

Thèmes : Endomorphismes d'un espace euclidien.

Endomorphismes d'un espace euclidien

Exercice 1. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. Soient $x, y \in E$ tels que $\|x\| = \|y\|$. Montrer qu'il existe une unique réflexion s telle que $s(x) = y$.

Représenter graphiquement la situation en dimension 2 et 3.

Exercice 2. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension $n \geq 2$. Soient $x, y \in E$ des vecteurs tels que $x \neq y$ et $\langle x, y \rangle = \|x\|^2$.

Montrer qu'il existe un hyperplan $H \subset E$ tel que $p_H(y) = x$.

Représenter graphiquement la situation en dimension 2 et 3.

Exercice 3. Soit $f \in O(E)$. On suppose que f est diagonalisable. Montrer que f est une symétrie orthogonale de E .

Exercice 4. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension 3 et soit (e_1, e_2, e_3) une base orthonormée. Soit H le plan d'équation $x_1 = x_3$ dans les coordonnées relatives à cette base.

Déterminer la matrice dans la base (e_i) de la projection orthogonale p_H sur H .

Exercice 5. On considère $E = \mathbf{R}^4$ muni de sa structure euclidienne standard. Soit F le sous-espace défini par

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x + y + z + t = 0 \text{ et } x - y + z - t = 0\}.$$

1. Déterminer une base orthonormée de F^\perp .
2. Donner la matrice dans la base canonique de la projection orthogonale p_F sur F .
3. Donner la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale s_F par rapport à F .

Exercice 6. Diagonaliser chacune des matrices suivantes dans une base orthonormée. On précisera bien la matrice de passage.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & 1 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \\ -3 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 7. Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbf{R})$ la matrice telle que pour tous $i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $a_{ij} = 1$. Justifier que A est diagonalisable et donner $D \in M_n(\mathbf{R})$ diagonale et $P \in O(n)$ telles que $A = {}^tPDP$

Exercice 8. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension 3. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme tel qu'il existe une base orthonormée (e_1, e_2, e_3) telle que

$$\text{Mat}_{(e_i)}(u) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $P \subset E$ le plan d'équation $x_1 + x_3 = 0$ dans la base (e_1, e_2, e_3) .

1. Donner une base orthonormée $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ de E telle que $\varepsilon_2, \varepsilon_3 \in P$.
2. Écrire la matrice de u dans base $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ et reconnaître ses caractéristiques.

Exercice 9. Soient $a, b \in \mathbf{R}$ et soit

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}.$$

1. Pour quelles valeurs de a et b a-t-on $A \in O(3)$?
2. Préciser alors la nature et les éléments caractéristiques de A .

Exercice 10. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que

$$\forall x \in E, \|u(x)\| \leq \|x\|.$$

1. Montrer que $\forall x \in E, \|u^*(x)\| \leq \|x\|$. On pourra considérer $\|u^*(x)\|^2$ et utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz.
2. Montrer que si $u(x) = x$, alors $u^*(x) = x$. On pourra considérer $\langle u^*(x), x \rangle$.
3. Montrer que $E = \text{Ker}(u - \text{id}) \oplus \text{Im}(u - \text{id})$.

Exercice 11. Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, $u \in O(E)$ un endomorphisme orthogonal et $V \subset E$ un sous-espace vectoriel. Montrer que

$$f(V) \subset V \iff f(V^\perp) \subset V^\perp.$$

Exercice 12. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et $f \in O(E)$ tel que $f^2 = -\text{id}$. Montrer que $\forall x \in E, \langle f(x), x \rangle = 0$.

Exercice 13. Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$. Montrer que $\text{Rg}({}^tAA) = \text{Rg}(A)$.

Exercice 14. Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$. Montrer que tAA est symétrique et que toutes ses valeurs propres sont positives ou nulles. À quelle condition sont-elles toutes strictement positives ?

Exercice 15. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien et soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\text{Tr } u = 0$.

1. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\langle u(x), x \rangle = 0$.
2. Montrer qu'il existe une base orthonormée (e_1, \dots, e_n) de E telle que $\text{Mat}_{(e_i)}(u)$ est à diagonale nulle.