UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS **2010/2011**
Faculté des Sciences M1 de Mathématiques
Département de Mathématiques Systèmes dynamiques.
Feuille d'exercices n^{o}5

Exercice 1.

a) Montrer que si les nombres complexes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ sont 2-à-2 distincts alors les fonctions $e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}$ sont linéairement indépendantes. (Indice : il existe une équation de la forme

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_n = 0$$

$a_i \in \mathbb{C}$, dont les solutions sont exactement les combinaisons linéaires de $e^{\lambda_1 t}, \ldots, e^{\lambda_n t}$).

b) Pour quels couples $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^2$, les fonctions $\sin \alpha t$ et $\sin \beta t$ sont linéairement indépendantes ?

Exercice 2. Considérons le système dynamique de $\mathbb{R}^2$ donné en coordonnées polaires par

$$\theta' = 1, \quad r' = \begin{cases} r^2 \sin(1/r), & r > 0 \\ 0 & r = 0 \end{cases}$$

Montrer que l'origine est un équilibre stable (Indice : tout voisinage ouvert de l'origine contient une solution qui parcours un cercle).

Exercice 3.

a) Etudier la stabilité des équilibres du système

$$\begin{cases} x' = -\sin y \\ y' = \sin x + \sin y. \end{cases}$$

b) Etudier la stabilité de l'origine comme équilibre du système

$$\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = \sin x_1 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = -\sin x_1 \end{cases}$$

(Le deuxième système est conservatif).

Exercice 4. Considérons l'équation non-linéaire $x' = f(x)$, où $f : W \to \mathbb{R}^n$ est une application de classe C^1 définie dans un voisinage W de $0 \in \mathbb{R}^n$. Supposons que $f(0) = 0$. Montrer que

a) S'il existe une valeur propre λ de $A = Df(0)$ telle que $Re\lambda > 0$ alors il existe une solution $x(t)$, $x(0) \neq 0$, telle que $\lim_{t \to -\infty} x(t) = 0$.

b) * S'il existe une valeur propre λ de $A = Df(0)$ telle que $Re\lambda < 0$ alors il existe une solution $x(t)$, $x(0) \neq 0$, telle que $\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$.

Exercice 5. Etudier la stabilité de l'origine comme équilibre du système

$$\begin{cases} x' = (\epsilon x + 2y)(z+1) \\ y' = (-x + \epsilon y)(z+1) \\ z' = -z^3 \end{cases}$$

($\epsilon \in \mathbb{R}$ est une constante). Distinguer les cas : $\epsilon < 0$, $\epsilon = 0$, et $\epsilon > 0$. (Indice : Pour $\epsilon \leq 0$ considérer une fonction de Liapunov de la forme $ax^2 + by^2 + cz^2$)