L3 Math 2024-25 — Algèbre multilinéaire
Université Côte d'Azur — Feuille 6

Thème : Formes quadratiques réelles. Endomorphismes des espaces hermitiens.

Exercice 1. Déterminer la signature des formes quadratiques suivantes :

1. $E = \mathbf{R}^4$, $q(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_4 + x_4x_1$.
2. $E = \mathbf{R}^n$, $q(x) = \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j$.
3. $E = \mathbf{R}^n$, $q(x) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} x_i x_j$.

Exercice 2. Réduire en base orthonormée les matrices des formes quadratiques suivantes sur $E = \mathbf{R}^2$.

1. $q_1(x) = x_1^2 + 10x_1x_2 + x_2^2$.
2. $q_2(x) = 6x_1^2 + 4x_1x_2 + 9x_2^2$.

Exercice 3. Soit $M \in M_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique, définie et positive.

1. Montrer qu'il existe une matrice triangulaire supérieure $T \in M_n(\mathbf{R})$ telle que $M = {}^tTT$.
2. En déduire que $\det M \leqslant \prod_{i=1}^n m_{ii}$, en notant $M = (m_{ij})$.

Exercice 4. L'objet de cet exercice est de montrer que si E est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension finie muni d'une forme quadratique q, alors pour tout sous-espace $F \subset E$

$$\dim F + \dim F^{\perp_q} = \dim E + \dim(F \cap \operatorname{Ker}(q)).$$

On note $\varphi_q : E \to E^*$ le morphisme associé à q.

1. Rappeler le lien entre $\operatorname{Ker}(q)$ et φ_q.
2. Montrer que $F^{\perp_q} = (\varphi_q(F))^{\mathrm{o}}$, où on note $G^{\mathrm{o}} \subset E$ l'orthogonal dual d'un sous-espace $G \subset E^*$.

On note $u : F \to E^*$ l'application linéaire définie $u = \varphi_q|_F$.

3. Déterminer $\operatorname{Ker}(u)$.
4. Conclure.

Exercice 5. Soient

$$A = \begin{pmatrix} 4 & i & -i \\ -i & 4 & 1 \\ i & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 1 & -i & 0 \\ i & 2 & i \\ 0 & -i & 1 \end{pmatrix}$$

1. Montrer que les valeurs propres de A et de B sont réelles.
2. Justifier que A et B sont diagonalisables, puis les diagonaliser dans des bases orthonormées de $\mathbf{C}^3$, muni du produit scalaire hermitien standard $\langle x, y \rangle = \overline{x_1}y_1 + \overline{x_2}y_2 + \overline{x_3}y_3$.

Exercice 6. 1. Montrer que pour toute $M \in M_n(\mathbf{C})$, on a

$$M \text{ hermitienne} \iff iM \text{ anti-hermitienne.}$$

2. Montrer que pour toute $M \in M_n(\mathbf{C})$, il existe un unique couple (M_1, M_2) de matrices hermitiennes telles que $M = M_1 + iM_2$.
3. Montrer que M est :

(a) hermitienne si et seulement si $M_2 = 0$;
(b) anti-hermitienne si et seulement si $M_1 = 0$;
(c) normale si et seulement si $M_1 M_2 = M_2 M_1$.

Exercice 7. Soit $E = \mathbf{C}_n[X]$, et définissons

$$\forall P, Q \in E,\ \langle P, Q \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \overline{P(e^{i\theta})} Q(e^{i\theta}) \mathrm{d}\theta.$$

1. Montrer que $\langle .\,, . \rangle$ est un produit scalaire hermitien sur E.
2. Montrer que la famille $(1, X, \ldots, X^n)$ est une base orthonormée.
3. Soient $b_0, \ldots, b_{n-1} \in \mathbf{C}$ et $Q = X^n + b_{n-1}X^{n-1} + \cdots + b_0$. Montrer que

$$\sup_{|z|=1} |Q(z)| \geqslant 1$$

et qu'il y a égalité si et seulement si $b_0 = \cdots = b_{n-1} = 0$. *On pourra considérer* $\|Q\|^2$.

Exercice 8. Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{C})$. L'objet de cet exercice est de montrer qu'il existe un unique couple de matrices (U, H), avec U unitaire et H hermitienne définie positive, tel que $M = UH$. Il s'agit de la **décomposition polaire** des matrices inversibles.

On commence par montrer l'existence de U et H.

1. Vérifier que M^*M est hermitienne, définie et positive.
2. En considérant une diagonalisation de M^*M, en déduire qu'il existe H hermitienne, définie, positive telle que $M^*M = H^2$.
3. Montrer qu'en posant $U = MH^{-1}$, on a alors U unitaire et $M = UH$.

On montre à présent l'unicité.

4. Soit $N \in M_n(\mathbf{C})$ hermitienne, définie et positive. Justifier qu'il existe une unique matrice H hermitienne, définie, positive telle que $N = H^2$.
5. Supposons maintenant que $M = U_1 H_1 = U_2 H_2$. Montrer $H_1^2 = H_2^2 = M^*M$.
6. En déduire que $H_1 = H_2$, puis que $U_1 = U_2$.

Exercice 9. Soit $E = \mathbf{C}^2$ muni du produit scalaire hermitien standard.

1. Soit $x = \binom{\alpha}{\beta}$ un vecteur unitaire de E. Déterminer les vecteurs $y \in E$ tels que (x, y) est une base orthonormée de E.
2. En déduire que pour toute $M \in M_2(\mathbf{C})$,

$$M \in U(2) \text{ et } \det M = 1 \iff \exists \alpha, \beta \in \mathbf{C} \text{ tels que } |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1 \text{ et } M = \begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix}.$$

On définit

$$\mathbb{H} = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & -\overline{\beta} \\ \beta & \overline{\alpha} \end{pmatrix},\ \alpha, \beta \in \mathbf{C} \right\} \subset M_2(\mathbf{C}).$$

et on note

$$\mathbf{1} = I_2,\ \mathbf{I} = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\ \mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{K} = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Vérifier que $\mathbb{H}$ est un $\mathbf{R}$-espace vectoriel de dimension 4 dont une base est donnée par $(\mathbf{1}, \mathbf{I}, \mathbf{J}, \mathbf{K})$ et qu'on a les relations

$$\mathbf{I}^2 = \mathbf{J}^2 = \mathbf{K}^2 = -\mathbf{1},\ \mathbf{IJ} = -\mathbf{JI} = \mathbf{K},\ \mathbf{JK} = -\mathbf{KJ} = \mathbf{I},\ \mathbf{KI} = -\mathbf{IK} = \mathbf{J}$$

On appelle $\mathbb{H}$ l'algèbre des quaternions. Elle fut découverte par Hamilton (d'où la notation) en 1843, et généralise à la dimension 4 le corps des nombres complexes. C'est une $\mathbf{R}$-algèbre, associative, mais non-commutative, dans laquelle tout élément non nul a un inverse.

Pour tout $q = a\mathbf{1} + b\mathbf{I} + c\mathbf{J} + d\mathbf{K}$, on note $\overline{q} = a\mathbf{1} - b\mathbf{I} - c\mathbf{J} - d\mathbf{K}$ son conjugué.

4. Calculer $q\overline{q}$ en fonction des coordonnées a, b, c, d.

5. Retrouver ceci en considérant la comatrice de q.

6. En déduire une expression de l'inverse d'un quaternion q non-nul.