UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS **2010/2011**
Faculté des Sciences M1 de Mathématiques
Département de Mathématiques Systèmes dynamiques.
Feuille d'exercices n^{o}6

1. Considérons l'oscilateur harmonique $x'' = -\omega^2 x - \varepsilon x'$.

a) Supposons $\varepsilon = 0$. Montrer que l'énergie totale est une fonction de Liapunov pour l'équilibre $x = x' = 0$, et que cet équilibre est stable.

b) Supposons $\varepsilon > 0$. Trouver une fonction de Liapunov pour l'équilibre $x = x' = 0$, et montrer que cet équilibre est asymptotiquement stable.

2. Soit $V : W \to \mathbb{R}$ une fonction strictement de Liapunov pour un équilibre $x_0 \in U$ d'un système $x' = f(x)$. Supposons que $V(x_0) = 0$ et que pour $c > 0$, $V^{-1}([0, c])$ est compact. Montrer que toute solution $x(t)$ telle que $V(x(0)) \leq c$ satisfait $x(t) \to x_0$ si $t \to +\infty$.

3. Trouver une fonction de Liapunov pour l'équilibre $x = y = 0$ du système

$$\begin{cases} x' = -2x - y^2 \\ y' = -y - x^2. \end{cases}$$

Trouver $\delta > 0$ tel que toute solution $(x(t), y(t))$ telle que $\|(x(0), y(0))\| \leq \delta$ satisfait $(x(t), y(t)) \to (0, 0)$ si $t \to +\infty$.

4. Soit $V : W \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 définie dans un voisinage ouvert d'un équilibre $x_0 \in U$ d'un système $x' = f(x)$. Supposons que $V(x_0) = 0$ et que pour tout $x \in W \setminus \{x_0\}$

$$< \mathbf{grad}\, V(x), f(x) > 0.$$

Montrer que s'il existe une suite $x_n \to x_0$ telle que $V(x_n) > 0$ alors l'équilibre x_0 n'est pas stable.

5. Soit $V : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^∞ et soit $\mathbf{grad}\, V(x)$ le champ gradient. Soit $x(t)$ une solution de l'équation $x' = -\mathbf{grad}\, V(x)$. Supposons que $\lim_{t\to\infty} x(t) = x_0$. Montrer que x_0 est un équilibre de l'équation.

6. Etudier la stabilité des équilibres du système $x' = -\mathbf{grad}\, V(x)$ pour

$$V(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2, \quad V(x_1, x_2) = x_1 \sin x_2, \quad V(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 - x_3^2.$$