UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS **2010/2011**
Faculté des Sciences M1 de Mathématiques
Département de Mathématiques Systèmes dynamiques.
Feuille d'exercices n^{o}3

Exercice 1.

a) Trouver $x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que $x^{(3)} - x^{(2)} + 4x' - 4x = 0$ et $x(0) = 1$, $x'(0) = -1$, $x''(0) = 1$.

b) Trouver toutes les solutions périodiques de l'équation $x^{(4)} + 2x^{(2)} + x = 0$.

c) Soit $x(t) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction différentiable satisfaisant $x^{(3)}+3x^{(2)}-4x = 0$, $x(0) = 0$, $x'(0) = 1$, $x''(0) = -4$. Calculer $\lim_{t\to\infty} x(t)$.

Exercice 2. Considérons l'équation

$$x^{(4)} + 4x^{(3)} + 5x^{(2)} + 4x' + 4x = 0.$$

Pour quelles conditions initiales $x(0), x'(0), x''(0)$, il existe une solution qui satisfait :

a) $x(t)$ est périodique ?

b) $\lim_{t\to\infty} x(t) = 0$?

c) $\lim_{t\to\infty} |x(t)| = \infty$?

d) $|x(t)|$ est bornée pour $t \geq 0$?

e) $|x(t)|$ est bornée ?

Exercice 3. Quel est le plus petit entier n tel que l'équation

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \cdots + a_n x = 0.$$

admet comme solutions les fonctions $\sin 2t$, $4t^2e^{2t}$, $-e^{-t}$? Quelles sont les constantes $a_1, \ldots, a_n$?

Exercice 4. Dessiner le portrait de phase (sur l'axe de y), et les courbes intégrales et le champ de directions (sur le plan t, y), pour les équations :

a) $y' = y(1 - y)$. (*l'équation logistique*) Résoudre l'équation explicitement.

b) $y' = y(1 - y) - c$, où $c > 0$ est une constante. (*quotas de prélèvement*)

Exercice 5. Résoudre les équations non-homogènes :

a) $x' - 4x - \cos t = 0$

b) $x' - 4x - t = 0$

c) $\begin{cases} x_1' = x_2 \\ x_2' = 2 - x_1 \end{cases}$

Exercice 6. Soit $T \in M_n(\mathbb{R})$ invertible et $c \in \mathbb{R}^n$. Montrer qu'il existe un changement affine des coordonnées $y = Px + b$, $P \in M_n(\mathbb{R})$, $b \in \mathbb{R}^n$ qui transforme l'équation $x' = Tx + c$ en équation $y' = Sy$, où $S \in M_n(\mathbb{R})$. Utiliser cette méthode pour résoudre (c) de l'Exo 5.