UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS **2010/2011**
Faculté des Sciences L3 de Mathématiques
Département de Mathématiques Algèbre et Géométrie
Partiel. Durée 1h25m.

Corrigé :

Exercice 1. Soient a_0, a_1, a_2 des scalaires et soit $A \in M_3(\mathbb{C})$ la matrice compagnon

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix}$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique χ_A de A.
2. Rappeler la définition du polynôme minimal et montrer que le polynôme minimal de A est égale à $-\chi_A$. (Vous pouvez citer un résultat du cours qui induit ce résultat).

$\chi_A(X) = -(X^3 + a_2X^2 + a_1X + a_0)$.
Le polynôme minimal est défini comme le polynôme normalisé (son coefficient de plus haut degré est égal à 1) de plus petit degré qui annule la matrice. Par un résultat du cours le polynome minimal d'une matrice compagnon est égale (à signe près) à son polynôme caractéristique. Ce résultat peut être obtenu diréctement :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 \end{pmatrix} \quad A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}$$

Alors aucune combinaison linéaire de ces trois matrice n'est nulle. Donc le polynôme minimale de A est de degré au moins 3. D'autre part par le théorème de Caley-Hamilton il divise χ_A, d'où il doit être égal au polynôme caractéristique normalisé.

Exercice 2. Considérons la matrice à coefficients réels

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

1. Calculer les espaces propres et les espaces caractéristiques de A.
2. Donner une réduction de type Dunford (ou Jordan) de la matrice A. Préciser la matrice de passage.
3. Quel est le polynôme minimal de A ?

$\chi_A(X) = -(X-2)^2(X-1)$. *Les espaces propres et les espaces caractérisitques sont* $E_1 = F_1 = Vect\{v_1\}$, $E_2 = Vect\{v_2\}$, $F_2 = \{y = 0\} = Vect\{v_2, v_3\}$, *où* $v_1 = (-2, 1, 1)$, $v_2 = (1, 0, 0)$, $v_3 = (0, 0, 1)$. *Alors la réduction de Jordan est*

$$P^{-1}AP == \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{où } P = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

La réduction de Dunford $A = D + N$ est

$$D = P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix}2&2&0\\0&1&0\\0&-1&2\end{pmatrix}, \quad N = P\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&1\\0&0&2\end{pmatrix}P^{-1} = \begin{pmatrix}0&-1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

Le polynôme minimal de A divise le polynôme caractréristique et s'annule en 1 et 2. Il ne [eut être scindé de racines simples (A n'est pas diagonalisable). Alors il est égale à $-\chi_A(X) = (X-2)^2(X-1)$.

Exercice 3. Calculer la base duale $\mathcal{B}'$ de la base $\mathcal{B} = \{(2,1),(0,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$, et ensuite la base duale de $\mathcal{B}'$.
$\mathcal{B}' = \{(1/2,0),(-1/2,1)\}$. *Par bidualité la base duale de $\mathcal{B}'$ est $\mathcal{B}$.*

Exercice 4. Soit E un espace vectoriel de dimension finie $n \geq 1$ sur $\mathbb{K}$ et soit $f \in \mathcal{L}(E)$. Supposons que le polynôme minimal de f est égal à $X^2 + 1$.

1. Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, trouver les valeurs propres de f et montrer qu'il est diagonalisable.
2. Dans le cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Est-ce que f est diagonalisable ? Quels sont les valeurs propres de f ? Quel est le polynôme caractéristique de f ?
3. Donner exemple d'un endomorphisme $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ dont le polynôme minimal est égal à $X^2 + 1$.

Les valeurs propres sont $i, -i$. Le polynôme minimal étant scindé de racines simples (sur $\mathbb{C}$), f est diagonalisable pour $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.
Le polynôme minimal n'a pas de racines réelles. Alors, pour $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, il n'y a pas de valeurs propres et f n'est pas diagonalisable.
Le polynôme caractéristique de f a pour racines (complexes) i et $-i$. S'il est à coefficients réels il est égal à une puissance de (X^2+1), plus précisement $(X^2+1)^{n/2}$ si $n = \dim E$.
Comme un endomorphisme $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ nous pouvons prendre

$$A = \begin{pmatrix}0&1&0&0\\-1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}$$