**UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS** **2010/2011**
**Faculté des Sciences** M1 de Mathématiques
**Département de Mathématiques** Systèmes dynamiques.
**Feuille d'exercices n$^o$4**

**Exercice 1.**

a) Trouver toutes les solutions de l'équation $x^{(2)} \pm x = t^2$.

b) Trouver toutes les solutions de l'équation $x^{(2)} + x = \cos 2t$.

**Exercice 2.** Trouver toutes les solutions de l'équation de l'oscilateur harmonique forcé

$$x^{(2)} + \omega^2 x = \cos \nu t, \quad \omega > 0, \nu > 0.$$

Distinguer les cas $\omega^2 \neq \nu^2$ et $\omega^2 = \nu^2$.

**Exercice 3.** Considérons les équations suivantes :

a) $x' = \sin x, y' = \cos y$.

b) $x' = x(x^2 + y^2), y' = y(x^2 + y^2)$.

c) $x' = x + y^2, y' = 2y$.

d) $x' = y^2, y' = y$.

En chaque équilibre calculer l'équation linéarisée et dessiner son portrait de phase. Dessiner le portrait de phase de l'équation non-linéaire.

**Exercice 4.** Linéariser le système

$$\begin{cases} x' = x + y^2 \\ y' = -y \\ z' = -z + y^2 \end{cases}$$

par un changement global de coordonnées.

**Exercice 5.** Résoudre le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} x' = ax - y - x(x^2 + y^2) \\ y' = x + ay - y(x^2 + y^2) \end{cases}$$

($a \in \mathbb{R}$ est une constante). Dessiner le portrait de phase. Distinguer les cas : $a < 0$, $a = 0$, et $a > 0$.
Indice : passer aux coordonnées polaires.