UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA ANTIPOLIS **2010/2011**
Faculté des Sciences L3 de Mathématiques
Département de Mathématiques Algèbre et Géométrie
Interrogation écrite. Durée 30 minutes.

Corrigé

Exercice 1.

1. Rappeler la deéfinition d'un endomorphisme diagonalisable et celle d'une matrice diagonalisable.
2. Supposons que $A \in M_n(\mathbb{R}), n \geq 1$, satisfait $A^2 = I_n$. Montrer que A est diagonalisable. (Si vous utilisez des résultats du cours donner précisement leurs énoncés).
   Quelles sont les valeurs propres de A ?

Le polynôme minimal de A divise $X^2 - 1$ qui est un polynôme scindé de racines simples. Alors le polynôme minimal de A l'est aussi. Par le résultat suivant du cours : A est diagonalisable si et seulement si le polynôme minimal de A est scindé de racines simples, on déduit que A est diagonalisable. Les valeurs propres de A, qui coincident avec les racines du polynôme minimal, sont inclus dans l'ensemble $\{-1, 1\}$.

Exercice 2. Considérons les matrices,

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix},$$

où $\theta \in \mathbb{R}$. Diagonaliser A_θ (préciser la matrice de passage).
Quelles conditions doivent satisfaire $\theta_1 \neq \theta_2$ pour que A_{θ_1} et A_{θ_2} puissent être diagonalisées simultanément ?
$Tr(A_\theta) = 0$ et $\det(A_\theta) = -1$. Alors les valeurs propres sont ± 1. A_θ étant symétrique réelle, elle peut être diagonalisée dans une base orthonormée . L'equation

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta-\alpha) \\ \sin(\theta-\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha \\ \sin\alpha \end{pmatrix}$$

admet comme solution $\alpha = \theta/2$. Alors le vecteur $(\cos\theta/2, \sin\theta/2)$ est un vecteur propre de valeur propre $\lambda = 1$. (autres reponses $(-\sin\theta, \cos\theta - 1)$, $(\cos\theta + 1, \sin\theta)$, ces vecteurs sont colinéaires). Le vecteur orthogonal $(-\sin\theta/2, \cos\theta/2)$ est un vecteur propre de valers propre $\lambda = -1$. (A_θ est la matrice de la symetrie orthogonale de la droite de vecteur directeur $(\cos\theta/2, \sin\theta/2)$.) Alors comme matrice de passage on peut prendre la matrice de rotation

$$P = \begin{pmatrix} \cos\theta/2 & -\sin\theta/2 \\ \sin\theta/2 & \cos\theta/2 \end{pmatrix},$$

$$A_{\theta_1} A_{\theta_2} = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ \sin\theta_1 & -\cos\theta_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \\ \sin\theta_2 & -\cos\theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 - \theta_2 & \sin\theta_2 - \theta_1 \\ \sin\theta_1 - \theta_2 & -\cos\theta_1 - \theta_2 \end{pmatrix}.$$

Alors les deux matrices commutent, (équivaut elles sont simultanément diagonalisables) si $\sin\theta_2 - \theta_1 = \sin\theta_1 - \theta_2$, *c.à.d* $\theta_1 \equiv \theta_2 \mod \pi$ *(ou* $\theta_1/2 \equiv \theta_2/2 \mod \pi/2$ *ce qui signifie que les axes des symétries coincident ou sont orthogonales).*

Exercice 3. Soient $u_0 \in \mathbb{R}, u_1 \in \mathbb{R}$, et $u_n, n \in \mathbb{N}$ définie par

$$u_{n+2} = 2u_{n+1} - 10u_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Donner une forme générale pour u_n en termes de u_0, u_1, et n.

Les valeurs propres de la matrice compagnon sont les racines de son polynôme caractéristique

$$X^2 - 2X + 10 = 0$$

c.à. d $x_{1,2} = 1 \pm 3i$. *Ce polynôme est scindé de racines simples (sur* $\mathbb{C}$*), donc par un théorème du cours il existe* $a, b \in \mathbb{C}$ *t.q.*

$$u_n = ax_1^n + bx_2^n.$$

Les constants a, b *satisfont le système suivant*

$$\begin{cases} u_0 = a + b \\ u_1 = ax_1 + bx_2. \end{cases}$$

Les solutions sont $a = \frac{u_1 - x_2 u_0}{x_2 - x_1}$, $b = \frac{u_2 - x_1 u_0}{x_1 - x_2}$. *Alors la formule demadée est*

$$u_n = \frac{u_1 - (1-3i)u_0}{-6i}(1+3i)^n + \frac{u_1 - (1+3i)u_0}{6i}(1-3i)^n.$$