Thème : Dualité linéaire, Bases duales et antéduales

Exercice 1. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie égale à n. Soient $f_1, \dots, f_n \in E^*$ des formes linéaires. Montrer que s'il existe $x \in E \setminus \{0\}$ tel que $f_1(x) = \cdots = f_n(x) = 0$, alors la famille $(f_1, \dots, f_n)$ est liée.

Application : Soit $E = K_n[X]$ et pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, soit $f_i \in E^*$ définie par $\forall P \in E$, $f_i(P) = P'(i)$. Montrer que la famille $(f_0, \dots, f_n)$ est liée.

Exercice 2. Soit $E = K_n[X]$ et soient $a_0, a_1, \dots, a_n \in K$ des scalaires deux à deux distincts. Pour tout $i \in [\![0, n]\!]$, soit $\phi_i \in E^*$ définie par $\forall P \in E$, $\phi_i(P) = P(a_i)$.

1. En considérant les polynômes $\prod_{j \neq i}(X - a_j)$, montrer que $(\phi_0, \dots, \phi_n)$ est une base de E^* et donner sa base antéduale $(P_0, \dots, P_n)$.
2. Reconnaître alors l'identité $P = \sum_{k=0}^n \phi_k(P) P_k$.

Exercice 3. On considère $f_1, f_2, f_3 \in (\mathbf{R}^3)^*$ définies par $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 - x_3$, $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 - x_2 + x_3$, $f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3$.

Montrer que (f_1, f_2, f_3) est une base de $(\mathbf{R}^3)^*$ et en donner la base duale.

Exercice 4. Soit $E = K^n$. On définit $f_1, \dots, f_n \in E^*$ par $\forall i \in [\![1, n-1]\!]$, $\forall x \in E$, $f_i(x) = x_i + x_{i+1}$ et $f_n(x) = x_n + x_1$. On note $(e_1, \dots, e_n)$ la base canonique de K^n.

1. En considérant $x = e_1 - e_2 + e_3 - \cdots + (-1)^{n-1} e_n$, montrer que $(f_1, \dots, f_n)$ est liée si n est pair.
2. Montrer que $(f_1, \dots, f_n)$ est une base de E^* si n est impair, et donner sa base antéduale.

Exercice 5. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie égale à n, et soient $(e_1, \dots, e_n)$ et $(f_1, \dots, f_n)$ deux bases de E. Exprimer la matrice de passage P^* de la base (e_i^*) vers la base (f_j^*) en fonction de la matrice de passage de la base (e_i) à la base (f_j).

Exercice 6. Soit $E = \mathbf{R}_n[X]$. Montrer l'existence et l'unicité de $\phi \in E^*$ telle que $\phi(1) = 0$, $\phi(X) = 1$ et $\phi(P) = 0$ pour tout $P \in \mathbf{R}_n[X]$ tel que $P(0) = P(1) = 0$.

Exercice 7. Soit E un K-espace vectoriel.

1. Soient $\phi, \psi \in E^*$ deux formes linéaires non-nulles. Montrer que $\operatorname{Ker} \phi = \operatorname{Ker} \psi$ si et seulement si $\exists \lambda \in K^* \mid \psi = \lambda \phi$.
2. Soient $\phi_1, \phi_2, \phi_3 \in E^*$ non-nulles et soient $H_i = \operatorname{Ker} \phi_i$ pour $i \in \{1, 2, 3\}$. Montrer que $H_1 \cap H_2 \subset H_3$ si et seulement si $\phi_3 \in \operatorname{Vect}(\phi_1, \phi_2)$.
3. *Application* : On considère dans $\mathbf{R}^3$ le plans P_1 d'équation $\{x+y+z=0\}$ et le plan P_2 d'équation $\{2x + 3y = 0\}$. Montrer que $D = P_1 \cap P_2$ est une droite vectorielle et déterminer l'équation du plan P qui contient D et le vecteur $(1, 1, 1)$.

Exercice 8. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie et soient $f_1, \dots, f_p \in E^*$ linéairement indépendantes.

1. Montrer que pour tout $f \in E^*$, on a
$$\bigcap_{i=1}^p \operatorname{Ker} f_i \subset \operatorname{Ker} f \iff f \in \operatorname{Vect}(f_1, \dots, f_p).$$
2. Montrer que le résultat reste vrai si $(f_1, \dots, f_p)$ n'est pas libre.

Exercice 9. Soient $E = K_n[X]$, $a \in K$ et soit $\phi \in E^*$ telle que pour tout $P \in K_{n-1}[X]$, $\phi((X-a)P) = 0$. Montrer qu'il existe $\lambda \in K$ tel que quel que soit $P \in E$, $\phi(P) = \lambda P(a)$.

Soit $\psi \in E^*$ telle que $\psi((X-a)^2 P) = 0$ pour tout $P \in K_{n-2}[X]$. Montrer qu'il existe $\lambda_0, \mu \in K$ tels que pour tout $P \in E$, $\psi(P) = \lambda P(a) + \mu P'(a)$

Exercice 10. Soient K un corps et $n \geqslant 2$. Montrer que pour toute forme linéaire $\phi \in M_n(K)^*$, il existe $A \in M_n(K)$ telle que $\forall M \in M_n(K)$, $\phi(M) = \operatorname{Tr}(AM)$.