UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS **2010/2011**
Faculté des Sciences M1 de Mathématiques
Département de Mathématiques Systèmes dynamiques.

Programme :
Systèmes différentielles linéaires
Théorème de Cauchy-Lipschitz
Flot d'un champ de vecteurs
Linéarisation, stabilité
Applications

Ressources bibliographiques :
Morris W. Hirsch, Stephen Smale, Robert L. Devaney
"Differential equations, dynamical systems, and an introduction to chaos",
V. I. Arnold "Equations différentielles ordinaires",

Feuille d'exercices n^{o}1

Exercice 1. Calculer l'exponentielle des matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix} \text{ pour } a \neq 0, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice 2. Vérifier les propriétés suivantes :

a) Si $AB = BA$ alors $exp(A)exp(B) = exp(A+B)$ et $Bexp(A) = exp(A)B$.

b) $exp(-A)exp(A) = I$.

c) Si B est inversible alors $exp(BAB^{-1}) = Bexp(A)B^{-1}$.

d) Si v est un vecteur propre de A avec valeur propre λ alors $exp(A)v = e^{\lambda}v$.

Proposer $A, B \in M_2(\mathbb{R})$ telles que $exp(A)exp(B) \neq exp(A+B)$.

Exercice 3. Soit $A \in M_2(\mathbb{C})$. Designons par $\det(A)$ et $\mathrm{tr}(A)$ le déterminant et la trace de A réspectivement. Montrer que

a) le polynôme caractéristique $\det(\lambda I - A)$ de A est égale à $\lambda^2 - \mathrm{tr}(A)\lambda + \det(A)$.

b) $e^{(\mathrm{tr}A)} = \det \exp(A)$.

Exercice 4. Résoudre l'équation différentielle $x' = Ax$ et dessiner le portrait de phase pour

$$A = \begin{pmatrix} -11 & -15 \\ 5 & 9 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} -7 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Exercice 5. Résoudre le système d'équations différentielles

$$\begin{cases} x_1' = x_1 \\ x_2' = x_1 + 2x_2 \\ x_3' = x_1 - x_3 \end{cases}$$

avec la condition initialle $x(0) = (1, 0, 0)$.

Exercice 6. Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ avec les valeurs propres λ_1 et λ_2. Soit $x(t)$ tel que $x'(t) = Ax(t)$, $x(0) \neq (0, 0)$. Montrer que

a) Si $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$ alors $\lim_{t\to\infty} x(t) = (0, 0)$.

b) Si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$ alors $\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = \infty$.

c) Qu'est-ce qu'on peut dire de $\lim_{t\to\infty} \|x(t)\| = \infty$ si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 < 0$?

Exercice 7. Considérons l'équation

$$\begin{cases} x_1' = \lambda_1 x_1 \\ x_2' = \lambda_2 x_2. \end{cases} \tag{1}$$

Montrer que

a) Si $\lambda_1 = -2, \lambda_2 = 3$ alors il existe une fonction différentiable non-constante $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ qui est constante sur les trajectoires de (1).

b) Si $\lambda_1 < 0$ et $\lambda_2 < 0$, ou si $\lambda_1 > 0$ et $\lambda_2 > 0$, alors toute fonction continue $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ constante sur les trajectoires de (1) est une fonction constante (égale à $f(0, 0)$).