Thème : Dualité linéaire, Bases duales et antéduales

Exercice 1. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Soient $F, G \subset E$ deux sous-espaces de E tels que $E = F \oplus G$.

1. Montrer que $E^* = F^\perp \oplus G^\perp$.
2. Montrer que l'application
$$f : \begin{array}{ccc} F^\perp & \longrightarrow & G^* \\ \phi & \mapsto & \phi|_G \end{array}$$
définit un isomorphisme de $F^\perp$ sur G^*.

Exercice 2. Soit $E = M_n(\mathbf{R})$. Pour tout $A \in E$, on note $\phi_A \in E^*$ la forme linéaire définie par $\forall M \in E$, $\phi_A(M) = \mathrm{Tr}(AM)$.

1. Montrer que l'application $f : A \in E \mapsto \phi_A \in E^*$ est un isomorphisme.
2. On note $\mathcal{S} \subset E$ le sous-espace des matrices symétriques et $\mathcal{A} \subset E$ celui des matrices anti-symétriques. Montrer que $f(\mathcal{A}) = \mathcal{S}^\perp$ et $f(\mathcal{S}) = \mathcal{A}^\perp$.

Exercice 3. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie. Soient $F \subset E$ un sous-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$. L'objet de l'exercice est de montre l'équivalence
$$u(F) \subset F \iff {}^t u(F^\perp) \subset F^\perp.$$

1. Montrer le sens direct.
2. Supposons maintenant $u(F^\perp) \subset F^\perp$. On se donne $\phi_1, \ldots, \phi_p \in E^*$ telles que $F = \bigcap_{i=1}^p \mathrm{Ker}(\phi_i)$.
   (a) Vérifier que pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, $F \subset \mathrm{Ker}(\phi_i) \Rightarrow u(F) \subset \mathrm{Ker}(\phi_i)$.
   (b) Conclure.

Exercice 4 (Bidualité)**.** Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie.

1. Montrer que l'application $\Phi : E \to E^{**} := (E^*)^*$ définie par
$$\forall x \in E,\ \forall \phi \in E^*,\ [\Phi(x)](\phi) = \phi(x)$$
définit un isomorphisme, appelé *isomorphisme canonique de bidualité.*
2. Soit $F \subset E^*$ un sous-espace vectoriel. Montrer que le sous-espace $G^\perp \subset E^{**}$ coïncide avec $\Phi(G^o)$.
   Ainsi, après identification de E et E^{**} via l'isomorphisme canonique Φ, il n'y a qu'une seule notion d'orthogonal dual et on peut s'autoriser à noter $F^\perp$ à la place de F^o si F est un sous-espace du dual.
3. À la lumière de ce nouveau point de vue, montrer comment la bidualité nous donne presque gratuitement l'implication:
$$(F + G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp \Rightarrow (F \cap G)^\perp = sF^\perp + G^\perp$$
4. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Rappelons que ${}^t u \in \mathcal{L}(E^*)$ et donc que ${}^t({}^t u) \in \mathcal{L}(E^{**})$. Vérifier que
$${}^t({}^t u) = \Phi \circ u \circ \Phi^{-1}.$$
   Ainsi, après l'identification de E à son bidual, nous avons ${}^t({}^t u) = u$.
5. Fort de cette interprétation, reprendre l'exercice précédent, et donner une autre preuve de l'implication retour $\boxed{\Leftarrow}$.