

Thèmes : Rappels d'algèbre linéaire. Produit scalaire, Espaces euclidiens.

Exercice 1. Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien. On définit

$$i : E \setminus \{0\} \longrightarrow E \setminus \{0\}$$
$$x \longmapsto \frac{x}{\|x\|^2},$$

qu'on appelle *inversion* de centre 0 et de rapport 1.

1. Montrer que i est une bijection de $E \setminus \{0\}$ sur lui-même, vérifiant $i \circ i = \text{id}$.

2. Montrer

$$\forall x, y \in E \setminus \{0\}, \frac{\langle i(x), i(y) \rangle}{\|i(x)\| \|i(y)\|} = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}.$$

On dit que i est une application *conforme*.¹

3. Démontrer que

$$\forall x, y \in E \setminus \{0\}, \|i(x) - i(y)\| = \frac{\|x - y\|}{\|x\| \|y\|}.$$

4. En déduire que pour tous $x, y, z \in E \setminus \{0\}$, on a

$$\|x\| \|y - z\| \leq \|y\| \|x - z\| + \|z\| \|x - y\|.$$

5. En déduire que pour tous $a, b, c, d \in E$, on a

$$\|a - c\| \|b - d\| \leq \|a - b\| \|c - d\| + \|a - d\| \|b - c\|.$$

C'est l'*inégalité de Ptolémée*.

Soit $u \in E$ tel que $\|u\| = 1$ et soit $\alpha \neq 0$. Considérons $H = \{x \in E \mid \langle x, u \rangle = \alpha\}$. C'est un hyperplan affine de E .

6. Justifier que $0 \notin H$. En utilisant la question 3., montrer alors que $i(H) = S \setminus \{0\}$, où

$$S = \left\{ x \in E \mid \left\| x - \frac{1}{2\alpha} u \right\| = \frac{1}{2|\alpha|} \right\}.$$

Soient $a \in E$ et $R > 0$. On note $S(a, R) = \{x \in E \mid \|x - a\| = R\}$ la sphère de centre a et de rayon R .

7. On suppose que $\|a\| \neq R$. Montrer que $0 \notin S(a, R)$ et que

$$i(S(a, R)) = S\left(\frac{a}{\|a\|^2 - R^2}, \frac{R}{\|a\|^2 - R^2}\right).$$

¹Cela signifie qu'elle préserve les angles.