*Thème : Dualité linéaire, Bases duales et antéduales*

---

**Exercice 1.** Soit $E = \mathbf{R}_n[X]$ et soit $\Delta \in \mathcal{L}(E)$ l'endomorphisme défini par $\forall P \in E$,

$$\Delta(P)(X) = P(X) - P(X-1).$$

On introduit la famille de polynômes $(P_0, \dots, P_n)$ définie par

$$P_0 = 1 \text{ et } \forall k \in [\![0, n-1]\!],\ P_{k+1}(X) = \frac{1}{(k+1)!}\prod_{i=0}^{k}(X+i) = \frac{X(X+1)\cdots(X+k)}{(k+1)!}.$$

On note enfin $\phi_0 \in E^*$ la forme linéaire $\phi_0(P) = P(0)$ et pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\phi_k(P) = ({}^t\Delta)^k(\phi_0)$.

1. Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $\Delta(P_k) = P_{k-1}$.
2. En déduire que $(P_0, \dots, P_n)$ est une base de $E$, dont $(\phi_0, \dots, \phi_n)$ est la base duale.
3. Si $P \in \mathbf{R}_n[X]$, exprimer les coordonnées dans la base $(P_0, \dots, P_{n+1})$ d'un polynôme $Q \in \mathbf{R}_{n+1}[X]$ tel que $\Delta(Q) = P$.
4. Justifier que deux polynômes $Q_1, Q_2 \in \mathbf{R}_n[X]$ tels que $\Delta(Q_1) = \Delta(Q_2)$ diffèrent d'une constante.

*Application :*

5. Justifier que si $\Delta(Q) = P$, alors $P(1) + \cdots P(n) = Q(n) - Q(0)$.
6. On suppose $n \geqslant 3$. Exprimer les coordonnées des polynômes $X$, $X^2$ et $X^3$ dans la base $(P_0, \dots, P_n)$.
7. En déduire des expressions simples en fonction de $n$ des sommes suivantes
   (a) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = 1 + 2 + \cdots + n$
   (b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^2 = 1 + 2^2 + \cdots + n^2$
   (c) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k^3 = 1 + 2^3 + \cdots + n^3$