Thèmes : Rappels d'algèbre linéaire. Produit scalaire, Espaces euclidiens.

Rappels d'algèbre linéaire

Dans cette section, K désigne un corps quelconque.

Exercice 1. Soit E un K-espace vectoriel et $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de vecteurs de E. On dit que (e_i) est **libre maximale** si elle est libre et si pour tout $x \in E$, la famille $(e_1, \dots, e_n, x)$ n'est pas libre. On dit que (e_i) est **génératrice minimale** si pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, la famille $(e_1, \dots, e_{k-1}, e_{k+1}, \dots, e_n)$ n'est pas génératrice.

Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

1. $(e_1, \dots, e_n)$ est libre maximale.
2. $(e_1, \dots, e_n)$ est génératrice minimale.
3. $(e_1, \dots, e_n)$ est une base.

Exercice 2 (Polynômes de Bernstein)**.** Soit $E = K_n[X]$ pour $n \geqslant 1$. On note $P_k(X) = X^k(1-X)^{n-k}$. Démontrer que $(P_0, \dots, P_n)$ forme une base de E.

Exercice 3. Soit E un K-espace vectoriel et $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. On suppose que pour toute droite vectoriel D, $u(D) \subset D$. Montrer que u est une homothétie.

Exercice 4. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie.

1. Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes. Montrer que si $u \circ v = v \circ u$, alors pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(v)$, $u(E_\lambda(v)) \subset E_\lambda(v)$, où $\mathrm{Sp}(v)$ désigne le spectre de v et $E_\lambda(v)$ l'espace propre de v.
2. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall v \in \mathcal{L}(E)$, $u \circ v = v \circ u$. Montrer qu'il existe $\lambda \in K$ tel que $u = \lambda\, \mathrm{id}_E$.

Exercice 5. Soit E un K-espace vectoriel de dimension finie égale à n. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme tel que $u^n = 0$ et $u^{n-1} \neq 0$.

1. Soit $x \in E$ tel que $u^{n-1}(x) \neq 0$. Montrer que la famille $(x, u(x), \dots, u^{n-1}(x))$ est une base de E.
2. Soit $v \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $v \circ u = u \circ v$ si et seulement si $v \in \mathrm{Vect}(\mathrm{id}_E, u, \dots, u^{n-1})$.

   Pour le sens direct, on pourra commencer par décomposer $v(x)$ dans la base de la question 1, puis vérifier une identité $v = \sum \lambda_k u^k$ sur les éléments de cette même base pour conclure.

Exercice 6. Soit $E \subset \mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions continues f telles que les restrictions $f|_{[-1,0]}$ et $f|_{[0,1]}$ sont affines.

Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{C}^0([-1, 1], \mathbf{R})$, et déterminer sa dimension.

Produits scalaires, espaces pré-hilbertiens réels, espaces euclidiens

Désormais, tous les espaces vectoriels ont $\mathbf{R}$ *pour corps de base. Étant donné* $(E, \langle . , . \rangle)$ *un espace pré-hilbertien, on notera toujours* $\|.\|$ *la norme qui dérive du produit scalaire.*

Exercice 7. Soit E un espace pré-hilbertien, soient $A, B \subset E$ deux parties de E. Soient $F, G \subset E$ deux sous-espaces vectoriels. Démontrer les propriétés suivantes.

1. $A \subset B \Rightarrow B^{\perp} \subset A^{\perp}$.
2. $(A \cup B)^{\perp} = A^{\perp} \cap B^{\perp}$.
3. $A^{\perp} = (\mathrm{Vect}(A))^{\perp}$.
4. Si E est de dimension finie, montrer que $(A^{\perp})^{\perp} = \mathrm{Vect}(A)$.
5. $(F + G)^{\perp} = F^{\perp} \cap G^{\perp}$.
6. $F^{\perp} + G^{\perp} \subset (F \cap G)^{\perp}$.

Exercice 8. Soit $E = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbf{R})$, et soit $(a_n) \in [0,1]^{\mathbf{N}}$. On définit, pour tous $f, g \in E$,

$$\langle f, g \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} f(a_k) g(a_k).$$

Donner une condition nécessaire et suffisante sur (a_n) pour que $\langle . , . \rangle$ définisse un produit scalaire.

Exercice 9. Soit E un espace pré-hilbertien et soit $B = \{x \in E \mid \|x\| \leqslant 1\}$. Démontrer que pour tous $x, y \in B$, $x \neq y$, on a

$$\forall t \in]0,1[, \ \|tx + (1-t)y\| < 1.$$

Ceci signifie que la boule unité de E est *strictement convexe*.

Exercice 10. Soit $P = \{f \in \mathcal{C}^0([a,b], \mathbf{R}) \mid f > 0\}$ et soit Φ l'application définie par

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & P & \longrightarrow & \mathbf{R}_+^* \\ & f & \mapsto & \left(\int_a^b f(t)\mathrm{d}t\right)\left(\int_a^b \frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t\right). \end{array}$$

Montrer que $m = \min\{\Phi(f), \ f \in P\}$ existe et donner sa valeur. Déterminer $\{f \in P \mid \Phi(f) = m\}$.

Exercice 11. Soit E un espace pré-hilbertien. Soient $a \in E$, et $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{R}$ avec $\alpha \neq 0$. Déterminer

$$\{x \in E \mid \alpha\langle x, x \rangle + \beta\langle x, a \rangle + \gamma = 0\}.$$

On pourra s'inspirer de la résolution des équations de degré 2 *sur* $\mathbf{R}$.

Exercice 12. Soit $E = \mathbf{R}_n[X]$ et soient $a_0, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ des réels deux à deux distincts. On définit, pour tous $P, Q \in E$,

$$\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k) Q(a_k).$$

1. Vérifier que $\langle . , . \rangle$ définit un produit scalaire sur E.
2. Donner une base orthonormée de E.
3. Soit $H = \{P \in E \mid \sum_{k=0}^{n} P(a_k) = 0\}$.
   (a) Donner un vecteur $x_0 \in H^{\perp}$ tel que $\|x_0\| = 1$.
   (b) Soit $x \in E$. Vérifier que pour tout $y \in H$, $\|x - y\| \geqslant |\langle x, x_0 \rangle|$.

(c) En déduire $\mathrm{d}(x,H) = \inf(\{\|x-y\|,\ y \in H\}$.

Exercice 13. Soit E un espace pré-hilbertien et soient $x_1, \dots, x_n \in E$. Montrer que la fonction $f : E \to \mathbf{R}_+$ définie par

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \|x - x_k\|^2$$

atteint un minimum en $x_0 = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k$.

Espaces euclidiens

Exercice 14. Soit $E = \mathbf{R}^n$ muni produit scalaire euclidien $\langle X, Y \rangle = {}^tXY$ (on interprète les vecteurs de E comme des vecteurs colonnes).

1. Soit $(X_1, \dots, X_n)$ une base de E. Soit $A \in M_n(\mathbf{R})$ la matrice dont les colonnes sont $X_1, \dots, X_n$. Montrer que $(X_1, \dots, X_n)$ est une base orthonormée de E si et seulement si ${}^tAA = I_n$.

2. Vérifier que plus généralement, si E est un espace euclidien, $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée, et $(f_1, \dots, f_n)$ une famille de vecteurs de E, $P = \mathrm{Mat}_{(e_i)}(f_1, \dots, f_n)$, alors

$$(f_1, \dots, f_n) \text{ est une base orthonormée} \iff {}^tPP = I_n.$$

3. En déduire que toute base orthonormée de $E = (\mathbf{R}^n, \langle .\,,. \rangle)$ a pour déterminant 1 ou -1, par rapport à la base canonique.

4. Écrire explicitement les bases orthonormées dans le cas $n = 2$.

Exercice 15. Soit $E = \mathbf{R}_2[X]$ muni du produit scalaire euclidien $\langle .\,,. \rangle$ défini par

$$\forall P, Q \in E,\ \langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\mathrm{d}t.$$

1. Donner une base orthonormée de E en appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt à la base canonique.

2. Déterminer l'orthogonal de $H = \{P \in E \mid P(0) = 0\}$. *On pourra utiliser les coordonnées dans la base orthonormée précédente.*

Exercice 16. On munit $\mathbf{R}^n$ du produit scalaire usuel. Soit $H = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0\}$, où $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$. Soit $p \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n)$ la projection orthogonale sur H. Donner la matrice de p dans la base canonique.

Exercice 17. On munit $E = \mathbf{R}_n[X]$ du produit scalaire dont $(1, X, \dots, X^n)$ est une base orthonormée. Soit $H = \{P \in E \mid P(1) = 0\}$.

1. Donner une base orthonormée de H.

2. Calculer $\mathrm{d}(X, H) = \inf\{\|X - P\|,\ P \in H\}$.

Exercice 18. Soit E un espace euclidien de dimension n et soit $x_1, \dots, x_p$ des vecteurs de E. On définit leur *matrice de Gram* $G = G(x_1, \dots, x_p) \in M_p(\mathbf{R})$ par la donnée de ses coefficients

$$\forall i, j \in [\![1, p]\!],\ g_{ij} = \langle x_i, x_j \rangle.$$

On se donne une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ de E.

1. Soit $M = \mathrm{Mat}_{(e_i)}(x_1, \dots, x_p)$. Montrer que $G(x_1, \dots, x_p) = {}^t M M$.

2. Montrer que $\mathrm{Rg}(G(x_1, \dots, x_p)) = \mathrm{Rg}(x_1, \dots, x_p)$.

3. En déduire que $\det(G(x_1, \dots, x_p)) \geqslant 0$, et que $\det(G(x_1, \dots, x_p)) > 0$ si et seulement si la famille $(x_1, \dots, x_p)$ est libre.

4. Montrer que $\det(G(x_1, \dots, x_p)) = \det(G(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(p)}))$ pour toute permutation $\sigma : [\![1, p]\!] \to [\![1, p]\!]$.

5. Montrer que $\det(G(x_1, \dots, x_p)) = \det(G(x_1', x_2, \dots, x_p))$, où $x_1' = x_1 + \sum_{i=2}^{p} \lambda_i x_i$, pour tous $\lambda_2, \dots, \lambda_p \in \mathbf{R}$.

6. On suppose que $x_1, \dots, x_p$ sont linéairement indépendants. Soit $F = \mathrm{Vect}(x_1, \dots, x_p)$ et soit $x \in E$. On note $\mathrm{d}(x, F) = \inf\{\|x - y\|,\ y \in F\}$. Montrer que
$$\mathrm{d}(x, F)^2 = \frac{\det(G(x, x_1, \dots, x_p))}{\det(G(x_1, \dots, x_p))}.$$

Exercice 19. Soit E un espace euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$ et $\lambda > 0$. On dit que u est une similitude de rapport λ si pour tout $x \in E$, $\|u(x)\| = \lambda \|x\|$.

1. Soient $x, y \in E$ tels que $x + y \perp x - y$. Montrer que $\|x\| = \|y\|$.

2. Montrer que u est une similitude de rapport λ si et seulement si $\forall x, y \in E$, $\langle u(x), u(y) \rangle = \lambda^2 \langle x, y \rangle$.

3. On va à présent démontrer que u est une similitude si et seulement si $u \neq 0$ et $\forall x, y \in E$, $(x \perp y \Rightarrow u(x) \perp u(y))$.

   (a) Prouver le sens direct.

   (b) Inversement, supposons $u \neq 0$ et que u préserve l'orthogonalité. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormale de E. Montrer que pour tous $i, j \in [\![1, n]\!]$, $\|u(e_i)\| = \|u(e_j)\|$.

   (c) Conclure.