Thème : Formes quadratiques réelles

Exercice 1. Soit $q : M_n(\mathbf{R}) \to \mathbf{R}$ définie par $\forall M \in M_n(\mathbf{R})$, $q(M) = \mathrm{Tr}(M^2)$. On note $S_n(\mathbf{R}) \subset M_n(\mathbf{R})$ l'espace des matrices symétriques et $A_n(\mathbf{R}) \subset M_n(\mathbf{R})$ celui des matrices anti-symétriques.

1. Montrer que q est non-dégénérée.
2. Montrer que la restriction $q|_{S_n(\mathbf{R})}$ est définie positive, que la restriction $q|_{A_n(\mathbf{R})}$ est définie négative et que $S_n(\mathbf{R}) \perp A_n(\mathbf{R})$.
3. Rappeler pourquoi $M_n(\mathbf{R}) = S_n(\mathbf{R}) \oplus A_n(\mathbf{R})$, et en déduire la signature de q.
4. Quel est l'isomorphisme $\varphi_q : M_n(\mathbf{R}) \to M_n(\mathbf{R})^*$ associé à q ?
5. Donner quelques exemples de matrices qui sont dans le cône isotrope de q.

Exercice 2. Soit $E = M_n(\mathbf{R})$. Soit $q_0(M) = (\mathrm{Tr}(M))^2$, $q_1(M) = \mathrm{Tr}(M^2)$ et $q_2(M) = \mathrm{Tr}(M^2) - \frac{1}{n}\mathrm{Tr}(M)^2 = q_1(M) - \frac{1}{n}q_2(M)$.

1. Montrer que q_0 est une forme quadratique sur E, et déterminer son noyau.
2. Montrer que q_1 est une forme quadratique non-dégénérée sur E. Quel est l'isomorphisme $\varphi_{q_1} : E \to E^*$ associé à q_1 ?
3. Montrer que q_2 est une forme quadratique sur E, et déterminer son noyau. *On pourra s'aider de la question précédente.*

Exercice 3. Soit q une forme quadratique sur un $\mathbf{R}$-espace vectoriel E de dimension finie, telle que $\forall x \in E$, $q(x) \geqslant 0$. Montrer que $\mathcal{C}_q = \mathrm{Ker}(q)$.

On pourra considérer une fonction de la forme $f(t) = q(x + ty)$, $t \in \mathbf{R}$.

Exercice 4. Soit q une forme quadratique sur $E = \mathbf{R}^n$.

1. Justifier que q, en tant que fonction de plusieurs variables, admet des dérivées partielles selon chaque coordonnées x_i.
2. Montrer alors que sa forme polaire b est donnée par

$$b(x,y) = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q}{\partial x_i}(x) y_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial q}{\partial y_i}(y) x_i.$$

Exercice 5. Soit $E = \mathbf{R}^3$ et soit $q : E \to \mathbf{R}$ la forme quadratique définie par

$$\forall x \in E,\ q(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_1x_2 + x_2x_3.$$

1. Donner la matrice M de q dans la base canonique.
2. Diagonaliser M avec matrice de passage orthogonale.
3. En déduire trois formes linéaires $\phi_1, \phi_2, \phi_3 \in E^*$ et $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3 \in \{\pm 1\}$ tels que

$$\forall x \in E,\ q(x) = \varepsilon_1\phi_1(x)^2 + \varepsilon_2\phi_2(x)^2 + \varepsilon_3\phi_3(x)^2.$$

Exercice 6. Déterminer si les formes quadratiques suivantes sont définies positives, en discutant selon les éventuels paramètres.

1. $q(x_1, x_2) = (1-\lambda)x_1^2 + 2\mu x_1 x_2 + (1+\lambda)x_2^2$.
2. $q(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1^2 + 3x_2^2 + 3x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + x_1x_4$.
3. La forme quadratique sur $\mathbf{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est donnée par

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. Soit $b : E \times E \to \mathbf{R}$ une forme bilinéaire sur un $\mathbf{R}$-espace vectoriel. On rappelle que b est dite symétrique si $\forall x, y \in E$, $b(x,y) = b(y,x)$ et antisymétrique si $\forall x, y \in E$, $b(x,y) = -b(y,x)$.

Montrer que pour toute forme bilinéaire b, il existe une unique forme bilinéaire symétrique b_1 et une unique forme bilinéaire symétrique b_2 telles que $b = b_1 + b_2$. *On pourra raisonner par analyse-synthèse.*