x_n)}.$$

Nous avons donc

$$\begin{aligned} q &= a_{12}\tilde{\phi}_1\tilde{\phi}_2 + \bar{q} \\ &= \frac{a_{12}}{4} \left( (\tilde{\phi}_1 + \tilde{\phi}_2)^2 - (\tilde{\phi}_1 - \tilde{\phi}_2)^2 \right) + \bar{q} \\ &= \frac{a_{12}}{|a_{12}|} (\phi_1^2 - \phi_2^2) + \bar{q}, \end{aligned}$$

en posant

$$\phi_1 = \frac{\sqrt{|a_{12}|}(\tilde{\phi}_1 + \tilde{\phi}_2)}{2} \text{ et } \phi_2 = \frac{\sqrt{|a_{12}|}(\tilde{\phi}_1 - \tilde{\phi}_2)}{2}$$

Ainsi, dans les deux cas, on a écrit  $q = \pm\phi_1^2 + \bar{q}$  ou  $q = \phi_1^2 - \phi_2^2 + \bar{q}$  avec  $\bar{q}$  quadratique sur  $\mathbf{R}^{n-1}$  ou  $\mathbf{R}^{n-2}$ . En répétant l'opération sur  $\bar{q}$  et ainsi de suite, on finira par décomposer  $q$  sous la forme annoncée. Le fait que le nombre de variables se réduit à chaque étape fait que les formes linéaires ainsi obtenues sont linéairement indépendantes.

*Remarque 4.15. Attention* : Ce n'est pas parce qu'on parvient à écrire  $q$  sous la forme  $\sum_{1 \leq i \leq r} \phi_i^2 - \sum_{r+1 \leq i \leq r+s} \phi_i^2$  que  $q$  est de signature  $(r, s)$ . Ceci est garanti si on a appliqué *stricto sensu* la méthode de Gauss. Sinon, il faut impérativement vérifier que  $\phi_1, \dots, \phi_{r+s}$  sont linéairement indépendantes.

⌘ *Exemple 4.11.* C'est un cas un peu évident, mais si  $q(x) = x_1^2$ , on peut toujours écrire  $q(x) = x_1^2 + x_2^2 - x_2^2$ . Pour autant,  $q$  n'est pas de signature  $(2, 1)$ .

Exemple 4.12. La forme quadratique  $q(x) = (x_1 + x_2)^2 + (x_1 - x_2)^2 - 2x_2^2$  est de signature  $(1, 0)$ , et pas  $(2, 1)$ .

## 5 Espaces hermitiens

### 5.1 Rappels sur les nombres complexes

On note  $\mathbf{C}$  l'ensemble des nombres complexes. Tout nombre complexe  $z \in \mathbf{C}$  s'écrit de façon unique  $z = x + iy$ , avec  $x, y \in \mathbf{R}$ , et  $i \in \mathbf{C}$  vérifiant l'identité fondamentale  $i^2 = -1$ . On dit que  $z = x + iy$  est l'écriture algébrique de  $z$ . On dit que  $x$  est la partie réelle de  $z$ , notée  $x = \operatorname{Re}(z)$ , et que  $y$  est sa partie imaginaire, notée  $y = \operatorname{Im}(z)$ .

On rappelle que  $\mathbf{C}$  est muni d'une structure de corps qui prolonge celle de  $\mathbf{R}$ , (nécessairement) donnée par  $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$  et  $z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_1 y_2 + y_1 x_2)$ . Tout élément non-nul  $z \in \mathbf{C}^*$  admet un inverse pour la multiplication donné par  $z^{-1} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - i \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ .

Ces opérations munissent en outre  $\mathbf{C}$  d'une structure de  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension 2, dont une base est donnée par  $(1, i)$ . En particulier,  $\mathbf{C}$  s'identifie via cette base au plan  $\mathbf{R}^2$ , et on parle de *plan complexe*. Le sous-ensemble  $\mathbf{R} \subset \mathbf{C}$  est un sous- $\mathbf{R}$ -espace vectoriel de dimension 1, appelé *droite réelle*. De même,  $i\mathbf{R}$  est un sous-espace de dimension 1 appelé *droite imaginaire pure*.

À tout nombre complexe  $z = x + iy \in \mathbf{C}$ , on fait correspondre son conjugué  $\bar{z}$  défini par  $\bar{z} = x - iy$ . L'application  $z \in \mathbf{C} \mapsto \bar{z} \in \mathbf{C}$  est une involution, appelée conjugaison, et correspond géométriquement à la réflexion orthogonale de  $\mathbf{R}^2$  (muni du produit scalaire canonique) par rapport à la droite réelle.

#### Proposition 5.1

Pour tous  $z, z' \in \mathbf{C}$ , nous avons  $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$  et  $\overline{zz'} = \bar{z}\bar{z}'$ .

Le module d'un nombre complexe  $z = x + iy$  se définit par  $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ , et vérifie la relation fondamentale

$$|z|^2 = z\bar{z}.$$

En particulier, pour tout  $z \in \mathbf{C}^*$ , on a  $z^{-1} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$ .

Pour tout  $\theta \in \mathbf{R}$ ,  $e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ , et nous avons

$$e^{i(\theta+\theta')} = e^{i\theta} e^{i\theta'}, \quad \overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}, \quad \text{et } \forall z \in \mathbf{C}, |z| = 1 \iff \exists \theta \in \mathbf{R} \mid z = e^{i\theta}.$$

On en déduit

#### Proposition 5.2

Pour tout  $z \in \mathbf{C}^*$ , il existe  $\theta \in \mathbf{R}$ , uniquement défini modulo  $2\pi$ , tel que

$$z = \rho e^{i\theta}$$

où  $\rho = |z|$ .

Une telle écriture est appelée *forme polaire* de  $z$ , et on dit que  $\theta$  est un argument de  $z$ . On a les relations

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(z) &= \rho \cos(\theta) \\ \operatorname{Im}(z) &= \rho \sin(\theta) \end{cases}$$

## 5.2 Produits scalaires hermitiens, semi-linéarité

Soient  $E, F$  deux  $\mathbf{C}$ -espaces vectoriels.

### Définition 5.1

Une application  $u : E \rightarrow F$  est dit **semi-linéaire** si  $\forall x, y \in E, \forall \lambda \in \mathbf{C}$ , on a

$$u(x + \lambda y) = u(x) + \bar{\lambda}u(y).$$

⌋ *Exemple 5.1.* Soit  $E = F = \mathbf{C}^n$ , alors l'application  $u : (z_1, \dots, z_n) \mapsto (\bar{z}_1, \dots, \bar{z}_n)$  est semi-linéaire.

Nous aurons besoin un peu plus loin du résultat ci-dessous.

### Lemme 5.1

Soit  $E$  un  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel de dimension finie égale à  $d$ . Alors, la restriction de la loi externe de  $E$  à  $\mathbf{R} \times E$  définit une structure de  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel sur  $E$ , et pour cette structure,  $E$  est de dimension finie égale à  $2d$ . On notera  $\dim_{\mathbf{C}} E$  la dimension de  $E$  comme  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel, et  $\dim_{\mathbf{R}} E$  sa dimension comme  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel.

Soient  $E_1, E_2$  deux  $\mathbf{C}$ -espaces vectoriels. Alors, une application semi-linéaire  $f : E_1 \rightarrow E_2$  est une application  $\mathbf{R}$ -linéaire.

*Preuve.* Le fait que la loi de  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel se restreint bien en une loi de  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel est une vérification de routine. Si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$  en tant que  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel, alors on vérifie sans difficulté que  $(e_1, ie_1, e_2, ie_2, \dots, e_n, ie_n)$  est une base de  $E$  en tant que  $\mathbf{R}$ -espace vectoriel, d'où la relation  $\dim_{\mathbf{R}} E = 2 \dim_{\mathbf{C}} E$ .

Enfin, si  $f : E_1 \rightarrow E_2$  est semi-linéaire, alors pour tous  $x, y \in E_1$  et  $\lambda \in \mathbf{R}$ , on a  $f(x + \lambda y) = f(x) + \bar{\lambda}f(y) = f(x) + \lambda f(y)$  puisque  $\lambda \in \mathbf{R}$ . Ce qui montre bien que  $f$  est  $\mathbf{R}$ -linéaire.  $\square$

### Définition 5.2

Soit  $E$  un  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel. Un produit scalaire hermitien sur  $E$  est une application

$$\begin{aligned} E \times E &\longrightarrow \mathbf{C} \\ (x, y) &\longmapsto \langle x, y \rangle \end{aligned}$$

telle que  $\forall x, x_1, x_2, y, y_1, y_2 \in E, \forall \lambda, \mu \in \mathbf{C}$ , on a

1.  $\langle x_1 + \lambda x_2, y \rangle = \langle x_1, y \rangle + \bar{\lambda} \langle x_2, y \rangle$ .
2.  $\langle x, y_1 + \mu y_2 \rangle = \langle x, y_1 \rangle + \mu \langle x, y_2 \rangle$ .
3.  $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$  (symétrie hermitienne)<sup>a</sup>.
4.  $x \neq 0 \Rightarrow \langle x, x \rangle > 0$ .

a. Ceci implique que  $\langle x, x \rangle \in \mathbf{R}$  pour tout  $x \in E$

*Remarque 5.1.* On notera que (2. et 3.)  $\Rightarrow$  1. Dans la pratique, on peut se contenter de vérifier seulement ces deux points.

*Remarque 5.2.* Si on note comme à l'accoutumée  $\phi_x : z \in E \mapsto \langle x, z \rangle$  et  $\psi_y : z \in E \mapsto \langle z, y \rangle$ , alors

- (1.)  $\iff \forall x \in E, \phi_x$  est semi-linéaire.
- (2.)  $\iff \forall y \in E, \psi_y$  est linéaire.

### Définition 5.3

Un  $\mathbf{C}$ -espace vectoriel  $E$  muni d'un produit scalaire hermitien est dit **pré-hilbertien**.  
Si, de plus,  $E$  est de dimension finie, alors on dit que c'est un espace **hermitien**.

*Exemple 5.2.* Soit  $E = \mathbf{C}^n$ , si  $X = (x_1, \dots, x_n)$  et  $Y = (y_1, \dots, y_n)$ , alors on définit un produit scalaire hermitien sur  $E$  en posant

$$\langle X, Y \rangle = \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i = {}^t \overline{X} Y.$$

*Exemple 5.3.* Si  $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbf{C})$ , on définit un produit scalaire hermitien sur  $E$  en posant  $\forall f, g \in E$ ,

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b \overline{f(t)} g(t) dt.$$

*Exemple 5.4.* Si  $E = \mathcal{C}_{2\pi}^0(\mathbf{R}, \mathbf{C})$  est l'espace des fonctions continues  $2\pi$ -périodiques, on définit un produit scalaire hermitien sur  $E$  en posant  $\forall f, g \in E$ ,

$$\langle f, g \rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \overline{f(t)} g(t) dt.$$

### **Théorème 5.1** (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace pré-hilbertien. Alors, pour tous  $x, y \in E$ ,

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle.$$

Il y a égalité si et seulement si  $(x, y)$  est liée (sur  $\mathbf{C}$ ).

*Preuve.* On suppose  $\langle x, y \rangle \neq 0$ , sans quoi l'énoncé est évident. Soit  $\langle x, y \rangle = \rho e^{i\theta}$  son écriture polaire. On définit pour tout  $t \in \mathbf{R}$

$$P(t) = \langle x + te^{-i\theta}y, x + te^{-i\theta}y \rangle \in \mathbf{R}_+.$$

En développant, on obtient

$$P(t) = \langle x, x \rangle + 2\rho t + \langle y, y \rangle t^2.$$

Ainsi,  $P$  est un trinôme réel, partout positif. Son discriminant est donc négatif ou nul, *i.e.*

$$4(\rho^2 - \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle) \leq 0,$$

et comme  $\rho = |\langle x, y \rangle|$ , on obtient l'inégalité annoncée.

On est dans le cas d'égalité si et seulement si le discriminant de  $P$  est nul, ce qui revient à dire qu'il admet une racine réelle (nécessairement double puisque  $P \geq 0$ ). Or, s'il existe  $t_0 \in \mathbf{R}$  tel que  $P(t_0) = 0$ , cela signifie que  $x + t_0 e^{-i\theta} y = 0$ , et donc  $x$  et  $y$  sont liés sur  $\mathbf{C}$ . On vérifie immédiatement qu'inversement, si  $y = \lambda x$ , alors on est dans le cas d'égalité.  $\square$

**Corollaire 5.1** (Inégalité de Minkowski)

Pour tous  $x, y \in E$ , on a

$$\sqrt{\langle x+y, x+y \rangle} \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}.$$

Il y a égalité si et seulement si  $(x, y)$  est positivement liée, i.e. s'il existe  $\lambda, \mu \in \mathbf{R}_+$ ,  $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$ , tels que  $\lambda x = \mu y$ .

*Preuve.* En développant et en utilisant la symétrie hermitienne, on obtient  $\langle x+y, x+y \rangle = \langle x, x \rangle + 2\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) + \langle y, y \rangle$ . Maintenant,  $\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) \leq |\langle x, y \rangle| \leq \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}$ . Et par conséquent,

$$\langle x+y, x+y \rangle \leq (\sqrt{\langle x, x \rangle} + \sqrt{\langle y, y \rangle})^2,$$

d'où l'inégalité recherchée.

Si on est dans le cas d'égalité, alors  $\operatorname{Re}(\langle x, y \rangle) = |\langle x, y \rangle| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \sqrt{\langle y, y \rangle}$ . De la première égalité, on tire que  $\langle x, y \rangle \in \mathbf{R}_+$ . La deuxième nous place dans le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et  $(x, y)$  est liée sur  $\mathbf{C}$ . Si  $x = 0$ , la famille est évidemment positivement liée. Si  $x \neq 0$ , alors  $y = \lambda x$ , pour  $\lambda \in \mathbf{C}$ , et on a alors  $\langle x, y \rangle = \lambda \langle x, x \rangle \in \mathbf{R}_+$ , ce qui implique bien  $\lambda \in \mathbf{R}_+$  puisque  $\langle x, x \rangle > 0$ .  $\square$

En particulier, si on note  $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ , alors  $\|\cdot\|$  est une norme sur  $E$ . Une telle norme est dite hermitienne, et on dit qu'elle dérive du produit scalaire hermitien  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

De façon analogue au cas des produits scalaires euclidiens, on dispose d'une identité de polarisation qui permet de retrouver un produit scalaire hermitien à partir de la norme dont il dérive.

**Proposition 5.3**

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace pré-hilbertien. Alors, pour tous  $x, y \in E$ , on a

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4} (\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 - i\|x+iy\|^2 + i\|x-iy\|^2).$$

*Preuve.* Exercice.  $\square$

Listons à présent quelques notions et propriétés similaires aux espaces euclidiens. On vérifiera à titre d'exercice que la symétrie hermitienne, et la semi-linéarité ne gêne aucunement ces définitions et propriétés.

1. Orthogonal : Pour toute partie  $A \subset E$ , on associe  $A^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in A, \langle x, y \rangle = 0\}$ . On retrouve toutes les propriétés du type  $A^\perp = \operatorname{Vect}(A)^\perp$  etc..  
Pour tout sous-espace  $F \subset E$ , on a  $E = F \oplus F^\perp$ .
2. Bases orthonormées : On prend la même définition que dans un espace euclidien. L'algorithme de Gram-Schmidt s'applique *verbatim* et on obtient existence des bases orthonormées dans un espace hermitien quelconque.
3. Identité de Pythagore : C'est la même avec la norme hermitienne.
4. Projection orthogonale : Si  $E$  est pré-hilbertien et  $F \subset E$  est un sous-espace complexe de dimension finie, et si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base orthonormée de  $F$ , alors  $E = F \oplus F^\perp$  et la projection sur  $F$  parallèlement à  $F^\perp$  est donnée par

$$\forall x \in E, p_F(x) = \sum_{k=1}^n \langle e_k, x \rangle e_k.$$

**Attention** : Il faut impérativement prendre  $\langle e_k, x \rangle$  et non  $\langle x, e_k \rangle$ , sans quoi l'identité est fautive (par exemple  $p_F$  ne serait pas  $\mathbf{C}$ -linéaire).

### 5.3 Semi-isomorphisme en dualité

Soit  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  un espace hermitien (donc de dimension finie par définition). Pour tout  $x \in E$ , on note  $\phi_x \in E^*$  la forme linéaire définie par  $\forall y \in E, \phi_x(y) = \langle x, y \rangle$ .

#### Théorème 5.2

L'application

$$\begin{aligned} \Phi : E &\longrightarrow E^* \\ x &\longmapsto \phi_x \end{aligned}$$

est un semi-isomorphisme entre  $E$  et  $E^*$ .

Dire que  $\Phi$  est semi-isomorphisme revient à dire que  $\Phi$  est bijective, semi-linéaire (et automatiquement,  $\Phi^{-1}$  est semi-linéaire).

*Preuve.* La semi-linéarité de  $\Phi$  est immédiate. Pour vérifier qu'elle est bijective, montrons qu'elle réalise un isomorphisme de **R**-espaces vectoriels de  $E$  sur  $E^*$ . D'après le Lemme 5.1,  $\Phi$  est bien **R**-linéaire et  $\dim_{\mathbf{R}} E = \dim_{\mathbf{R}} E^* = 2 \dim_{\mathbf{C}} E$ . Il suffit donc de prouver que  $\Phi$  est injective. Soit  $x \in E$  tel que  $\Phi(x) = 0$ . On a alors  $\phi_x(x) = \|x\|^2 = 0$ , d'où  $x = 0$ . Ainsi, le noyau de  $\Phi$  (vue comme une application **R**-linéaire) est réduit à  $\{0\}$ . Ce qui conclut.  $\square$

#### Théorème 5.3 (Adjoint hermitien)

Soit  $E$  un espace hermitien. Pour tout  $u \in \mathcal{L}(E)$ , il existe un unique  $u^* \in \mathcal{L}(E)$  tel que

$$\forall x, y \in E, \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle.$$

*Preuve.* Pour tout  $y \in E$ , soit  $\phi_y \in E^*$  donnée par  $\phi_y(x) = \langle y, u(x) \rangle$ . On notera bien que  $\phi_y$  est **C**-linéaire. Soit

$$\begin{aligned} f : E &\longrightarrow E^* \\ y &\longmapsto \phi_y. \end{aligned}$$

Alors  $f$  est semi-linéaire. Par conséquent, en notant toujours  $\Phi : E \rightarrow E^*$  le semi-isomorphisme du Théorème 5.2, nous obtenons que  $\Phi^{-1} \circ f : E \rightarrow E$  est une application **C**-linéaire, puisque pour tout  $\lambda \in \mathbf{C}$  et  $x \in E$ ,  $\Phi^{-1}(f(\lambda x)) = \Phi^{-1}(\overline{\lambda} f(x)) = \lambda \Phi^{-1}(f(x))$ .

On pose alors  $u^* = \Phi^{-1} \circ f$ , et on a par construction que pour tous  $x, y \in E$

$$\Phi(u^*(y)) = f(y) = \phi_y,$$

d'où

$$\begin{aligned} \Phi(u^*(y))(x) &= \phi_y(x) = \langle y, u(x) \rangle \text{ d'une part,} \\ &= \langle u^*(y), x \rangle \text{ d'autre part.} \end{aligned}$$

Ceci montre que  $u^*$  vérifie bien la condition annoncée. L'unicité peut se traiter de façon tout à fait similaire au cas de l'adjoint dans un espace euclidien, et on la laisse en exercice.  $\square$

### Proposition 5.4

Soit  $E$  un espace hermitien et soit  $(e_i)$  une base orthonormée de  $E$ . Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Alors, si  $M = \text{Mat}_{(e_i)}(u)$ , on a

$$\text{Mat}_{(e_i)}(u^*) = {}^t\overline{M}.$$

**Notation** : Pour toute matrice à coefficients complexes, on notera  $M^* = {}^t\overline{M}$  sa transconjuguée.

*Preuve.* Notons  $(m_{ij}) = M$ . Par définition, on a  $u(e_j) = \sum_i m_{ij}e_i$ , c'est-à-dire  $m_{ij} = \langle e_i, u(e_j) \rangle$ . De même, si on note  $m_{ij}^*$  les coefficients de  $\text{Mat}_{(e_i)}(u^*)$ , alors

$$\begin{aligned} m_{ij}^* &= \langle e_i, u^*(e_j) \rangle = \langle u(e_i), e_j \rangle \\ &= \overline{m_{ji}} \text{ par symétrie hermitienne.} \end{aligned}$$

Ceci montre le résultat attendu.  $\square$

On vérifie sans difficulté les propriétés suivantes :

1. L'application  $u \in \mathcal{L}(E) \mapsto u^* \in \mathcal{L}(E)$  est semi-linéaire.
2. Cette application est involutive :  $(u^*)^* = u$  pour tout  $u \in \mathcal{L}(E)$ .
3. Pour tous  $u, v \in \mathcal{L}(E)$ ,  $(u \circ v)^* = v^* \circ u^*$ .

## 5.4 Réduction des endomorphismes d'un espace hermitien

On note toujours  $E$  un espace hermitien de dimension  $n$ .

### Définition 5.4

Soit  $v \in \mathcal{L}(E)$ . On dit que  $v$  est **unitaire** si  $vv^* = v^*v = \text{id}_E$ .

De façon équivalente,  $v$  est unitaire si  $\forall x, y \in E$ ,  $\langle v(x), v(y) \rangle = \langle x, y \rangle$ , i.e. si  $v$  préserve le produit scalaire hermitien.

### Définition 5.5

Une matrice  $M \in M_n(\mathbf{C})$  est dit **unitaire** si  $MM^* = I_n$ , et on note

$$U(n) = \{M \in M_n(\mathbf{C}) \mid M^*M = I_n\}.$$

On appelle  $U(n)$  le **groupe unitaire**.

*Remarque 5.3.* On notera que  $U(n) \subset \text{GL}_n(\mathbf{C})$ , puisque  $\forall M \in U(n)$ ,  $\overline{\det(M)} \det(M) = 1$ , d'où  $|\det(M)| = 1$ .

### Exercice 5.1

Vérifier que

$$U(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta}e^{i\theta} \\ \beta & \overline{\alpha}e^{i\theta} \end{pmatrix}, \alpha, \beta \in \mathbf{C}, \theta \in \mathbf{R}, |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \right\}$$

On retrouve une proposition en tout point similaire au cas des endomorphismes orthogonaux d'un espace euclidien.

### Proposition 5.5

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Alors

$$\begin{aligned}
u \text{ est unitaire} &\iff \exists(e_i) \text{ orthonormée} \mid \text{Mat}_{(e_i)}(u) \in U(n) \\
&\iff \forall(e_i) \text{ orthonormée, } \text{Mat}_{(e_i)}(u) \in U(n) \\
&\iff \exists(e_i) \text{ orthonormée} \mid (u(e_i)) \text{ est orthonormée} \\
&\iff \forall(e_i) \text{ orthonormée, } (u(e_i)) \text{ est orthonormée}
\end{aligned}$$

*Preuve.* En exercice. □

### Corollaire 5.2

Soit  $M \in M_n(\mathbf{C})$ . Alors  $M$  est unitaire si et seulement si ses colonnes forment une base orthonormée de  $\mathbf{C}^n$  pour la structure hermitienne  $\sum \bar{x}_i y_i$ .

*Preuve.* Il suffit de considérer la base canonique  $(e_i)$  de  $\mathbf{C}^n$ , qui est orthonormée pour ce produit scalaire hermitien, et d'appliquer la proposition précédente à l'endomorphisme  $u \in \mathcal{L}(\mathbf{C}^n)$  tel que  $\text{Mat}_{(e_i)}(u) = M$ . On a alors  $M \in U(n) \iff u$  est unitaire  $\iff (u(e_i))$  est une base orthonormée de  $\mathbf{C}^n$ . Ceci conclut, puisque les colonnes de  $M$  sont par définition les  $u(e_j)$ . □

### Définition 5.6

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On dit que  $u$  est

1. **normal** si  $u \circ u^* = u^* \circ u$ .
2. **auto-adjoint** si  $u^* = u$ .
3. **anti-symétrique** si  $u^* = -u$ .

Soit  $M \in M_n(\mathbf{C})$ . On dit que  $M$  est

1. **normale** si  $MM^* = M^*M$ .
2. **hermitienne** si  $M^* = M$ .
3. **anti-hermitienne** si  $M^* = -M$ .

*Remarque 5.4.* On notera que la notion d'endomorphisme ou de matrice normal(e) est la plus générale parmi toutes celles rencontrées :

$$\begin{array}{ccc}
\text{Unitaire} & \Rightarrow & \boxed{\text{Normal}} & \Leftarrow & \text{Anti-symétrique} \\
& & \uparrow & & \\
& & \text{Auto-adjoint} & & 
\end{array}$$

### Théorème 5.4 (Réduction des endomorphismes normaux)

Soient  $E$  un espace hermitien et  $u \in \mathcal{L}(E)$  un endomorphisme normal. Alors,  $u$  est diagonalisable en base orthonormée, i.e. il existe une base orthonormée  $(e_i)$  de  $E$ , et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{C}$  tels que

$$\text{Mat}_{(e_i)}(u) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Inversement, si un endomorphisme quelconque  $u \in \mathcal{L}(E)$  est diagonalisable en base orthonormée, alors  $u$  est normal.

Enfin, si  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{C}$  désignent les valeurs propres d'un endomorphisme normal  $u$ , nous avons

1.  $u$  est auto-adjoint  $\iff \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbf{R}$ .
2.  $u$  est anti-symétrique  $\iff \lambda_1, \dots, \lambda_n \in i\mathbf{R}$ .
3.  $u$  est unitaire  $\iff |\lambda_1| = \dots = |\lambda_n| = 1$ .

*Preuve.* On commence par établir deux résultats intermédiaires.

**Lemme 5.2**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  (pas nécessairement normal). Soit  $F \subset E$  un sous-espace vectoriel. Alors,

$$u(F) \subset F \Rightarrow u^*(F^\perp) \subset F^\perp.$$

*Démonstration.* Supposons  $u(F) \subset F$ . Soit  $x \in F^\perp$  et  $y \in F$ . Alors,  $\langle u^*(x), y \rangle = \langle x, u(y) \rangle = 0$  car  $u(y) \in F$  par hypothèse. Ainsi  $u^*(x) \in F^\perp$ , ceci quel que soit  $x \in F^\perp$ , comme attendu.  $\square$

**Lemme 5.3**

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  normal. Soit  $\lambda \in \mathbf{C}$  une valeur propre complexe de  $u$ . Alors,

$$u(E_\lambda(u)^\perp) \subset E_\lambda(u)^\perp.$$

*Démonstration.* Comme  $u^*$  commute à  $u$ , il préserve ses espaces propres. Ainsi,  $u^*(E_\lambda(u)) \subset E_\lambda(u)$ . Comme  $(u^*)^* = u$ , on en déduit par le lemme précédent que  $u(E_\lambda(u)^\perp) \subset E_\lambda(u)^\perp$ .  $\square$

On passe à présent à la preuve du théorème. On procède par récurrence forte sur  $\dim E$ . Soit  $\mathcal{P}(n)$  la proposition : « Quel que soit  $E$  hermitien de dimension  $n$ , quel que soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  normal,  $u$  est diagonalisable en base orthonormée ».

Pour  $n = 1$ , il n'y a rien à prouver.

Soit  $n > 1$ . Supposons  $\mathcal{P}(k)$  vraie pour tout  $k \leq n - 1$  et montrons  $\mathcal{P}(n)$ . Soit  $E$  hermitien de dimension  $n$  et soit  $u \in \mathcal{L}(E)$  normal. Son polynôme caractéristique  $\chi_u \in \mathbf{C}[X]$  est scindé puisque  $\mathbf{C}$  est algébriquement clos. Soit  $\lambda \in \mathbf{C}$  une racine, qui est donc une valeur propre de  $u$ . Soit  $F = E_\lambda(u)^\perp$ , de sorte que  $E = E_\lambda(u) \oplus F$  (somme directe orthogonale).

D'après le Lemme 5.3,  $u(F) \subset F$ , et on a également  $u^*(F) \subset F$ . Notons  $v = u|_F \in \mathcal{L}(F)$  et  $w = u^*|_F \in \mathcal{L}(F)$ . On munit  $F$  de la restriction du produit scalaire hermitien de  $E$ , ce qui en fait un espace hermitien. On a alors, dans l'espace hermitien  $F$ ,  $\langle v(x), y \rangle = \langle u(x), y \rangle = \langle x, u^*(y) \rangle = \langle x, w(y) \rangle$ , ce qui montre que  $w = v^*$  est l'adjoint de  $v$ . De même, il est immédiat que  $v$  et  $v^*$  commutent, et donc  $v$  est un endomorphisme normal de  $F$ .

Comme  $\dim F < \dim E = n$ , on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à  $F$ . On obtient  $(e_1, \dots, e_p)$  une base orthonormée de  $F$  formée de vecteurs propres de  $v$  (donc aussi propres pour  $u$ ). En prenant alors  $(e_{p+1}, \dots, e_n)$  une base orthonormée quelconque de  $E_\lambda(u)$ , la concaténation  $(e_1, \dots, e_n)$  de ces deux bases est une base orthonormée de  $E$  formée de vecteurs propres de  $u$ . Ce qui démontre  $\mathcal{P}(n)$ , et termine la récurrence.

Nous avons donc établi la première affirmation du théorème.

Pour la deuxième, si  $u$  est diagonalisable dans une base orthonormée  $\mathcal{B}$ , alors on sait que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u^*) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)^*$ , et donc  $u$  et  $u^*$  sont simultanément diagonalisables. Ceci implique qu'ils commutent.

Pour la troisième, on se donne comme précédemment une base orthonormée  $\mathcal{B}$  de diagonalisation de  $u$  de sorte que  $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$ . Alors

1.  $u$  est unitaire  $\iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  est unitaire  $\iff |\lambda_1| = \dots = |\lambda_n| = 1$ .
2.  $u$  est auto-adjoint  $\iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  est hermitienne  $\iff \forall k, \lambda_k = \overline{\lambda_k} \iff \forall k, \lambda_k \in \mathbf{R}$
3.  $u$  est anti-symétrique  $\iff \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$  est anti-hermitienne  $\iff \forall k, \lambda_k = -\overline{\lambda_k} \iff \forall k, \lambda_k \in i\mathbf{R}$

□

**Corollaire 5.3** (Version matricielle)

Soit  $M \in M_n(\mathbf{C})$  une matrice telle que  $MM^* = M^*M$ . Alors, il existe  $P \in U(n)$  telle que  $P^*MP$  est diagonale.

On notera que la matrice de passage peut être prise dans le groupe unitaire.

## 6 Formes multilinéaires, déterminants

Dans tout ce chapitre,  $K$  désigne un corps quelconque.

### 6.1 Applications multilinéaires

**Définition 6.1**

Soit  $p \geq 1$  un entier, et soient  $E_1, \dots, E_p$  et  $F$  des  $K$ -espaces vectoriels. Une application

$$f : E_1 \times \dots \times E_p \rightarrow F$$

est dite  $p$ -linéaire si pour tout  $(x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p$  et pour tout  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , l'application partielle

$$\begin{aligned} f_i : E_i &\longrightarrow F \\ x &\longmapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_p) \end{aligned}$$

est linéaire.

**Définition 6.2**

On note  $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_p; F)$  l'ensemble de toutes les applications multilinéaires de  $E_1 \times \dots \times E_p$  vers  $F$ .

Si  $E_1 = \dots = E_p = E$ , et si  $F = K$ , alors on notera

$$\mathcal{L}_p(E, K) = \mathcal{L}(\underbrace{E \times \dots \times E}_{p \text{ fois}}; K).$$

Un élément  $f \in \mathcal{L}_p(E, K)$  est appelé une **forme  $p$ -linéaire**.

~~~~~ *Exemple 6.1.* 1.  $p = 1$  :  $\mathcal{L}(E_1; F)$  est l'espace des applications linéaires (au sens usuel) de  $E_1$  vers  $F$ . Les applications 1-linéaires sont donc juste des applications linéaires.

2.  $p = 2, \mathcal{L}_2(E, K)$  : un élément  $f \in \mathcal{L}_2(E, K)$  est une forme bilinéaire, au sens que nous avons déjà rencontré dans le cas  $K = \mathbf{R}$ .

(a) Par exemple, si  $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$  est pré-hilbertien réel, l'application  $f : (x_1, x_2) \in E \times E \mapsto \langle x_1, x_2 \rangle \in \mathbf{R}$  est dans  $\mathcal{L}_2(E, \mathbf{R})$ .

(b) Pour  $u, v \in K^2$ , on note  $\det(u, v) = u_1 v_2 - v_2 u_1$ . Alors

$$\begin{aligned} \det : K^2 \times K^2 &\longrightarrow K \\ (u, v) &\mapsto \det(u, v) \end{aligned}$$

est une application bilinéaire sur  $E = K^2$ . L'un des objectifs du chapitre est d'étendre cette définition en dimension quelconque.

3.  $p = 2, \mathcal{L}(E, E^*; K)$  : l'application  $f$  définie par

$$\begin{aligned} f : E \times E^* &\longrightarrow K \\ (x, \phi) &\mapsto \phi(x) \end{aligned}$$

est dans  $\mathcal{L}_2(E, E^*; K)$ .

4.  $p = 2, E = \mathbf{R}^3, \mathcal{L}(E, E; E)$  : le produit vectoriel <sup>a</sup> dans l'espace  $\mathbf{R}^3$

$$\begin{aligned} \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^3 &\longrightarrow \mathbf{R}^3 \\ (u, v) &\mapsto u \wedge v \end{aligned}$$

est un élément de  $\mathcal{L}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^3; \mathbf{R}^3)$ .

5.  $p$  quelconque. Soient  $\phi_1, \dots, \phi_p \in E^*$ , alors

$$\begin{aligned} f : E^p &\longrightarrow K \\ (x_1, \dots, x_p) &\mapsto \phi_1(x_1) \dots \phi_p(x_p) \end{aligned}$$

est une forme  $p$ -linéaire sur  $E$ .

a. On rappelle qu'en coordonnées, le produit vectoriel  $u \wedge v$  est donné par

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2 v_3 - u_3 v_2 \\ u_3 v_1 - u_1 v_3 \\ u_1 v_2 - u_2 v_1 \end{pmatrix}$$

### Proposition 6.1

Pour tous  $K$ -espaces vectoriels  $E_1, \dots, E_p, F$ ,  $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_p; F)$  est un sous-espace vectoriel de l'espace  $\mathcal{F}(E_1 \times \dots \times E_p, F)$  des fonctions de  $E_1 \times \dots \times E_p$  vers  $F$ .

*Preuve.* C'est une simple vérification, laissée en exercice. □

Implicitement,  $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_p; F)$  sera muni de cette structure de  $K$ -espace vectoriel.

### Proposition 6.2

Si  $E_1, \dots, E_p, F$  sont tous de dimension finie, alors  $\mathcal{L}(E_1, \dots, E_p; F)$  est de dimension finie, et

$$\dim \mathcal{L}(E_1, \dots, E_p; F) = \dim(E_1) \dots \dim(E_p) \dim(F).$$

*Preuve.* On procède par récurrence sur  $p$ .

On définit

$$\varphi : \mathcal{L}(E_1, \dots, E_p; F) \longrightarrow \mathcal{L}(E_1, \mathcal{L}(E_2, \dots, E_p; F))$$

par  $\forall f \in \mathcal{L}(E_1, \dots, E_p; F), \forall (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p, [\varphi(f)(x_1)](x_2, \dots, x_p) = f(x_1, \dots, x_p)$ , et

$$\psi : \mathcal{L}(E_1, \mathcal{L}(E_2, \dots, E_p; F)) \longrightarrow \mathcal{L}(E_1, \dots, E_p; F)$$

par  $\forall g \in \mathcal{L}(E_1, \mathcal{L}(E_2, \dots, E_p; F)), \forall (x_1, \dots, x_p) \in E_1 \times \dots \times E_p, \psi(g)(x_1, \dots, x_p) = g(x_1)(x_2, \dots, x_p)$ .

On vérifie sans difficulté que  $\varphi$  et  $\psi$  sont linéaires et que  $\varphi \circ \psi = \text{id}_{\mathcal{L}(E_1, \mathcal{L}(E_2, \dots, E_p; F))}$  et  $\psi \circ \varphi = \text{id}_{\mathcal{L}(E_1, \dots, E_p; F)}$ . Ceci montre que  $\varphi$  et  $\psi$  sont des isomorphismes et que  $\psi = \varphi^{-1}$ .

En particulier,

$$\begin{aligned} \dim \mathcal{L}(E_1, \dots, E_p; F) &= \dim \mathcal{L}(E_1, \mathcal{L}(E_2, \dots, E_p; F)) \\ &= \dim(E_1) \dim \mathcal{L}(E_2, \dots, E_p; F) \\ &= \dim(E_1) \dim(E_2) \dots \dim(E_p) \dim(F), \end{aligned}$$

d'après l'hypothèse de récurrence. □

### Corollaire 6.1

Pour tout  $K$ -espace vectoriel  $E$  de dimension finie, et pour tout  $p \geq 1$ , nous avons  $\dim \mathcal{L}_p(E, K) = \dim(E)^p$ .

## 6.2 Groupe symétrique : Rappels et notations

Soit  $X$  un ensemble. On note  $\mathfrak{S}_X$  l'ensemble des bijections de  $X$  dans lui-même :

$$\mathfrak{S}_X = \{\sigma : X \rightarrow X, \sigma \text{ bijective}\}.$$

On rappelle les propriétés suivantes :

1.  $\forall \sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{S}_X, \sigma_1 \circ \sigma_2 \in \mathfrak{S}_X$ .
2.  $\text{id}_X \in \mathfrak{S}_X$ .
3.  $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_X, \text{id}_X \circ \sigma = \sigma \circ \text{id}_X = \sigma$ .
4.  $\forall \sigma \in \mathfrak{S}_X, \exists! \tilde{\sigma} \in \mathfrak{S}_X \mid \sigma \circ \tilde{\sigma} = \tilde{\sigma} \circ \sigma = \text{id}_X$ . On dit que  $\tilde{\sigma}$  est la bijection réciproque de  $\sigma$ , et on la note  $\sigma^{-1}$ .

Les propriétés ci-dessus traduisent le fait que  $\mathfrak{S}_X$ , muni de la composition, est un groupe, d'élément neutre  $\text{id}_X$ . On l'appelle **groupe des permutations de  $X$** .

### Définition 6.3

Quel que soit  $n \geq 1$ , on définit  $\mathfrak{S}_n := \mathfrak{S}_{\llbracket 1, n \rrbracket}$ , et on l'appelle **groupe symétrique**. Un élément  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  est appelé **permutation**.

### Définition 6.4

Soient  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , avec  $i \neq j$ . On note  $(i \ j)$  l'élément  $\tau \in \mathfrak{S}_n$  défini par

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \tau(k) = \begin{cases} j & \text{si } k = i \\ i & \text{si } k = j \\ k & \text{si } k \notin \{i, j\}. \end{cases}$$

On dit que  $(i j)$  est la **transposition de support**  $\{i, j\}$ .

On notera que toute transposition  $\tau$  est une involution, *i.e.*  $\tau^{-1} = \tau$  (la réciproque n'est pas vraie).

### Théorème 6.1

Soit  $n \geq 2$  un entier. Alors, pour toute permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , il existe des transpositions  $\tau_1, \dots, \tau_r$  telles que  $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_r$ .

*Preuve.* On procède par récurrence sur  $n \geq 2$ .

- Si  $n = 2$ , alors  $\mathfrak{S}_n = \{\text{id}, (1\ 2)\}$ . La proposition est donc évidente.
- Soit  $n > 2$  et supposons que le théorème soit vrai pour  $n - 1$ . Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ . Soit  $k = \sigma(n)$ . On définit  $\sigma' \in \mathfrak{S}_n$  de la façon suivante :

- Si  $k = n$ , on prend  $\sigma' = \sigma$ .
- Si  $k \neq n$ , on prend  $\sigma' = (k\ n) \circ \sigma$ .

Alors, par construction,  $\sigma'(n) = n$ . En particulier,  $\sigma'(\llbracket 1, n-1 \rrbracket) = \llbracket 1, n-1 \rrbracket$ ,  $\tilde{\sigma} := \sigma|_{\llbracket 1, n-1 \rrbracket} \in \mathfrak{S}_{n-1}$ . Par hypothèse de récurrence, il existe  $\tau_1, \dots, \tau_r \in \mathfrak{S}_{n-1}$  des transpositions telles que  $\tilde{\sigma} = \tau_r \circ \dots \circ \tau_1$ . On vérifie sans difficulté que

- si  $k = n$ , alors  $\sigma = \tau_r \circ \dots \circ \tau_1$ ,
- si  $k \neq n$ , alors en posant  $\tau_{r+1} = (k\ n)$ , on a  $\sigma = \tau_{r+1} \circ \dots \circ \tau_1$ .

Ceci démontre la propriété au rang  $n$ , et termine la récurrence.  $\square$

*Remarque 6.1.* Les transpositions  $\tau_1, \dots, \tau_r$  fournies par le Théorème 6.1 ne sont pas uniques.

## 6.3 Morphisme signature

### Théorème 6.2

Soit  $n \geq 2$  un entier. Il existe une unique application

$$\varepsilon : \mathfrak{S}_n \rightarrow \{\pm 1\}$$

non-constante et telle que  $\forall \sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{S}_n, \varepsilon(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \varepsilon(\sigma_1)\varepsilon(\sigma_2)$ .

### Définition 6.5

L'application  $\varepsilon$  est appelée morphisme signature, et pour une permutation donnée  $\sigma$ , on dit que  $\varepsilon(\sigma)$  est la signature de  $\sigma$ .

#### 6.3.1 Construction de $\varepsilon$

On note  $\mathcal{P} = \{X \subset \llbracket 1, n \rrbracket \mid \text{Card } X = 2\}$  l'ensemble des parties à deux éléments de  $\llbracket 1, n \rrbracket$ . Si  $X \in \mathcal{P}$ , de la forme  $X = \{i, j\}$ , on note  $\ell(X) = |i - j|$ .

Définissons

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

On notera que pour tout  $X \in \mathcal{P}$ , il existe un unique couple  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$  tel que  $i < j$  et  $X = \{i, j\}$ , et que  $\frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i} = \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$ . Par conséquent, nous avons

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{\{i, j\} \in \mathcal{P}} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}.$$

L'intérêt de cette deuxième écriture est de s'affranchir de l'ordre des éléments de l'ensemble  $X$ , ce qui nous permettra de raisonner sur l'ensemble des parties, et non sur les paires ordonnées de couples.

**Définition 6.6**

Pour toute  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , on note

$$I(\sigma) = \text{Card}\{(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2 \mid i < j \text{ et } \sigma(i) > \sigma(j)\},$$

et on dit que  $I(\sigma)$  est le **nombre d'inversions** de  $\sigma$ .

**Proposition 6.3**

Pour toute permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , nous avons  $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{I(\sigma)}$ .

*Preuve.* On écrit

$$\varepsilon(\sigma) = \frac{\prod_{1 \leq i < j \leq n} \sigma(j) - \sigma(i)}{\prod_{1 \leq i < j \leq n} |j - i|}$$

et on note que

$$\begin{aligned} \prod_{1 \leq i < j \leq n} |j - i| &= \prod_{X \in \mathcal{P}} \ell(X) = \prod_{X \in \mathcal{P}} \ell(\sigma(X)) \\ &= \prod_{\{i, j\} \in \mathcal{P}} |\sigma(j) - \sigma(i)| \\ &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} |\sigma(j) - \sigma(i)| \end{aligned}$$

puisque l'application  $X \in \mathcal{P} \mapsto \sigma(X) \in \mathcal{P}$  est une bijection de  $\mathcal{P}$  sur lui-même, de réciproque  $Y \in \mathcal{P} \mapsto \sigma^{-1}(Y) \in \mathcal{P}$ .

Ainsi,

$$\varepsilon(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{|\sigma(j) - \sigma(i)|} = (-1)^{I(\sigma)}$$

puisque

$$\frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{|\sigma(j) - \sigma(i)|} = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(j) > \sigma(i) \\ -1 & \text{si } \sigma(j) < \sigma(i). \end{cases}$$

□

En particulier,  $\varepsilon$  est bien à valeurs dans  $\{\pm 1\}$ . Notons que  $\varepsilon(\text{id}) = 1$  et que pour  $\tau = (1 \ 2)$ ,  $\varepsilon(\tau) = -1$ , car  $I(\text{id}) = 0$  et  $I(\tau) = 1$ . Ceci montre notamment que  $\varepsilon$  est non-constante.

**Proposition 6.4**

Pour toutes  $\sigma_1, \sigma_2 \in \mathfrak{S}_n$ , on a  $\varepsilon(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \varepsilon(\sigma_1)\varepsilon(\sigma_2)$ .

*Preuve.* On écrit

$$\begin{aligned}\varepsilon(\sigma_1 \circ \sigma_2) &= \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma_1(\sigma_2(j)) - \sigma_1(\sigma_2(i))}{\sigma_2(j) - \sigma_2(i)} \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma_2(j) - \sigma_2(i)}{j - i} \\ &= \left( \prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma_1(\sigma_2(j)) - \sigma_1(\sigma_2(i))}{\sigma_2(j) - \sigma_2(i)} \right) \varepsilon(\sigma_2).\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}\prod_{1 \leq i < j \leq n} \frac{\sigma_1(\sigma_2(j)) - \sigma_1(\sigma_2(i))}{\sigma_2(j) - \sigma_2(i)} &= \prod_{\{i,j\} \in \mathcal{P}} \frac{\sigma_1(\sigma_2(j)) - \sigma_1(\sigma_2(i))}{\sigma_2(j) - \sigma_2(i)} \\ &= \prod_{\{k,l\} \in \mathcal{P}} \frac{\sigma_1(l) - \sigma_1(k)}{l - k} \\ &= \varepsilon(\sigma_1).\end{aligned}$$

On en déduit la formule annoncée.  $\square$

### 6.3.2 Unicité de la signature

#### Proposition 6.5

Soit  $\tau = (i j)$  une transposition. Soit  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ . Alors  $\sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1} = (\sigma(i) \sigma(j))$ .

*Preuve.* Notons  $\tau' = \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}$ . Alors,  $\tau'(\sigma(i)) = \sigma \circ \tau(i) = \sigma(j)$ . De même,  $\tau'(\sigma(j)) = \sigma(i)$ . Enfin, si  $k \notin \{\sigma(i), \sigma(j)\}$ , alors  $\sigma^{-1}(k) \notin \{i, j\}$ , et donc  $\tau(\sigma^{-1}(k)) = \sigma^{-1}(k)$ , d'où  $\tau'(k) = k$ . Ceci montre bien que  $\tau' = \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}$ .  $\square$

#### Corollaire 6.2

Pour toutes transpositions  $\tau, \tau' \in \mathfrak{S}_n$ , il existe une permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  telle que  $\tau' = \sigma \circ \tau \circ \sigma^{-1}$ .

Soit  $\varepsilon' : \mathfrak{S}_n \rightarrow \{\pm 1\}$  non-constante et telle que  $\varepsilon'(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \varepsilon'(\sigma_1)\varepsilon'(\sigma_2)$ . Montrons que  $\varepsilon' = \varepsilon$ .

Comme  $\text{id} \circ \text{id} = \text{id}$ , nous avons  $\varepsilon'(\text{id})^2 = \varepsilon'(\text{id})$ , d'où  $\varepsilon'(\text{id}) = 1$ . Puisque  $\varepsilon'$  est non-constante, il existe  $\sigma_0 \in \mathfrak{S}_n$  telle que  $\varepsilon'(\sigma_0) = -1$ . D'après le Théorème 6.1, il existe  $\tau_1, \dots, \tau_k$  des transpositions telles que  $\sigma_0 = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_k$ . Nécessairement, il existe  $i \in \llbracket 1, k \rrbracket$  tel que  $\varepsilon'(\tau_i) = -1$ , puisque dans le cas contraire, on aurait  $\varepsilon'(\sigma_0) = 1$ . Si  $\tau$  est maintenant une transposition quelconque, le corollaire précédent nous donne l'existence de  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  telle que  $\tau = \sigma \circ \tau_i \circ \sigma^{-1}$ , et on a alors  $\varepsilon'(\tau) = \varepsilon'(\sigma)\varepsilon'(\tau_i)\varepsilon'(\sigma^{-1}) = \varepsilon'(\tau_i) = -1$ .

Ainsi, pour toute transposition  $\tau$ , on a  $\varepsilon'(\tau) = -1$ . Il en va de même pour  $\varepsilon$  puisqu'elle vérifie les mêmes propriétés que  $\varepsilon'$ . Soit maintenant  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$  quelconque. Alors, d'après le Théorème 6.1, il existe  $\tau_1, \dots, \tau_k \in \mathfrak{S}_n$  des transpositions telles que  $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_k$ . Nous avons donc

$$\varepsilon'(\sigma) = \varepsilon'(\tau_1) \dots \varepsilon'(\tau_k) = (-1)^k = \varepsilon(\sigma).$$

D'où  $\varepsilon' = \varepsilon$ .

### 6.3.3 À bien retenir de cette preuve

1. Pour toute transposition  $\tau \in \mathfrak{S}_n$ , on a  $\varepsilon(\tau) = -1$ .

2. Dans le Théorème 6.1, ni les transpositions  $\tau_1, \dots, \tau_k$ , ni même leur nombre  $k$ , ne sont uniques. La seule chose qui est indépendante du choix de cette décomposition est la **parité** de  $k$  (c'est une conséquence de l'existence du morphisme signature). C'est ce que la signature nous permet de mesurer.
3. Dans la pratique, on ne va pas chercher à utiliser les formules donnant  $\varepsilon(\sigma)$ , ni le nombre d'inversion. On préférera souvent décomposer la permutation en produit de cycles à support disjoints.

## 6.4 Dimension de l'espace des formes multilinéaires alternées

Dans cette section,  $K$  désigne un corps de caractéristique différente de 2. Cela signifie que, dans  $K$ ,  $1 + 1 \neq 0$ . On fixe également  $E$  un  $K$ -espace vectoriel.

### Définition 6.7

Soit  $f \in \mathcal{L}_p(E, K)$  une forme  $p$ -linéaire. On dit que  $f$  est alternée si quels que soient  $x_1, \dots, x_p \in E$ , et quels que soient  $i, j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , avec  $i \neq j$ , on a  $x_i = x_j \Rightarrow f(x_1, \dots, x_p) = 0$

### Proposition 6.6

Soit  $f \in \mathcal{L}_p(E, K)$ . Alors,

$$\begin{aligned} f \text{ est alternée} &\iff \forall i, j \in \llbracket 1, p \rrbracket, i < j, \forall x_1, \dots, x_p \in E, \\ &\quad f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) = -f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_p) \\ &\iff \forall \sigma \in \mathfrak{S}_p, \forall x_1, \dots, x_p \in E, f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) = \varepsilon(\sigma) f(x_1, \dots, x_p) \end{aligned}$$

*Preuve.* Supposons que  $f$  est alternée. Soient  $i, j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $i < j$  et  $x_1, \dots, x_p \in E$ . Alors,

$$\begin{aligned} 0 &= f(x_1, \dots, x_i + x_j, \dots, x_i + x_j, \dots, x_p) \\ &= f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p) + f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_p). \end{aligned}$$

Inversement, si  $f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_p) = -f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_p)$  pour tous  $i, j \in \llbracket 1, p \rrbracket$ ,  $i < j$ , et  $x_1, \dots, x_p \in E$ , alors, si  $x_i = x_j = x$ , nous avons

$$f(x_1, \dots, x, \dots, x, \dots, x_p) = -f(x_1, \dots, x, \dots, x, \dots, x_p)$$

D'où  $2f(x_1, \dots, x, \dots, x, \dots, x_p) = 0$ , d'où  $f(x_1, \dots, x, \dots, x, \dots, x_p) = 0$  puisque  $2 \neq 0$ . D'où la première équivalence.

Le sens réciproque de la deuxième équivalence est immédiat : il suffit de prendre  $\sigma = (i j)$ . Pour le sens direct, on sait que la propriété est vraie pour toute transposition. Si  $\sigma$  est maintenant une permutation quelconque, on écrit  $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_k$  et on a

$$\begin{aligned} f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}) &= f(x_{\tau_1 \dots \tau_k(1)}, \dots, x_{\tau_1 \dots \tau_k(p)}) \\ &= -f(x_{\tau_2 \dots \tau_k(1)}, \dots, x_{\tau_2 \dots \tau_k(p)}) \\ &= (-1)^k f(x_1, \dots, x_p) \\ &= \varepsilon(\sigma) f(x_1, \dots, x_p). \end{aligned}$$

□

Il est immédiat de vérifier que l'ensemble des formes  $p$ -linéaires alternées forment un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{L}_p(E, K)$ .

**Définition 6.8**

On note  $\mathcal{A}_p(E)$  l'espace des formes  $p$ -linéaires alternées sur  $E$ .

**Proposition 6.7**

Quelle que soit  $f \in \mathcal{A}_p(E)$ , quels que soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in K$ ,  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$ , et  $x_1, \dots, x_p \in E$ , on a

$$f(x_1, \dots, x_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j x_j, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n).$$

De plus, si la famille  $(x_1, \dots, x_p)$  est liée, alors  $f(x_1, \dots, x_p) = 0$ .

*Preuve.* Pour le premier point, il suffit d'utiliser la linéarité de  $f$  en la  $i$ -ème entrée :

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j x_j, \dots, x_n) &= f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) + \sum_{j \neq i} \lambda_j \underbrace{f(x_1, \dots, x_j, \dots, x_n)}_{x_j \text{ en position } i \text{ et en } j} \\ &= f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n). \end{aligned}$$

Pour la deuxième, soient  $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in K$  non tous nuls tels que  $\sum \lambda_k x_k = 0$ . Soit  $i \in \llbracket 1, p \rrbracket$  tel que  $\lambda_i \neq 0$ . Alors,

$$\begin{aligned} 0 &= f(x_1, \dots, \sum \lambda_k x_k, \dots, x_p) \\ &= \lambda_i f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_p) + \sum_{k \neq i} \lambda_k \underbrace{f(x_1, \dots, x_k, \dots, x_n)}_{x_k \text{ en position } i \text{ et } k} \\ &= \lambda_i f(x_1, \dots, x_p). \end{aligned}$$

D'où  $f(x_1, \dots, x_p) = 0$  puisque  $\lambda_i \neq 0$ . □

**Théorème 6.3**

Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie égale à  $n \geq 1$ . Alors,  $\mathcal{A}_n(E)$  est une droite vectorielle, *i.e.* il est de dimension finie égale à 1.

De plus, si  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est une base quelconque de  $E$ , alors il existe une unique  $f \in \mathcal{A}_n(E)$  telle que  $f(e_1, \dots, e_n) = 1$ .

*Preuve.* Soit  $(e_1^*, \dots, e_n^*)$  la base duale de  $\mathcal{B}$  et soit  $d \in \mathcal{L}_n(E, K)$  définie par

$$\forall x_1, \dots, x_n \in E, d(x_1, \dots, x_n) = e_1^*(x_1) \dots e_n^*(x_n).$$

Définissons alors  $\delta \in \mathcal{L}_n(E, K)$  par

$$\forall x_1, \dots, x_n \in E, \delta(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) d(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}).$$

**Lemme 6.1**

$\delta \in \mathcal{A}_n(E)$  et  $\delta(e_1, \dots, e_n) = 1$ .

*Démonstration.* Soit  $\sigma_0 \in \mathfrak{S}_n$ . Alors, nous avons pour tous  $x_1, \dots, x_n \in E$ ,

$$\begin{aligned} \delta(x_{\sigma_0(1)}, \dots, x_{\sigma_0(n)}) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) d(x_{\sigma\sigma_0(1)}, \dots, x_{\sigma\sigma_0(n)}) \\ &= \varepsilon(\sigma_0) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma\sigma_0) d(x_{\sigma\sigma_0(1)}, \dots, x_{\sigma\sigma_0(n)}) \\ &= \varepsilon(\sigma_0) \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) d(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \\ &= \varepsilon(\sigma_0) \delta(x_1, \dots, x_n), \end{aligned}$$

l'avant-dernière égalité provenant du fait que l'application  $\sigma \in \mathfrak{S}_n \mapsto \sigma\sigma_0 \in \mathfrak{S}_n$  est une bijection de  $\mathfrak{S}_n$  sur lui-même (d'inverse  $\sigma \mapsto \sigma\sigma_0^{-1}$ ). Ainsi,  $\delta \in \mathcal{A}_n(E)$  comme annoncé.

Soit maintenant  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ ,  $\sigma \neq \text{id}$ . Soit  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  tel que  $\sigma(i) \neq i$ . Alors,  $e_{\sigma(i)}^*(e_i) = 0$ , et donc  $e_{\sigma(1)}^*(e_1) \dots e_{\sigma(n)}^*(e_n) = 0$  pour toute  $\sigma \neq \text{id}$ . Ainsi,  $\delta(e_1, \dots, e_n) = e_1^*(e_1) \dots e_n^*(e_n) = 1$  comme annoncé.  $\square$

Soit  $f \in \mathcal{A}_n(E)$  quelconque. Soient  $x_1, \dots, x_n \in E$ . Notons pour tous  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ ,  $\xi_i^j = e_j^*(x_i)$ , de sorte que  $x_i = \sum_j \xi_i^j e_j$ . Nous avons alors

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{j_1=1}^n \xi_1^{j_1} f(e_{j_1}, x_2, \dots, x_n) \\ &= \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \xi_1^{j_1} \xi_2^{j_2} f(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, x_n) \\ &= \sum_{j_1=1}^n \sum_{j_2=1}^n \dots \sum_{j_n=1}^n \xi_1^{j_1} \xi_2^{j_2} \dots \xi_n^{j_n} f(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_n}) \\ &= \sum_{(j_1, \dots, j_n) \in \llbracket 1, n \rrbracket^n} \xi_1^{j_1} \xi_2^{j_2} \dots \xi_n^{j_n} f(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_n}) \end{aligned}$$

Comme  $f$  est alternée, on a  $f(e_{j_1}, e_{j_2}, \dots, e_{j_n}) = 0$  dès qu'il existe  $k \neq l$  tels que  $j_k = j_l$ . Ainsi, on peut restreindre la sommation aux  $n$ -uplets  $(j_1, \dots, j_n)$  d'entiers deux à deux distincts. Un tel  $n$ -uplet vérifie cette contrainte si et seulement s'il est de la forme  $(\sigma(1), \dots, \sigma(n))$  où  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \xi_1^{\sigma(1)} \dots \xi_n^{\sigma(n)} f(e_{\sigma(1)}, \dots, e_{\sigma(n)}) \\ &= \left( \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \xi_1^{\sigma(1)} \dots \xi_n^{\sigma(n)} \right) f(e_1, \dots, e_n). \end{aligned}$$

En appliquant ceci à  $f = \delta$  définie ci-dessus, nous avons

$$\delta(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \xi_1^{\sigma(1)} \dots \xi_n^{\sigma(n)},$$

d'où

$$\forall x_1, \dots, x_n \in E, f(x_1, \dots, x_n) = f(e_1, \dots, e_n) \delta(x_1, \dots, x_n)$$

soit encore

$$f = f(e_1, \dots, e_n)\delta$$

ce qui montre que  $f \in K\delta$ . Ceci étant valable pour toute  $f \in \mathcal{A}_n(E)$ , nous avons  $\mathcal{A}_n(E) = K\delta$ . La dernière expression montre clairement que  $\delta$  est l'unique forme  $n$ -linéaire alternée qui vaut 1 sur la base  $(e_1, \dots, e_n)$ .  $\square$

*Remarque 6.2.* Nous allons voir plus loin que, toujours avec un  $K$ -espace vectoriel  $E$  de dimension  $n$ , pour tout  $p \geq 1$ , on a la formule

$$\dim \mathcal{A}_p(E) = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!},$$

avec la convention usuelle  $\binom{n}{p} = 0$  pour  $p > n$ . En particulier  $\mathcal{A}_p(E) = \{0\}$  pour  $p > n$ .

## 6.5 La $n$ -forme $\det_{\mathcal{B}}$ , où $\mathcal{B}$ est une base de $E$

La première notion de déterminant que nous introduisons est celle d'une application  $n$ -linéaire alternée qui est calculée à partir d'une base de  $E$ .

### Définition 6.9

Si  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ , alors on appelle déterminant associé à  $\mathcal{B}$ , et on note  $\det_{\mathcal{B}}$ , l'unique élément de  $\mathcal{A}_n(E)$  tel que  $\det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = 1$ .

On notera bien que la preuve du théorème précédent nous donne une expression explicite en coordonnées de  $\det_{\mathcal{B}}$  : si  $x_1, \dots, x_n \in E$ , et si  $x_i = \sum_j \xi_i^j e_j$  avec  $\xi_i^j \in K$ , alors

$$\det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \xi_1^{\sigma(1)} \dots \xi_n^{\sigma(n)}$$

### Proposition 6.8

Soient  $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$  deux bases de  $E$ . Nous avons la formule de changement de base

$$\det_{\mathcal{B}'} = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \cdot \det_{\mathcal{B}}$$

Si  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$  est une famille quelconque de  $n$ -vecteurs de  $E$  et si  $\mathcal{B}$  est une base quelconque, alors

$$(x_1, \dots, x_n) \text{ est liée} \iff \det_{\mathcal{B}}(x_1, \dots, x_n) = 0.$$

*Preuve.* Pour la première identité, comme  $\det_{\mathcal{B}'} \in \mathcal{A}_n(E)$ , il existe  $\lambda \in K$  tel que  $\det_{\mathcal{B}'} = \lambda \det_{\mathcal{B}}$ . En évaluant sur le  $n$ -uplet  $\mathcal{B}$ , on obtient  $\lambda = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B})$ .

Nous avons déjà vu le sens direct de l'implication, qui est vrai pour n'importe quelle forme  $p$ -linéaire alternée. Pour l'autre implication, on montre sa contraposée. On suppose que  $(x_1, \dots, x_n)$  est libre. C'est donc une base, notée  $\mathcal{B}'$ . Nous avons alors par définition, et par ce qui précède,  $1 = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}') = \det_{\mathcal{B}'}(\mathcal{B}) \det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}')$ , d'où  $\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{B}') \neq 0$ .  $\square$

## 6.6 Déterminant d'un endomorphisme

Nous avons la conséquence suivante du Théorème 6.3.

### Corollaire 6.3

Si  $u \in \mathcal{L}(E)$ , alors il existe  $\lambda \in K$  telle que

$$\forall f \in \mathcal{A}_n(E), \forall x_1, \dots, x_n \in E, f(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \lambda f(x_1, \dots, x_n).$$

*Preuve.* Soit  $f_0 \in \mathcal{A}_n(E)$  non-nulle, de sorte que  $\mathcal{A}_n(E) = K.f_0$ . Alors, l'application  $g : E^n \rightarrow K$  définie par  $\forall x_1, \dots, x_n \in E, g(x_1, \dots, x_n) = f_0(u(x_1), \dots, u(x_n))$  est  $n$ -linéaire et alternée. Elle est donc proportionnelle à  $f_0$ , d'où l'existence de  $\lambda \in K$  tel que  $g = \lambda f_0$ .

Si  $f \in \mathcal{A}_n(E)$  est quelconque, alors  $f = \mu f_0$  pour un certain  $\mu \in K$ . Par conséquent, quel que soit  $(x_1, \dots, x_n) \in E^n$ , on a  $f(u(x_1), \dots, u(x_n)) = \mu g(x_1, \dots, x_n) = \lambda \mu f_0(x_1, \dots, x_n) = \lambda f(x_1, \dots, x_n)$ .  $\square$

### Définition 6.10

Si  $u \in \mathcal{L}(E)$ , l'unique  $\lambda$  défini par le corollaire précédent est appelé **déterminant de  $u$** , et on le note  $\det(u)$ .

Si  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  est une base quelconque de  $E$ , puisque  $\det_{\mathcal{B}} \in \mathcal{A}_n(E)$ , on a par définition  $\det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n)) = \det(u) \det_{\mathcal{B}}(e_1, \dots, e_n) = \det(u)$ . En notant  $M = (m_{ij}) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ , on obtient alors

$$\det(u) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) m_{\sigma(1)1} \cdots m_{\sigma(n)n}$$

puisque  $u(e_i) = \sum_j m_{ji} e_j$ .

### Définition 6.11

Soit  $M = (m_{ij}) \in M_n(K)$ . On appelle déterminant de  $M$ , et on note  $\det(M)$ , le déterminant de l'endomorphisme  $u_M \in \mathcal{L}(K^n)$  canoniquement associé à  $M$ . On le notera également

$$\det(M) = \begin{vmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{vmatrix}.$$

*Remarque 6.3.* De façon équivalente, on a

$$\det(M) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) m_{\sigma(1)1} \cdots m_{\sigma(n)n}.$$

## 6.7 Propriétés du déterminant

On passe à présent en revue un certain nombre de propriétés centrales du déterminant.

### Proposition 6.9

Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension  $n$ .

1. Si  $u, v \in \mathcal{L}(E)$ , alors  $\det(u \circ v) = \det(u) \det(v)$ .
2.  $\det(\text{id}_E) = 1$
3. Si  $u \in \mathcal{L}(E)$  et  $\lambda \in K$  alors  $\det(\lambda u) = \lambda^n \det(u)$ .
4. Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Alors

$$u \text{ est inversible} \iff \det(u) \neq 0$$

et dans ce cas,  $\det(u^{-1}) = \det(u)^{-1}$ .

*Preuve.* Soit  $f \in \mathcal{A}_n(K)$  non-nulle. Alors, pour tous  $x_1, \dots, x_n \in E$ , on a

$$\begin{aligned} f(u \circ v(x_1), \dots, u \circ v(x_n)) &= \det(u \circ v) f(x_1, \dots, x_n) \\ &= \det(u) f(v(x_1), \dots, v(x_n)) \\ &= \det(u) \det(v) f(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

D'où  $\det(u \circ v) = \det(u) \det(v)$ .

Le déterminant de l'identité vaut évidemment 1.

Soit  $f$  une forme  $n$ -linéaire et alternée, non-nulle. Alors, pour tous  $x_1, \dots, x_n \in E$ , nous avons

$$\begin{aligned} f(\lambda u(x_1), \dots, \lambda u(x_n)) &= \det(\lambda u) f(x_1, \dots, x_n) \\ &= \lambda^n f(u(x_1), \dots, u(x_n)) \\ &= \lambda^n \det(u) f(x_1, \dots, x_n). \end{aligned}$$

D'où  $\det(\lambda u) = \lambda^n \det(u)$ .

Soit  $u \in \mathcal{L}(E)$ . Si  $u$  est inversible, alors en prenant le déterminant sur la relation  $u \circ u^{-1} = \text{id}_E$ , on a  $\det(u) \det(u^{-1}) = 1$  d'après ce qu'on vient de démontrer. En particulier,  $\det(u) \neq 0$ . Inversement, supposons  $\det(u) \neq 0$  et soit  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ . Nous avons alors

$$\det(u) = \det_{\mathcal{B}}(u(e_1), \dots, u(e_n)) \neq 0.$$

Ceci signifie que la famille  $(u(e_1), \dots, u(e_n))$  est libre, et donc  $\text{Rg}(u) = n$  :  $u$  est donc inversible.

Enfin, comme on vient de le voir, si  $u$  est inversible,  $\det(u) \det(u^{-1}) = 1$  et donc  $\det(u^{-1}) = 1/\det(u)$ .  $\square$

Ces propriétés se transposent naturellement au déterminant matriciel. Mais ce dernier à l'avantage d'être plus pratique grâce à des opérations sur les lignes et les colonnes, que nous admettrons par gain de temps.

### Proposition 6.10

Soit  $A, B \in M_n(K)$ . Alors :

1.  $\det(AB) = \det(A) \det(B)$ , et  $A \in \text{GL}_n(K) \iff \det(A) \neq 0$ .
2.  $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$ .
3.  $\det(A) = \det({}^t A)$ .
4. Si  $A$  s'écrit en colonne  $A = (C_1 | \dots | C_n)$ , et si  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ , alors en notant  $A^\sigma = (C_{\sigma(1)} | \dots | C_{\sigma(n)})$ , alors  $\det(A^\sigma) = \varepsilon(\sigma) \det(A)$ . En particulier, si  $\sigma = (i \ j)$ , alors le déterminant change de signe lorsqu'on échange les colonnes  $C_i$  et  $C_j$ .
5. Par transposition, la même observation est valable sur les lignes de  $A$ .
6. Avec les mêmes notations,  $\det(A) = \det(A')$ , où  $A'$  est une matrice obtenue en remplaçant  $C_i$  par  $C_i + \sum_{j \neq i} \lambda_j C_j$ . Même chose avec les lignes.
7. Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses termes diagonaux : pour toute  $M = (m_{ij}) \in M_n(K)$ ,

$$(\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, i > j \Rightarrow m_{ij} = 0) \Rightarrow \det M = m_{11} \dots m_{nn}.$$

## 6.8 Développement par rapport à une ligne ou une colonne. Comatrice.

**Définition 6.12**

Soit  $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ . Pour tous  $(i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2$ , on note  $\Delta_{ij} = \det(\tilde{A}_{ij})$ , où  $\tilde{A}_{ij} \in M_{n-1}(K)$  est la matrice obtenue à partir de  $A$  en supprimant la  $i$ -ème ligne et la  $j$ -ème colonne.

On appelle  $\Delta_{ij}$  le **mineur** de  $A$  associé à  $(i, j)$ .

On appelle **cofacteur** de  $a_{ij}$  le scalaire  $\alpha_{ij} = (-1)^{i+j} \Delta_{ij}$ .

La proposition ci-dessous est très utile en pratique pour calculer des déterminants.

**Proposition 6.11** (Développement selon une ligne ou une colonne)

Soit  $A = (a_{ij}) \in M_n(K)$ . On note  $\alpha_{ij}$  ses cofacteurs. Alors, pour tous  $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$ , on a

- $\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \alpha_{ij} = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$  (développement par rapport à la  $j$ -ème colonne)
- $\det(A) = \sum_{j=1}^n a_{ij} \alpha_{ij} = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \Delta_{ij}$  (développement par rapport à la  $i$ -ème ligne)

**Définition 6.13**

Soit  $A \in M_n(K)$ . On appelle **comatrice de  $A$** , et on note  $\text{Com}(A)$ , la matrice  $\text{Com}(A) := (\alpha_{ij}) \in M_n(K)$  dont les entrées sont les cofacteurs de  $A$ .

**Proposition 6.12**

Pour toute matrice  $A \in M_n(K)$ , on a  $A^t \text{Com}(A) = \det(A) I_n$ . En particulier, si  $A$  est inversible, alors

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} {}^t \text{Com}(A)$$