UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS **2010/2011**
Faculté des Sciences M1 de Mathématiques
Département de Mathématiques Systèmes dynamiques.

Feuille d'exercices n^{o}2

Exercice 1. Montrer qu'il n'existe pas de matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$ telle que $exp(A) = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -4 \end{pmatrix}$.

Exercice 2. Résoudre l'équation différentielle $x' = Ax$ et dessiner le portrait de phase pour

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -4 & 5 \\ -4 & 4 \end{pmatrix},$$

Exercice 3. Résoudre l'équation différentielle $x' = Ax$ et dessiner le portrait de phase en fonction de $k \in \mathbb{R}$ pour

$$A = \begin{pmatrix} 1 & k \\ -k & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} k^2 & 1 \\ 0 & k \end{pmatrix}.$$

Exercice 4. Résoudre l'équation différentielle $x' = Ax$ avec

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5. Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Préciser pour quelles constantes $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tous les solutions du système $x' = Ax$ sont périodiques.

Exercice 6. Existe-t-il une matrice $A \in M_2(\mathbb{R})$, dont toute valeur propre est à partie réelle négative, et telle qu'il existe une solution $x(t)$ du système $x' = Ax$ qui satisfait $\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = \infty$?

Exercice 7. Sous quelle condition sur $A \in M_2(\mathbb{R})$, les fonctions coordonnées de toute solution du système $x' = Ax$ sont polynomiales ?

Exercice 8. Etudier le mouvement du pendule avec frottement :

$$x'' = -x - kx', \quad k > 0.$$

Dessiner le portrait de phase de l'équation du première ordre associée. Distinguer les cas :

a) $k > 2$. Faire le calcul pour $k = 3\frac{1}{3}$.

b) $0 < k < 2$.

Donner une intérpretation physique des dessins. Examiner aussi le cas $k < 0$.