Thème : Applications multilinéaires. Déterminants.

Exercice 1. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie égale à n, soit $\mathcal{B}$ une base de E et soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que pour tous $x_1, \ldots, x_n \in E$,

$$\sum_{k=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_{k-1}, u(x_k), x_{k+1}, \ldots, x_n) = \operatorname{Tr}(u) \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n).$$

Solution. À chaque k fixé, l'application $(x_1, \ldots, x_n) \mapsto \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_{k-1}, u(x_k), x_{k+1}, \ldots, x_n)$ est n-linéaire alternée. Il en va donc de même pour leur somme. Comme $\dim \mathcal{A}_n(E) = 1$, il existe un scalaire $\lambda \in K$ tel que

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in E^n,\ \sum_{k=1}^{n} \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_{k-1}, u(x_k), x_{k+1}, \ldots, x_n) = \lambda \det_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n).$$

Il nous suffit de voir que $\lambda = \operatorname{Tr}(u)$. Pour cela, on évalue la relation sur $(x_1, \ldots, x_n) = (e_1, \ldots, e_n) = \mathcal{B}$. Le terme de droite devient λ par définition de $\det_{\mathcal{B}}$. Quant à celui de gauche, si on note $M = (m_{ij}) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$, nous avons pour chaque $k \in [\![1, n]\!]$,

$$\det_{\mathcal{B}}(e_1, \ldots, e_{k-1}, u(e_k), e_{k+1}, \ldots, e_n) = \sum_{i=1}^{n} m_{ik} \det_{\mathcal{B}}(e_1, \ldots, e_{k-1}, e_i, e_{k+1}, \ldots, e_n) = m_{kk},$$

puisque le seul terme non-nul de la somme est celui en $i = k$. Nous obtenons alors $\lambda = \sum_{k=1}^{n} m_{kk} = \operatorname{Tr}(M) = \operatorname{Tr}(u)$.

Exercice 2. Soient $a_1, \ldots, a_n \in K$. Le déterminant de Vandermonde qui leur est associé est défini par

$$V_n(a_1, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ a_1 & \cdots & a_n \\ \vdots & & \vdots \\ a_1^{n-1} & \cdots & a_n^{n-1} \end{vmatrix}.$$

Montrer que $V_n(a_1, \ldots, a_n) = \displaystyle\prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (a_j - a_i)$.

Solution. On commence par noter que si $a_i = a_j$ pour un certain couple (i, j) avec $i \neq j$, alors les colonnes i et j du déterminant coïncident, et donc $V_n(a_1, \ldots, a_n) = 0$, en accord avec la formule.

Nous pouvons nous placer dans le cas où les a_i sont deux-à-deux distincts. On introduit la fonction $P : x \in K \mapsto V_n(a_1, \ldots, a_{n-1}, x)$. Comme

$$P(x) = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & 1 \\ a_1 & \cdots & a_{n-1} & x \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_1^{n-1} & \cdots & a_{n-1}^{n-1} & x^{n-1} \end{vmatrix},$$

en développant par rapport à la dernière colonne, on voit que P est une fonction polynomiale de x, de degré $\leqslant n-1$, et que $P(x) = V_{n-1}(a_1, \ldots, a_{n-1}) x^{n-1} + Q(x)$, où $\deg(Q) \leqslant n-2$.

Or, toujours d'après le fait que le déterminant, vu comme fonction n-linéaire alternée, s'annule dès que deux colonnes sont égales, nous avons

$$P(a_1) = \cdots = P(a_{n-1}) = 0.$$

Comme les a_i sont deux à deux distincts, et $\deg(P) \leqslant n-1$, on en déduit que $P(x) = \lambda \prod_{i=1}^{n-1}(x-a_i)$, où λ est le coefficient de x^{n-1} dans P, à savoir $V_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1})$. Ainsi,

$$V_n(a_1, \dots, a_n) = P(a_n) = V_{n-1}(a_1, \dots, a_{n-1}) \prod_{i=1}^{n-1}(a_n - a_i).$$

Une récurrence immédiate sur n nous donne alors

$$V_n(a_1, \dots, a_n) = \prod_{k=1}^{n} \left(\prod_{i=1}^{k-1} (a_k - a_i) \right),$$

qui est bien la formule annoncée.

Exercice 3. Soient $A(a_1, a_2, a_3)$, $B(b_1, b_2, b_3)$, $C(c_1, c_2, c_3)$ trois points non-alignés dans l'espace muni d'un repère orthonormé. Montrer que l'équation cartésienne du plan passant par A, B, C est

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & x \\ a_2 & b_2 & c_2 & y \\ a_3 & b_3 & c_3 & z \end{vmatrix} = 0.$$

Solution. Notons

$$f(x, y, z) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & x \\ a_2 & b_2 & c_2 & y \\ a_3 & b_3 & c_3 & z \end{vmatrix}.$$

En développant par rapport à la dernière colonne, on voit que f est une fonction de la forme $f(x, y, z) = \alpha x + \beta y + \gamma z + \delta$, où $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{R}$. Pour les raisons usuelles, $f(a_1, a_2, a_3) = f(b_1, b_2, b_3) = f(c_1, c_2, c_3) = 0$.

Si nous vérifions que $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$, alors on saura que $\{f = 0\}$ est bien l'équation d'un plan de l'espace, et que ce plan passe par A, B, C. Or,

$$\alpha = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_2 - c_2 & b_2 - c_2 & c_2 \\ a_3 - c_3 & b_3 - c_3 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 - c_2 & b_2 - c_2 \\ a_3 - c_3 & b_3 - c_3 \end{vmatrix}.$$

De même, on obtient

$$\beta = -\begin{vmatrix} a_1 - c_1 & b_1 - c_1 \\ a_3 - c_3 & b_3 - c_3 \end{vmatrix} \text{ et } \gamma = \begin{vmatrix} a_1 - c_1 & b_1 - c_1 \\ a_2 - c_2 & b_2 - c_2 \end{vmatrix}.$$

Ainsi, nous avons

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BC} \neq \overrightarrow{0},$$

puisque A, B, C sont non-alignés par hypothèse.

Exercice 4. Soit $(E, \langle .\,, . \rangle)$ un espace hermitien et soient $x_1, \dots, x_p$ des vecteurs de E. On définit leur *matrice de Gram* $G = G(x_1, \dots, x_p) \in M_p(\mathbf{C})$ par la donnée de ses coefficients

$$\forall i, j \in [\![1, p]\!],\ g_{ij} = \langle x_i, x_j \rangle.$$

On se donne une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de E. Pour toute matrice rectangle $A \in M_{k,\ell}(\mathbf{C})$, on note $A^* = {}^t\overline{A}$.

1. Soit $M = \mathrm{Mat}_{(e_i)}(x_1, \ldots, x_p)$. Montrer que $G(x_1, \ldots, x_p) = M^*M$.
2. En déduire que $\det(G(x_1, \ldots, x_p)) \geqslant 0$, et que $\det(G(x_1, \ldots, x_p)) > 0$ si et seulement si la famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre.
3. Montrer que $\det(G(x_1, \ldots, x_p)) = \det(G(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)}))$ pour toute permutation $\sigma : [\![1, p]\!] \to [\![1, p]\!]$.
4. Montrer que $\det(G(x_1, \ldots, x_p)) = \det(G(x_1', x_2, \ldots, x_p))$, où $x_1' = x_1 + \sum_{i=2}^{p} \lambda_i x_i$, pour tous $\lambda_2, \ldots, \lambda_p \in \mathbf{C}$.
5. On suppose que $x_1, \ldots, x_p$ sont linéairement indépendants. Soit $F = \mathrm{Vect}(x_1, \ldots, x_p)$ et soit $x \in E$. On note $\mathrm{d}(x, F) = \inf\{\|x - y\|,\ y \in F\}$. Montrer que
$$\mathrm{d}(x, F)^2 = \frac{\det(G(x, x_1, \ldots, x_p))}{\det(G(x_1, \ldots, x_p))}.$$

Solution. 1. Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, on a $x_i = \sum_{k=1}^{n} m_{ki} e_k$. D'où $\langle x_i, x_j \rangle = \sum_{k=1}^{n} m_{ki} m_{kj}$ puisque la base est orthonormée. Or, le coefficient (i, j) de la matrice M^*M est $({}^tMM)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} m_{ki} m_{kj}$. D'où $M^*M = G(x_1, \ldots, x_p)$.

2. La matrice G est hermitienne, et nous avons pour tout $X \in \mathbf{C}^p$
$$X^*GX = X^*M^*MX = (MX)^*(MX).$$
Or, $X_1^*X_2$ est l'expression du produit scalaire hermitien standard sur $\mathbf{C}^n$. Par conséquent, $X^*GX \in \mathbf{R}_+$ et $X^*GX = 0 \iff MX = 0$.

Soient $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in \mathbf{R}$ les valeurs propres de G comptées avec multiplicité (elles existent et sont réelles parce que G est hermitienne). On a $\det(G) = \lambda_1 \ldots \lambda_p$. Soit $(X_1, \ldots, X_p)$ une base orthonormée de $\mathbf{C}^p$ telle que $MX_k = \lambda_k X_k$. Alors,
$$\lambda_k = X_k^* G X_k.$$
En particulier, $\lambda_k \geqslant 0$ pour tout k, et donc $\det G \geqslant 0$.

Ensuite, si $\det G = 0$, alors il existe $k \in [\![1, p]\!]$ tel que $\lambda_k = X_k^* G X_k = (MX_k)^*(MX_k) = 0$, d'où $MX_k = 0$. En notant
$$X_k = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \vdots \\ \mu_p \end{pmatrix} \neq 0,$$
nous avons $MX_k = 0 \iff \sum_{i=1}^{p} \mu_i x_i = 0$, et donc la famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est liée puisque $X_k \neq 0$. Enfin, si on suppose inversement que la famille $(x_1, \ldots, x_p)$ est liée, alors il existe $X \in \mathbf{C}^p \setminus \{0\}$ tel que $MX = 0$. D'où $X^*GX = 0$. En décomposant $X = \sum_{k=1}^{p} \alpha_k X_k$, on obtient
$$0 = X^*GX = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k \|\alpha_k X_k\|^2,$$
où on note $\|X\|^2 := X^*X$. Comme tous les termes de la somme sont positifs, ils sont tous nuls. Or $X \neq 0 \Rightarrow \exists k \in [\![1, p]\!] \mid \alpha_k \neq 0$, et comme $\lambda_k \|\alpha_k X_k\|^2 = 0$, on a nécessairement $\lambda_k = 0$. D'où $\det G = \lambda_1 \ldots \lambda_p = 0$.

3. On montre la propriété d'abord pour $\sigma = \tau = (i\ j)$ une transposition. Il nous faut vérifier que
$$\det G(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_j, \ldots, x_p) = \det G(x_1, \ldots, x_j, \ldots, x_i, \ldots, x_p).$$

Pour cela, on utilise le fait que le déterminant change de signe lorsqu'on échange deux lignes ou deux colonnes.

$$\det G(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_p) = \begin{vmatrix} \langle x_1,x_1\rangle & \cdots & \langle x_1,x_i\rangle & \cdots & \langle x_1,x_j\rangle & \cdots & \langle x_1,x_p\rangle \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle x_i,x_1\rangle & \cdots & \langle x_i,x_i\rangle & \cdots & \langle x_i,x_j\rangle & \cdots & \langle x_i,x_p\rangle \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle x_j,x_1\rangle & \cdots & \langle x_j,x_i\rangle & \cdots & \langle x_j,x_j\rangle & \cdots & \langle x_j,x_p\rangle \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle x_p,x_1\rangle & \cdots & \langle x_p,x_i\rangle & \cdots & \langle x_p,x_j\rangle & \cdots & \langle x_p,x_p\rangle \end{vmatrix}$$

$$(L_i \longleftrightarrow L_j) \qquad = -\begin{vmatrix} \langle x_1,x_1\rangle & \cdots & \langle x_1,x_i\rangle & \cdots & \langle x_1,x_j\rangle & \cdots & \langle x_1,x_p\rangle \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle x_j,x_1\rangle & \cdots & \langle x_j,x_i\rangle & \cdots & \langle x_j,x_j\rangle & \cdots & \langle x_j,x_p\rangle \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle x_i,x_1\rangle & \cdots & \langle x_i,x_i\rangle & \cdots & \langle x_i,x_j\rangle & \cdots & \langle x_i,x_p\rangle \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle x_p,x_1\rangle & \cdots & \langle x_p,x_i\rangle & \cdots & \langle x_p,x_j\rangle & \cdots & \langle x_p,x_p\rangle \end{vmatrix}$$

$$(C_i \longleftrightarrow C_j) \qquad = \begin{vmatrix} \langle x_1,x_1\rangle & \cdots & \langle x_1,x_j\rangle & \cdots & \langle x_1,x_i\rangle & \cdots & \langle x_1,x_p\rangle \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle x_j,x_1\rangle & \cdots & \langle x_j,x_j\rangle & \cdots & \langle x_j,x_i\rangle & \cdots & \langle x_j,x_p\rangle \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle x_i,x_1\rangle & \cdots & \langle x_i,x_j\rangle & \cdots & \langle x_i,x_i\rangle & \cdots & \langle x_i,x_p\rangle \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \langle x_p,x_1\rangle & \cdots & \langle x_p,x_j\rangle & \cdots & \langle x_p,x_i\rangle & \cdots & \langle x_p,x_p\rangle \end{vmatrix}.$$

D'où $\det G(x_1,\dots,x_i,\dots,x_j,\dots,x_p) = \det G(x_1,\dots,x_j,\dots,x_i,\dots,x_p)$. Autrement dit, pour toute transposition τ, $\det G(x_{\tau(1)},\dots,x_{\tau(p)}) = \det G(x_1,\dots,x_p)$. Si $\sigma \in \mathfrak{S}_p$ est une permutation quelconque, soit $\sigma = \tau_1 \cdots \tau_k$ une décomposition en produit de transpositions. Nous avons alors

$$\begin{aligned} \det G(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(p)}) &= \det G(x_{\tau_1\cdots\tau_k(1)},\dots,x_{\tau_1\cdots\tau_k(p)}) \\ &= \det G(x_{\tau_2\cdots\tau_k(1)},\dots,x_{\tau_2\cdots\tau_k(p)}) \\ &= \det G(x_1,\dots,x_p). \end{aligned}$$

4. D'après la linéarité du déterminant selon sa première colonne, nous avons

$$\begin{aligned} \det G(x_1',\dots,x_p) &= \begin{vmatrix} \langle x_1',x_1'\rangle & \cdots & \langle x_1',x_p\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle x_p,x_1'\rangle & \cdots & \langle x_p,x_p\rangle \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \langle x_1',x_1\rangle & \cdots & \langle x_1',x_p\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle x_p,x_1\rangle & \cdots & \langle x_p,x_p\rangle \end{vmatrix} + \sum_{i=2}^{p} \lambda_i \underbrace{\begin{vmatrix} \langle x_1',x_i\rangle & \cdots & \langle x_1',x_p\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle x_p,x_i\rangle & \cdots & \langle x_p,x_p\rangle \end{vmatrix}}_{=0}, \end{aligned}$$

les déterminants de la somme étant nuls car les colonnes 1 et i sont les mêmes.

En utilisant à présent la linéarité par rapport à la première ligne de tous ces déterminants, nous obtenons (attention à la semi-linéarité du produit scalaire hermitien par rapport à sa première entrée),

$$\det G(x_1',\dots,x_p) = \begin{vmatrix} \langle x_1,x_1\rangle & \cdots & \langle x_1,x_p\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle x_p,x_1\rangle & \cdots & \langle x_p,x_p\rangle \end{vmatrix} + \sum_{j=2}^{p} \overline{\lambda_j} \underbrace{\begin{vmatrix} \langle x_j,x_1\rangle & \cdots & \langle x_j,x_p\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle x_p,x_1\rangle & \cdots & \langle x_p,x_p\rangle \end{vmatrix}}_{=0},$$

les déterminants de la somme étant nuls car la ligne 1 est la même que la ligne j. On obtient le résultat annoncé.

5. Notons $p_F(x)$ la projection orthogonale de x sur F. On peut l'écrire $p_F(x) = \sum_{i=1}^p \lambda_i x_i$, avec $\lambda_i \in \mathbf{C}$. D'après la question précédente, nous avons

$$\det G(x, x_1, \dots, x_p) = \det G(x - p_F(x), x_1, \dots, x_p).$$

Or, $x - p_F(x) \in F^\perp$ par définition. D'où $x - p_F(x) \perp x_i$, pour tout $i \in [\![1,p]\!]$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \det G(x - p_F(x), x_1, \dots, x_p) &= \begin{vmatrix} \|x-p_F(x)\|^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \langle x_1,x_1\rangle & \cdots & \langle x_1,x_p\rangle \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \langle x_p,x_1\rangle & \cdots & \langle x_p,x_p\rangle \end{vmatrix} \\ &= \|x-p_F(x)\|^2 \begin{vmatrix} \langle x_1,x_1\rangle & \cdots & \langle x_1,x_p\rangle \\ \vdots & & \vdots \\ \langle x_p,x_1\rangle & \cdots & \langle x_p,x_p\rangle \end{vmatrix} \\ &= \|x-p_F(x)\|^2 \det G(x_1,\dots,x_p). \end{aligned}$$

Comme $\mathrm{d}(x,F)^2 = \|x - p_F(x)\|^2$, on en déduit la formule annoncée.

Exercice 5. Soient $A(a_1,a_2)$, $B(b_1,b_2)$, $C(c_1,c_2)$ trois points non-alignés dans le plan muni d'un repère orthonormé. Montrer qu'une équation du cercle passant par A,B,C est donnée par

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 & x \\ a_2 & b_2 & c_2 & y \\ a_1^2+a_2^2 & b_1^2+b_2^2 & c_1^2+c_2^2 & x^2+y^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Solution. En développant par rapport à la dernière colonne, on obtient que le déterminant est une fonction de (x,y) de la forme $f(x,y) = \alpha(x^2+y^2) + \beta x + \gamma y + \delta$, où $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ sont des nombres s'exprimant en fonction de a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2. Notamment,

$$\alpha = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_1 & b_1-a_1 & c_1-a_1 \\ a_2 & b_2-a_2 & c_2-a_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1-a_1 & c_1-a_1 \\ b_2-a_2 & c_2-a_2 \end{vmatrix} = \det(\overrightarrow{BA}, \overrightarrow{CA}) \neq 0$$

puisque A,B,C sont non-alignés. Ainsi, l'équation $\{f(x,y)=0\}$ se réécrit $x^2+y^2+\beta'x+\gamma'y+\delta'=0$, soit encore

$$\left(x + \frac{\beta'}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{\gamma'}{2}\right)^2 + \frac{4\delta' - \beta'^2 - \gamma'^2}{4} = 0.$$

Cette équation décrit :

- Ou bien l'ensemble vide, lorsque $4\delta' - \beta'^2 - \gamma'^2 < 0$;
- Ou bien le point $\left(-\frac{\beta'}{2}, -\frac{\gamma'}{2}\right)$, lorsque $4\delta' - \beta'^2 - \gamma'^2 = 0$.
- Ou bien le cercle de centre $\left(-\frac{\beta'}{2}, -\frac{\gamma'}{2}\right)$ et de rayon $\sqrt{4\delta' - \beta'^2 - \gamma'^2}$, lorsque $4\delta' - \beta'^2 - \gamma'^2 > 0$.

Or, $f(a_1,a_2) = f(b_1,b_2) = f(c_1,c_2) = 0$. Donc, le lieu $\{f=0\}$ contient les trois points distincts A,B,C. C'est donc qu'on est dans la troisième situation, comme attendu.