UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS **2010/2011**
Faculté des Sciences L3 de Mathématiques
Département de Mathématiques Algèbre et Géométrie
Interrogation écrite II. Durée 30 minutes.

Corrigé :

Exercice 1.

1. Rappeler la définition d'une matrice hermitienne et celle d'une matrice unitaire.
   Une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{C})$ est dite hermitienne si $A^* = {}^t\bar{A} = A$, c.à.d. pour tous $i, j = 1, \ldots, n$, $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$.
   Une matrice carrée $A \in M_n(\mathbb{C})$ est dite unitaire si $A^*A = I_n$.
2. Donner des exemples de $A \in M_2(\mathbb{C})$ tels que
   (a) A est unitaire et n'est pas hermitienne.
   $$\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \text{ si } \sin\theta \neq 0$$
   (b) A est hermitienne et n'est pas unitaire.
   $$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \cos^2\theta & \sin\theta\cos\theta \\ \sin\theta\cos\theta & \sin^2\theta \end{pmatrix}$$
   (c) A est hermitienne et unitaire et n'est pas la matrice identité.
   $$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
3. Pour un espace euclidien E on désigne par $S(E)$ l'ensemble des operateurs symétriques de E. Montrer que si $f, g \in S(E)$, alors $f \circ g \in S(E)$ si et seulement si f et g sont simultanément diagonalisables.

f et g sont sont simultanément diagonalisables ssi $f \circ g = g \circ f$. Soit A la matrice de f (dans une base orthonormée) et B la matrice de g. Alors il faut montrer que AB est symétrique si et seulement si $AB = BA$. Par l'hypothèse ${}^tA = A, {}^tB = B$, nous avons ${}^t(AB) = {}^tB{}^tA = BA$, d'où ${}^t(AB) = AB$ si et seulement si A et B commutent.

Exercice 2. Déterminer la matrice hermitienne, le rang et la signature de la forme quadratique hermitienne sur $\mathbb{C}^3$ suivante :

$$q(x, y, z) = |x|^2 - ix\overline{y} + iy\overline{x} + |y|^2 - 2iy\overline{z} + 2iz\overline{y} + |z|^2$$

La matrice associée est

$$\begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 1 & 2i \\ 0 & -2i & 1 \end{pmatrix}$$

La réduction de Gauss donne

$$q(x,y,z) = |x+iy|^2 + |z-2iy|^2 - 4|y|^2$$

Alors le rang est 3 *et la signature est* $(2,1)$.
Remarque : Clairement

$$q(x,y,z) = |x+iy|^2 + 2|y+iz|^2 - 2|y|^2 - |z|^2,$$

Mais ce n'est pas la réduction de Gauss : les formes linéaires $x+iy, y+iz, y, z$ *ne sont pas indépendantes. La signature n'est pas égale à* $(2,2)$ *est le rang ne peut pas être égalle à* 4. *Le rang est toujours majoré par la dimension,* 3 *dans ce cas.*