

THÈSE de DOCTORAT
de l'UNIVERSITÉ PARIS 6

Spécialité :

Mathématiques Appliquées

présentée par Monsieur

Roland MASSON

Pour obtenir le grade de

DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS 6

Sujet de la thèse:

**MÉTHODES D'ONDELETTES EN SIMULATION NUMÉRIQUE
POUR LES PROBLÈMES ELLIPTIQUES ET DE POINT SELLE**

Soutenue le 07/01/99 devant le jury composé de

M Yves Achdou

Mme. Christine Bernardi

M. Claudio Canuto

Rapporteur

M. Albert Cohen

Directeur de thèse

M Wolfgang Dahmen

M. Pierre Gilles Lemarié-Rieusset

Rapporteur

M. Yvon Maday

Table des matières

1	Construction de bases d'ondelettes pour la simulation numérique	12
1.1	Bases d'ondelettes biorthogonales	13
1.1.1	Analyses multirésolutions	14
1.1.2	Ondelettes	17
1.1.3	Décompositions et recompositions multiéchelles	19
1.1.4	Lifting scheme	20
1.1.5	Analyse multirésolution duale	21
1.1.6	Projecteur biorthogonal	26
1.1.7	Décompositions multiéchelles et théorie de l'approximation	28
1.2	Ondelettes biorthogonales sur la droite réelle	37
1.2.1	Ondelettes splines biorthogonales	39
1.2.2	Ondelettes orthogonales	40
1.2.3	Ondelettes interpolantes	40
1.2.4	Multiondelettes	41
1.2.5	Pré-ondelettes	41
1.3	Ondelettes biorthogonales sur l'intervalle	45
1.3.1	Périodisation	47
1.3.2	AMR biorthogonales sur $[0, 1]$	48
1.3.3	Ondelettes biorthogonales sur $[0, 1]$	54
1.3.4	Prise en compte des conditions aux limites	57
1.3.5	Estimations directes et inverses	63
1.3.6	Quelques résultats numériques	64
1.4	Construction de bases d'ondelettes par décomposition de domaine	71
1.4.1	Domaines tensoriels	72
1.4.2	Décomposition de domaine	74
1.4.3	Décomposition de domaine avec raccord C^0	78
2	Problèmes elliptiques	101
2.1	Préconditionnement	104
2.1.1	Préconditionnement diagonal en base d'ondelettes	104
2.1.2	Preconditionnement presque diagonal en base d'ondelettes	111
2.1.3	Exemple 1: opérateur laplacien	115
2.1.4	Exemple 2: opérateur elliptique du second ordre à coefficients variables	124

2.1.5	Exemple 3: opérateur bilaplacien	126
2.1.6	Exemple 4: un opérateur $H^{-1/2}(\Gamma)$ elliptique, l'opérateur de bord $\psi - \omega$	129
2.2	Approximations adaptatives	132
2.2.1	Approximations non linéaires	134
2.2.2	Stratégies adaptatives	136
2.3	Conditions aux limites et construction de relèvements stables	144
2.3.1	Cadre abstrait	147
2.3.2	Exemples simples de constructions	157
2.3.3	Construction par décomposition de domaine	171
3	Problème de Stokes	181
3.1	Discrétisations en ondelettes du problème de Stokes en formulation vitesse-pression	181
3.2	Intégration/dérivation des ondelettes biorthogonales	187
3.3	Stabilisation par raffinement local de la vitesse	189
3.4	Première famille de discrétisations	195
3.5	Deuxième famille de discrétisations	204
3.6	Autres familles de discrétisations	214
3.7	Décomposition de domaine	221
3.8	Exemples numériques	222
3.9	Un algorithme adaptatif	231

Introduction

La nécessité de pouvoir traiter, en simulation numérique, des problèmes de complexité croissante dont le nombre d'inconnues N peut atteindre plusieurs millions, requiert la mise au point d'algorithmes de résolution performants, capables, idéalement de fournir une solution approchée optimale en un nombre d'opérations et pour un stockage de complexité $\mathcal{O}(N)$.

Les méthodes multiéchelles, apparues en analyse numérique à la fin des années 70 pour le préconditionnement d'opérateurs elliptiques, constituent un des outils essentiels à la mise au point de tels algorithmes. Ces méthodes reposent toutes fondamentalement sur la donnée d'une suite d'espaces d'approximation emboîtés

$$V_j \subset V_{j+1}, \quad j \in \mathbb{N}$$

et la décomposition d'une approximation fine $u_{j+1} \in V_{j+1}$ d'une fonction u en terme d'approximation grossière $u_j \in V_j$ et de détails w_j vivants dans des espaces complémentaires W_j de V_j dans V_{j+1} :

$$u_{j+1} = u_j + w_j.$$

L'itération de cette décomposition à deux échelles conduit à une décomposition multiéchelle

$$u = u_0 + \sum_{j \in \mathbb{N}} w_j$$

où les composantes w_j apparaissent comme des corrections successives à "l'échelle" j de l'approximation initiale.

La notion de bases d'ondelettes, introduite à la fin des années 80 [50], [81], a considérablement renforcé ce cadre théorique. Elle complète l'approche précédente en ce qu'elle cherche à construire explicitement des bases locales Ψ_j des espaces complémentaires W_j

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j.$$

Les fonctions de la collection Ψ_j sont les ondelettes d'échelle j , notées

$$\Psi_j = \{\psi_{j,k}, \quad k \in \nabla_j\}$$

où k représente la localisation en espace de l'ondelette $\psi_{j,k}$. La fonction u admet ainsi, au moins formellement, une décomposition espace-échelle

$$u = u_0 + \sum_{j \in \mathbb{N}} \sum_{k \in \nabla_j} d_{j,k} \psi_{j,k}$$

dont la convergence et la stabilité dans les espaces fonctionnels classiques s’analyse moyennant les techniques de la théorie de l’approximation.

Les propriétés de compression, d’analyse “télescopique” des bases d’ondelettes et leur abilité à caractériser les espaces fonctionnels classiques par des normes discrètes des coefficients de la décomposition, en ont fait depuis la fin des années 80 un outil privilégié dans des champs aussi divers que le traitement du signal et d’images, l’analyse mathématique et les statistiques.

Leur application à l’analyse numérique date du début des années 90. Elles permettent de dégager un cadre théorique unifié pour traiter les points fondamentaux suivants.

- (i) La compression de la représentation matricielle en bases d’ondelettes d’opérateurs dont le noyau intégral possède certaines propriétés de décroissance et de régularité en dehors de la diagonale.
- (ii) Le préconditionnement de systèmes linéaires issus de la discrétisation d’opérateurs elliptiques.
- (iii) Les approximations adaptatives de solutions d’EDP ou de problèmes intégraux.

Considérons le cadre modèle simple d’un opérateur linéaire \mathcal{A} supposé définir un isomorphisme d’un espace de Hilbert V dans son dual V'

$$\|\mathcal{A}u\|_{V'} \sim \|u\|_V.$$

C’est en particulier le cas de l’opérateur laplacien sur un domaine borné Ω avec conditions aux limites homogènes pour $V = H_0^1(\Omega)$ ou encore de l’opérateur de Stokes en formulation vitesse-pression avec $V = (H_0^1(\Omega))^d \times M$ où M est le sous espace de $L^2(\Omega)$ des fonctions de valeur moyenne nulle.

Etant donnée la solution u de l’équation

$$\mathcal{A}u = f \tag{1}$$

une première classe de problème, *l’approximation linéaire*, consiste à chercher une approximation u_j “asymptotiquement optimale” de u en terme de précision et de coût dans les espaces d’approximations $V_j \subset V$ fixés. La démarche usuelle calcule la solution approchée u_j comme solution de la formulation de Galerkin

$$u_j \in V_j \quad \langle \mathcal{A}u_j, v_j \rangle_{V',V} = \langle f, v_j \rangle_{V',V}, \quad \forall v_j \in V_j.$$

Etant donné une famille de bases de dimension N_j des espaces V_j , ce problème se ramène à l’inversion d’un système linéaire $A_j U_j = F_j$ (supposé inversible). Pour espérer le résoudre par une méthode itérative à une précision optimale en $\mathcal{O}(N_j)$ opérations, il faut (i) que la matrice A_j soit creuse dans la base considérée et (ii)

savoir préconditionner la matrice A_j , i.e. trouver une inverse approchée creuse C_j telle que $C_j A_j \sim I_j$.

On verra que, pour une large classe d'opérateurs \mathcal{A} , ces propriétés sont vérifiées par leur discrétisation dans la base d'ondelettes

$$\Phi_0 \cup \bigcup_{l < j} \Psi_l.$$

L'*approximation adaptative* constitue une deuxième classe de problèmes dont les objectifs diffèrent fondamentalement des précédents. On y recherche non pas la meilleure approximation de u dans l'espace V_j fixé mais une discrétisation asymptotiquement optimale de la solution u par N ondelettes quelconques dans une base d'ondelettes donnée de la solution u , idéalement en $\mathcal{O}(N)$ opérations.

Dans le cas où la fonction u est connue (précisément si l'on sait classer tous ses coefficients d'ondelettes par ordre croissant de leur module), ce problème est résolu par une simple procédure de seuillage des coefficients dont les performances sont décrites par la théorie de l'approximation non linéaire [52]. Dans le cas où la fonction u est la solution d'une équation, il faut concevoir des stratégies adaptatives visant à la fois à détecter et à calculer les coefficients significatifs de u . La mise au point de telles stratégies bénéficiera crucialement des points (i) et (ii) précédents, i.e. la possibilité de comprimer les opérateurs et de les préconditionner.

Ces mêmes problématiques sont présentes dans d'autres méthodes d'approximations antérieures aux ondelettes comme les éléments finis et les réponses apportées utilisent des outils proches dans l'esprit des outils présentés ici, qu'il s'agisse des méthodes multigrilles pour le préconditionnement, des méthodes multipôles pour la compression d'opérateurs intégraux ou encore du raffinement de maillage pour l'approximation adaptative.

Le cadre des ondelettes semble toutefois apporter un cadre théorique unifié permettant d'aborder ces questions sous un nouvel éclairage et d'ouvrir de nouvelles pistes.

Le prix à payer réside dans la nécessité de construire explicitement les bases d'ondelettes Ψ_j des espaces de détails W_j qui vont donc constituer les briques élémentaires des discrétisations en ondelettes.

Une partie essentielle du travail va donc consister à construire de telles bases locales sur un domaine assez général avec des conditions aux limites et des propriétés de stabilité adaptées au problème à résoudre.

Objectifs

Le but de cette thèse est de contribuer au développement, à l'analyse et à l'évaluation des méthodes à base d'ondelettes en simulation numérique appliquées aux

deux classes de problèmes précédents. On abordera les trois grands chapitres suivants: constructions de bases d'ondelettes, applications aux problèmes elliptiques et applications au problème de Stokes.

Chapitre I: construction

La première tâche, pour aborder des problèmes réalistes, consiste à construire explicitement des bases d'ondelettes sur des domaines ou variétés assez généraux. Celles-ci devront en outre être adaptées aux problèmes à résoudre: en terme de stabilité il faut en particulier que ces bases soient stables dans les espaces de Sobolev H^s sur l'intervalle $[0, 1]$ en vue des applications aux problèmes elliptiques d'ordre 2. En ce qui concerne les ordres négatifs, on souhaite atteindre l'ordre $s = -1/2$ pour les problèmes intégraux d'ordre -1 , comme par exemple le potentiel de simple couche. Les bases d'ondelettes doivent naturellement inclure le cas échéant des conditions aux limites homogènes sur une partie de la frontière du domaine. Enfin leurs propriétés d'approximation et de compression doivent être essentiellement préservées par la construction.

Une première approche consiste à partir d'une discrétisation de type éléments finis \mathbb{P}_1 sur des maillages obtenus par divisions dyadiques d'un premier maillage grossier. Cette discrétisation définit des espaces emboîtés $(V_j)_{j \geq 0}$ et la difficulté consiste à construire des complémentaires W_j munis de bases de Riesz Ψ_j locales tels que la décomposition multiéchelle soit stable.

La deuxième approche, que l'on adoptera ici, se situe dans le cadre de la décomposition de domaine sans recouvrement. Le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ (ou plus généralement la variété de dimension d) est découpé en sous domaines Ω_i , $i = 1, \dots, N$, disjoints et tels que

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^N \bar{\Omega}_i.$$

Chaque sous domaine est en outre supposé difféomorphe au domaine de référence $\hat{\Omega} =]0, 1[{}^d$ par la paramétrisation régulière

$$\kappa_i : \hat{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}_i.$$

L'avantage de ce type d'approche est de se ramener à la construction de bases d'ondelettes sur le domaine de référence, qui est une tâche bien plus aisée que la construction sur le domaine Ω . La construction sur les sous domaines s'en déduit simplement par le difféomorphisme régulier κ_i^{-1} et l'essentiel du travail consistera donc à raccorder ces bases aux interfaces de la décomposition $\bigcup_{i=1}^N \partial\Omega_i$.

Dans ce cadre, notre travail va concerner les points suivants.

- (1) La construction de bases d'ondelettes sur le domaine de référence se ramène par

produit tensoriel à l'intervalle $[0, 1]$ qui se traite par restriction et adaptations aux extrémités 0 et 1 d'ondelettes sur la droite réelle (cf [30],[50]), de façon à préserver les propriétés d'approximation, de stabilité et de compression.

L'aspect original de ce travail consiste à généraliser, au cadre des ondelettes biorthogonales, pour des ordres d'approximation optimaux et des conditions aux limites quelconques, les constructions initiales de [30] et [2].

- (2) En ce qui concerne la décomposition de domaine, nous suivons l'approche générale introduite dans [47] puis [19] qui définit les ondelettes sur le domaine (ou la variété) par raccord continu des ondelettes des sous domaines aux interfaces de la décomposition. On propose alors une nouvelle méthodologie pour construire explicitement les ondelettes aux interfaces qui diffère essentiellement de celle présentée dans [19].

On applique, dans les deux chapitres suivants, les méthodes d'ondelettes à deux grandes classes d'opérateurs \mathcal{A} . Tout d'abord les problèmes elliptiques qui comprennent en particulier les problèmes coercifs en normes de Sobolev H^s pour lesquels

$$\langle \mathcal{A}u, u \rangle \sim \|u\|_{H^s}^2.$$

On considère ensuite le problème de Stokes qui fait partie de la classe des problèmes de points selles et dont le caractère non défini-positif introduit de nouvelles difficultés.

Dans les deux cas on traitera à la fois de l'approximation linéaire sous l'angle du préconditionnement et de l'approximation adaptative. La compression des opérateurs en bases d'ondelettes n'est abordée qu'en Appendice sur un exemple simple et on renvoie aux travaux de référence [81], [13], [46], [89], [88], [28] dans ce domaine.

Chapitre II: problèmes elliptiques

C'est le cadre le plus naturel pour l'application des méthodes d'ondelettes dans la mesure où la caractérisation des espaces de Sobolev H^s , par les normes l^2 pondérées des coefficients d'ondelettes, se traduit par un préconditionnement diagonal optimal de la discrétisation en bases d'ondelettes des opérateurs elliptiques coercifs en norme H^s .

Notre premier objectif, en relation avec le point (i), est donc d'évaluer et d'optimiser le préconditionnement diagonal en bases d'ondelettes. On se place pour se faire dans le cadre de la décomposition de domaine pour la construction des bases et l'on va considérer (1) parmi les opérateurs différentiels elliptiques du second ordre: le laplacien et les opérateurs à coefficients variables $-\nabla \cdot A\nabla$, (2) l'opérateur bilaplacien du quatrième ordre, (3) un opérateur $H^{-1/2}$ elliptique: l'opérateur de bord $\psi - \omega$.

Il ressort de cette étude que (a) le choix des ondelettes aux extrémités de l'intervalle de référence $[0, 1]$ est crucial pour optimiser les performances du préconditionnement diagonal et (b) il importe d'utiliser l'inverse de la diagonale exacte (ou une bonne approximation de celle-ci) comme préconditionnement et non pas de se contenter des facteurs d'échelle (i.e. les poids des normes discrètes).

Afin d'améliorer la robustesse du préconditionnement en bases d'ondelettes on propose par ailleurs d'utiliser les techniques SPAI (sparse approximate inverse) qui calculent une inverse approchée sur un ensemble creux de termes non nuls. Ces méthodes sont naturellement plus performantes en bases d'ondelettes du fait des propriétés dans ces bases de compression des opérateurs *et* de leurs inverses.

Le deuxième objectif est de tester numériquement l'optimalité d'une stratégie adaptative simple sur l'exemple de l'opérateur laplacien en dimension 2 avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes.

Ces expériences illustrent le résultat récent de [28] où un algorithme adaptatif asymptotiquement optimal est rigoureusement mis au point.

On aborde finalement la problématique du traitement adaptatif des conditions aux limites de Dirichlet non homogènes pour les problèmes du second ordre.

Ce problème se ramène à la construction d'une base d'ondelettes sur le domaine Ω , stable dans $H^1(\Omega)$, et dont les traces sur le bord du domaine $\Gamma = \partial\Omega$ (ou une partie Γ_D de celui-ci), définissent une base d'ondelettes stable dans $H^{1/2}(\Gamma)$.

On introduit pour cette étude un nouveau cadre théorique qui conduit à la construction d'opérateurs de relèvement stables dans la classe des espaces de Besov.

Sa réalisation pratique est étudiée dans le cadre de la décomposition de domaine.

Chapitre III: problème de Stokes

On s'intéresse dans ce chapitre au problème de Stokes en formulation vitesse-pression. Sa formulation variationnelle conduit à un problème de type point selle symétrique mais non défini-positif qui définit un isomorphisme \mathcal{A} de $V = \vec{X} \times M$ dans V' où $\vec{X} = H_0^1(\Omega)^d$.

A la différence des problèmes elliptiques (coercifs) la conformité de la discrétisation $\vec{X}_j \times M_j \subset \vec{X} \times M$ n'assure plus nécessairement le caractère bien posé du problème discret. Il faut en outre que les discrétisations satisfassent une condition de compatibilité qui s'exprime sous la forme d'une condition Inf-Sup ou de Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi (LBB)

$$\inf_{q_j \in M_j} \sup_{\vec{v}_j \in \vec{X}_j} \frac{\langle \nabla \cdot \vec{v}_j, q_j \rangle}{\|\vec{v}_j\|_{\vec{X}} \|q_j\|_M} \geq \beta > 0$$

où la constante β est indépendante de l'échelle j .

Cette condition entraîne de surcroît l’obtention d’estimations d’erreurs optimales et la résolution efficace du problème par un algorithme itératif en particulier dans le cadre d’un préconditionnement en base d’ondelettes. En d’autres termes, elle garantit l’obtention d’algorithmes d’approximations linéaires de la solution (\vec{u}, p) asymptotiquement optimaux en termes de coût et de précision.

On s’intéresse parallèlement dans ce chapitre aux approximations adaptatives sous l’angle de la condition LBB. Précisément, étant donné une discrétisation en ondelettes de l’espace de pression, il s’agit de construire une discrétisation en ondelettes *minimale* de l’espace de vitesse, telle que la condition LBB puisse être prouvée. Idéalement, la dimension de cet espace doit être aussi proche que possible de la dimension de l’espace de discrétisation de la pression.

Dans un premier temps, on prouve qu’il est toujours possible de construire une telle discrétisation de la vitesse dont la dimension soit proportionnelle à celle de l’espace de pression, avec une constante indépendante de la pression.

En pratique cependant, la constante de proportionnalité est trop élevée de sorte que notre objectif est, en prenant comme point de départ les travaux pionniers de [75] et [43], d’étudier quelques familles de discrétisations en ondelettes permettant d’obtenir des constantes proches de d voire de 1.

On s’intéressera principalement aux domaines tensorisés $]0, 1[^d$. L’extension à des domaines plus généraux est étudiée dans le cadre de la décomposition de domaine mais reste très restrictive devant la difficulté essentielle d’étendre nos résultats à un sous domaine “courbe”. Cette approche nous permet néanmoins de disposer d’un large choix de générateurs, d’ordres en théorie arbitrairement élevés.

Les discrétisations analysées dans ce chapitre sont évaluées numériquement dans le cas d’une discrétisation uniforme sur le domaine $]0, 1[^2$.

Si la condition LBB garantit la résolution optimale du système linéaire, elle ne suffit pas en revanche à étendre l’optimalité de l’algorithme adaptatif conçu dans [28]. On propose néanmoins une stratégie adaptative simple de résolution du problème de Stokes dont l’optimalité est testée numériquement.

Notations

Espaces

$C^m(\Omega)$, m entier: espaces des fonctions m fois continuellement différentiables.

$C^s(\Omega)$ ($s > 0$ non entier): espaces de Hölder.

$L^p(\Omega)$: espaces de Lebesgue.

$W^{s,p}(\Omega)$: espaces de Sobolev ($H^s(\Omega) := W^{s,2}(\Omega)$).

$B_{p,q}^s(\Omega)$: espaces de Besov.

$\mathcal{D}(\Omega)$: espace des fonctions C^∞ à supports compacts dans l'ouvert Ω .

$\mathcal{D}(\Omega)'$: espace des distributions sur Ω .

\mathbb{P}_n : espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n .

V_j et \widetilde{V}_j : espaces à l'échelle j des analyses multirésolutions primale et duale.

W_j et \widetilde{W}_j : espaces d'ondelettes ou complémentaires ou de détails à l'échelle j .

V' : espace dual topologique de l'espace V .

$S(\Phi)$: fermeture dans L^2 des combinaisons linéaires finies de fonctions de la collection Φ .

p' : exposant conjugué de $p \in [1, \infty]$ tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Fonctions

$\phi_{j,k} := 2^{j/2}\phi(2^j \cdot - k)$ et $\tilde{\phi}_{j,k} := 2^{j/2}\tilde{\phi}(2^j \cdot - k)$, $k \in \mathbb{Z}$: fonctions d'échelle primales et duales sur \mathbb{R} , mises à l'échelle en norme L^2 .

$\psi_{j,k} := 2^{j/2}\psi(2^j \cdot - k)$ et $\tilde{\psi}_{j,k} := 2^{j/2}\tilde{\psi}(2^j \cdot - k)$, $k \in \mathbb{Z}$: ondelettes primales et duales sur \mathbb{R} , mises à l'échelle en norme L^2 .

$\varphi_{j,k}$ et $\tilde{\varphi}_{j,k}$, $k \in \Delta_j$ fonctions d'échelle primales et duales (sur un domaine ou une variété) à la résolution 2^{-j} et mises à l'échelle en norme L^2 .

$\psi_{j,k}$ et $\tilde{\psi}_{j,k}$, $k \in \nabla_j$ ondelettes primales et duales (sur un domaine ou une variété) à la résolution 2^{-j} et mises à l'échelle en norme L^2 .

ψ_λ et $\tilde{\psi}_\lambda$, $\lambda \in \nabla := \Delta_{j_0} \cup \bigcup_{j \geq j_0} \nabla_j$, notations abrégées des ondelettes.

$|\lambda|$: échelle de l'indice d'ondelette λ ($|\lambda| = j$ pour $\lambda \in \nabla_j$).

$\Phi_j := \{\varphi_{j,k}, k \in \Delta_j\}$ et $\tilde{\Phi}_j := \{\tilde{\varphi}_{j,k}, k \in \Delta_j\}$ bases de Riesz biorthogonales des espaces V_j et \widetilde{V}_j .

$\Psi_j := \{\psi_{j,k}, k \in \nabla_j\}$ et $\tilde{\Psi}_j := \{\tilde{\psi}_{j,k}, k \in \nabla_j\}$ bases de Riesz biorthogonales des espaces W_j et \widetilde{W}_j .

$\langle f, g \rangle$: produit de dualité ($\int f\bar{g}$ si $f \in L^p$ et $g \in L^{p'}$).

Les notations ∇_j et $\psi_{j,k}$, $\tilde{\psi}_{j,k}$ désignent en toute rigueur deux objets différents qui se distinguent toutefois sans ambiguïté selon le contexte.

Matrices

M^T : matrice transposée de M

$U^T\Phi$: notation abrégée pour la fonction $\sum_k U_k\varphi_k$.

$M\Phi$: notation abrégée pour la collection de fonctions $\bigcup_i \{\sum_k M_{i,k}\varphi_k\}$.

$M = \langle \Phi^1, \Phi^2 \rangle$: notation abrégée pour la matrice de termes $M_{k,l} := \langle \varphi_k^1, \varphi_l^2 \rangle$.

Opérateurs

$P_j, \tilde{P}_j, Q_j := P_{j+1} - P_j, \tilde{Q}_j := \tilde{P}_{j+1} - \tilde{P}_j$: projecteurs biorthogonaux sur $V_j, \tilde{V}_j, W_j, \tilde{W}_j$.

T^* : adjoint de l'opérateur T .

$\nabla \cdot \vec{u}$: divergence du champ de vecteur \vec{u} .

∇u : gradient du champ scalaire u .

$P_j = \langle \cdot, \tilde{\Phi}_j \rangle^T \Phi_j$: notation abrégée pour l'opérateur $P_j f = \sum_{k \in \Delta_j} \langle f, \tilde{\varphi}_{j,k} \rangle \varphi_{j,k}$.

Ensembles

$\#E$: cardinal de l'ensemble fini E .

$\text{diam}(\omega)$: diamètre du domaine $\omega \subset \mathbb{R}^d$.

$\text{Supp}(f)$: support de la fonction f .

$\Phi^1 \otimes \Phi^2$: produit tensoriel de deux collections de fonctions (ou vecteurs) Φ^1 et Φ^2 égal à $\{\varphi_k^1 \otimes \varphi_l^2, k \in \Delta_1, l \in \Delta_2\}$.

Equivalences

Pour deux fonctions positives N_1 et N_2 définies sur un ensemble V et dépendantes d'un ensemble de paramètres P , la relation

$$N_1(v) \lesssim N_2(v)$$

exprime qu'il existe une constante C , indépendante des paramètres de P , telle que $N_1(v) \leq CN_2(v)$ pour tout $v \in V$. De même,

$$N_1(v) \sim N_2(v)$$

signifie que $N_1(v) \lesssim N_2(v)$ et $N_2(v) \lesssim N_1(v)$.

Par exemple $\|P_j f\| \lesssim \|f\|$ signifie que les projecteurs P_j sont bornés indépendamment de l'échelle j .

Chapitre 1

Construction de bases d'ondelettes pour la simulation numérique

La construction de bases d'ondelettes sur un domaine ou une variété constitue en soit une difficulté majeure et un préalable essentiel aux applications réalistes en simulations numériques.

On va dans un premier temps, au §1.1, dégager les différents formalismes abstraits, mis au point depuis le début des années 90 et qui sous-tendent la construction de bases d'ondelettes et l'analyse de leurs propriétés (stabilité, régularité, approximation, compression). Cette présentation ne comporte pas de résultats nouveaux et est largement inspirée des ouvrages de référence [26] et [40] que le lecteur est invité à consulter pour plus de détails. La première partie (§1.1.1 à 1.1.4), où l'on s'intéresse à la décomposition entre deux niveaux successifs, suit de près le chapitre III de [40], alors que l'analyse de la stabilité de la décomposition multi-échelle, (§1.1.7) et le lien avec la théorie de l'approximation est plutôt une synthèse du chapitre III de [26]. On a choisi ici de ne pas faire systématiquement référence aux diverses contributions pour ne pas alourdir la présentation.

On s'intéresse ensuite aux constructions concrètes. Il existe pour l'heure essentiellement deux types d'approches.

(i) La première part d'espaces d'approximation éléments finis \mathbb{P}_1 conformes sur des triangulations emboîtées, obtenues à partir de divisions dyadiques successives d'une première triangulation grossière. Ces espaces définissent une AMR V_j sur laquelle on cherche à construire une base d'ondelettes. Une première méthode consiste à corriger un premier choix de base complémentaire Ψ_j (classiquement la base hiérarchique de l'exemple 2 du §2.1) afin de la stabiliser [32], [85]. Une deuxième méthode consiste à chercher des bases de Riesz à supports compacts Ψ_j des espaces complémentaires orthogonaux $W_j = V_{j+1} \cap V_j^\perp$ [90] (voir aussi [49] pour une généralisation de cette approche au cas biorthogonal).

(ii) La deuxième approche, objet des paragraphes 1.2 à 1.4, part d'une construc-

tion sur des géométries tensorielles désormais bien maîtrisée puis traite les domaines ou variétés plus généraux par une technique de décomposition de domaine. Cette approche permet de disposer d'un très large choix de générateurs d'ondelettes biorthogonales sur la droite réelle, d'ordres et de régularités arbitraires.

Schématiquement elle suit les étapes suivantes

$$\mathbb{R} \rightarrow [0, 1] \rightarrow [0, 1]^d \rightarrow \Omega = \bigcup_{i=1}^N \Omega_i, \Omega_i \sim [0, 1]^d$$

où le point de départ est une construction d'ondelettes orthogonales ou biorthogonales sur la droite réelle développée dans [50] et [29]. Celle-ci exploite fondamentalement l'invariance par translation. On présentera au §1.2 une typologie des ondelettes sur \mathbb{R} les plus utilisées en analyse numérique.

Le passage à l'intervalle $[0, 1]$ s'effectue par restriction et adaptations aux extrémités 0 et 1 en préservant les propriétés d'approximation et de stabilité. Il sera décrit au § 1.3. Contrairement aux deux paragraphes précédents, celui-ci contient des résultats originaux qui généralisent les constructions sur l'intervalle de [30] et [2] et constituent essentiellement une refonte de l'article [79] paru en 1996.

Un procédé simple de tensorisation permettra d'étendre la construction aux domaines tensoriels. Le passage à des domaines ou variétés plus généraux s'effectue par une technique de décomposition de domaine désormais classique dans le cadre de discrétisations spectrales [77]. Elle est adaptée dans [47] (voir aussi [19]) à la construction d'AMR et d'ondelettes biorthogonales. Ces idées sont présentées au §1.4 dont l'aspect original réside dans la construction explicite des bases d'ondelettes, suivant une approche qui diffère de celle exposée dans [19].

1.1 Bases d'ondelettes biorthogonales

Ce paragraphe introduit le cadre abstrait des ondelettes biorthogonales qui englobe les constructions particulières qui seront développées par la suite.

Soit L^2 l'espace des fonctions de carré intégrable sur une variété Ω de dimension d . Partant de la notion d'analyse multirésolution (AMR) comme suite d'espaces d'approximation emboîtés $V_j \subset V_{j+1} \subset L^2$, $j \in \mathbb{N}$, on s'intéresse à la décomposition d'une fonction v en une approximation grossière v_0 et une suite de détails w_j vivant à des échelles j de plus en plus fines i.e. dans les espaces d'ondelettes ou de détails W_j . Formellement on écrit

$$v = v_0 + \sum_{j=0}^{\infty} w_j \tag{1.1}$$

avec $v_0 \in V_0$ et $w_j \in W_j$. L'espace d'ondelettes W_j est défini par la décomposition entre deux niveaux successifs

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j. \quad (1.2)$$

La théorie de l'approximation, qui relie le comportement asymptotique de la suite d'approximations (1.1) aux propriétés de régularité de la fonction approchée, permet de dégager des critères de stabilité de la décomposition multiéchelle (en particulier de convergence) dans les espaces fonctionnels classiques. On verra en particulier que la stabilité dans L^2 au sens de l'équivalence

$$\|v\|_{L^2} \sim \|v_0\|_{L^2} + \left(\sum_{j=0}^{\infty} \|w_j\|_{L^2}^2 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (1.3)$$

est lié à l'existence d'une AMR *duale* ou *biorthogonale* $\tilde{V}_j \subset \tilde{V}_{j+1} \subset L^2$, engendrée par la base de Riesz duale de la base d'ondelettes *primales*.

1.1.1 Analyses multirésolutions

On appelle analyse multirésolution de l'espace L^2 , une suite emboîtée de sous espaces fermés dont l'union est dense dans L^2 .

$$V_j \subset V_{j+1} \subset L^2, j \in \mathbb{N}, \text{clos}_{L^2} \left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}} V_j \right) = L^2. \quad (1.4)$$

On désigne par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire dans L^2 et $\|\cdot\|$ la norme hilbertienne associée. Les espaces V_j sont munis d'une base de Riesz notée

$$\Phi_j = \{\varphi_{j,k}, k \in \Delta_j\}.$$

Rappelons que la propriété de base de Riesz énonce que l'ensemble des combinaisons linéaires finies d'éléments de Φ_j est un sous espace dense de V_j , et que l'on a l'équivalence de norme

$$v_j = \sum_{k \in \Delta_j} c_{j,k} \varphi_{j,k}, \quad \|v_j\| \sim \left(\sum_{k \in \Delta_j} |c_{j,k}|^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.5)$$

On exige en outre que les bases de Riesz considérées soient "uniformes" au sens où les constantes d'équivalence de (1.5) sont indépendantes de j . Cette propriété d'uniformité en échelle sera toujours implicite dans la suite de l'exposé. Suivant [40], on adoptera souvent la notation condensée

$$v_j = c_j^T \Phi_j, \quad \|v_j\| \sim \|c_j\|_{l^2(\Delta_j)}.$$

Dans tous les cas concrets considérés, Φ_j est une base de fonctions à supports compacts et $j \in \mathbb{N}$ représente un indice d'échelle dyadique au sens où la résolution est

divisée d'un facteur 2 dans chaque direction lorsque j augmente de 1. Dans le cas où Ω est un domaine de \mathbb{R}^d , $k \in \mathbb{Z}^d$ représentera naturellement la localisation du support de $\varphi_{j,k}$, de diamètre $\sim 2^{-j}$, autour du point $x_{j,k} = 2^{-j}k$. Ainsi $2^{-j}\Delta_j$ peut se visualiser comme un sous ensemble de la grille $2^{-j}\mathbb{Z}^d \subset \mathbb{R}^d$, de maille 2^{-j} , "couvrant" le domaine Ω . Dans le cas d'une variété (en pratique le bord d'un domaine) cette interprétation reste toujours vraie localement par cartes locales.

Selon la terminologie usuelle, les fonctions $\varphi_{j,k}$ sont les fonctions d'échelle et Φ_j la base de fonctions d'échelle à la résolution 2^{-j} . En référence aux éléments finis on parlera aussi de base nodale, ce qui est cohérent avec l'hypothèse de supports compacts centrés autour des "noeuds" $x_{j,k} = 2^{-j}k$.

Dans le cas de variétés bornées on notera

$$N_j := \#\Delta_j \sim 2^{jd}. \quad (1.6)$$

Filtres. La propriété d'emboîtement des espaces V_j équivaut à l'existence de *filtres* H^j , matrices $\Delta_j \times \Delta_{j+1}$, traduisant la relation d'échelle

$$\varphi_{j,k} = \sum_{m \in \Delta_{j+1}} H_{k,m}^j \varphi_{j+1,m}, \quad k \in \Delta_j,$$

ou encore en notation matricielle

$$\Phi_j = H^j \Phi_{j+1}. \quad (1.7)$$

En pratique, l'hypothèse de supports compacts des fonctions $\varphi_{j,k}$ implique que les filtres H^j soient *finis* au sens où il s'agit de matrices bandes comportant $\mathcal{O}(N_j)$ termes non nuls.

Exemple 1. L'exemple le plus classique est l'AMR

$$V_j = \text{Vect}\{\varphi_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}} \chi_{[0,1]}(2^j \cdot - k), k \in \Delta_j = \{0, \dots, 2^j - 1\}\} \quad (1.8)$$

où $\chi_{[0,1]}$ est la fonction caractéristique sur $[0,1]$ (i.e. la B-spline d'ordre 1). Moyennant le coefficient de normalisation $2^{\frac{j}{2}}$, la base Φ_j est une base orthogonale de V_j , donc a fortiori une base de Riesz. Les filtres H^j sont indépendants de j et de largeur 2:

$$\varphi_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_{j+1,2k} + \varphi_{j+1,2k+1}), \quad k \in \Delta_j.$$

Exemple 2. Soit $V_j \subset L^2(]0,1[)$ l'espace engendré par les éléments finis \mathbb{P}_1 sur la grille dyadique uniforme $\mathcal{G}_j := \{2^{-j}k, k = 0, \dots, 2^j\}$.

$$V_j = \text{Vect}\{\varphi_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}} \phi^2(2^j \cdot - k)|_{[0,1]}, k \in \Delta_j = \{0, \dots, 2^j\}\}, \quad (1.9)$$

où $\phi^2 : = \max(1 - |x|, 0)$ est la B-spline d'ordre 2. Les propriétés de base de Riesz et de densité sont bien connues en éléments finis et on a la relation d'échelle

$$\begin{cases} \varphi_{j,0} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(2\varphi_{j+1,0} + \varphi_{j+1,1}), \\ \varphi_{j,k} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\varphi_{j+1,2k-1} + 2\varphi_{j+1,2k} + \varphi_{j+1,2k+1}), \quad k \in \Delta_j/\{0, 2^j\}, \\ \varphi_{j,2^j} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\varphi_{j+1,2^{j+1}-1} + 2\varphi_{j+1,2^{j+1}}). \end{cases} \quad (1.10)$$

Etant donné le couple $(V_j, \Phi_j)_{j \in \mathbb{N}}$, il existe trois approches conduisant à définir une décomposition multiéchelle. La première consiste à se donner directement les espaces de détails W_j munis de bases de Riesz Ψ_j . En d'autres termes on définit des filtres G_j tels que

$$\Psi_j = G_j \Phi_{j+1}$$

définisse une base de Riesz complétant Φ_j dans V_{j+1} . C'est le point de vue matriciel présenté au §1.1.2.

La deuxième approche consiste à définir ces espaces W_j par l'intermédiaire d'une AMR *duale* $(\tilde{V}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ munie des bases de Riesz *biorthogonales* $\tilde{\Phi}_j$ telles que

$$\langle \Phi_j, \tilde{\Phi}_j \rangle = I_{\Delta_j},$$

et à laquelle on associe le choix d'espaces complémentaires

$$W_j : = V_{j+1} \oplus (\tilde{V}_j)^\perp.$$

Une dernière approche, qui généralise la suivante au cadre où l'AMR duale n'est pas dans L^2 , consiste en la donnée d'une famille de projecteurs $(P_j)_{j \in \mathbb{N}}$ d'images V_j et satisfaisant la propriété de biorthogonalité

$$P_j P_{j+1} = P_j, \quad j \in \mathbb{N}$$

qui traduit l'emboîtement des images \tilde{V}_j des projecteurs adjoints \tilde{P}_j .

Dans toute construction concrète de bases d'ondelettes, ces trois approches sont présentes et complémentaires. La première donne directement accès à la base d'ondelettes Ψ , en particulier à ses propriétés de localité. Les propriétés de localité de la base duale $\tilde{\Psi}$, essentielles pour obtenir des algorithmes de décomposition multiéchelle rapides, se lisent en outre facilement sur l'inverse de la matrice (H_j^T, G_j^T) qui se doit d'être creuse.

Les deux autres approches sont adaptées à l'étude de la stabilité de la décomposition multiéchelle par le biais de la théorie de l'approximation linéaire présentée au §1.1.7. Dans cette étude, les propriétés de régularité et d'approximation de l'AMR primale *et* duale jouent en effet un rôle crucial. Elles ne disent en revanche rien sur l'existence de bases d'ondelettes primales et duales locales.

1.1.2 Ondelettes

Les espaces complémentaires W_j de la décomposition à deux niveaux (1.2) sont supposés munis d'une base de Riesz

$$\Psi_j = \{\psi_{j,k}, k \in \nabla_j\},$$

dont les fonctions de base, les ondelettes, seront toujours en pratique à supports compacts. On exige en outre que la base $\Phi_j \cup \Psi_j$ constitue une base de Riesz uniforme de V_{j+1} , où de façon équivalente que la décomposition entre deux niveaux successifs (1.2) soit uniformément stable

$$\|v_{j+1}\|_{L^2}^2 \sim \|v_j\|_{L^2}^2 + \|w_j\|_{L^2}^2 \quad \forall v_{j+1} = v_j + w_j \in V_{j+1}. \quad (1.11)$$

Cette propriété est clairement une condition nécessaire pour espérer obtenir la stabilité de la décomposition multiéchelle (1.3). Elle peut se reformuler en terme matriciel sur les filtres. Soit G^j , le filtre traduisant l'inclusion $W_j \subset V_{j+1}$, i.e. la matrice $\nabla_j \times \Delta_{j+1}$ telle que

$$\Psi_j = G^j \Phi_{j+1}. \quad (1.12)$$

L'opérateur de recomposition M_j entre deux niveaux successifs j et $j+1$ calcule les composantes c_{j+1} du vecteur $v_{j+1} = c_{j+1}^T \Phi_{j+1} = v_j + w_j$ en fonction des composantes c_j et d_j des vecteurs $v_j = c_j^T \Phi_j$, $w_j = d_j^T \Psi_j$. Il s'exprime en fonction des filtres H^j et G^j selon la formule

$$c_{j+1} = M_j \begin{pmatrix} c_j \\ d_j \end{pmatrix} : = (H^j)^T c_j + (G^j)^T d_j, \quad c_j \in l^2(\Delta_j), d_j \in l^2(\nabla_j). \quad (1.13)$$

Proposition 1.1 *Soit une famille de bases de Riesz uniformes Φ_j , $j \in \mathbb{N}$ vérifiant la relation d'échelle (1.7) et engendrant l'AMR V_j . Etant données les matrices G^j de $\mathcal{L}(l^2(\Delta_{j+1}), l^2(\nabla_j))$ et $\Psi_j = G^j \Phi_{j+1}$, alors $\Phi_j \cup \Psi_j$ définit une base de Riesz uniforme de V_{j+1} si et seulement si les matrices M_j sont inversibles et vérifient*

$$\|M_j\| \lesssim 1 \text{ et } \|M_j^{-1}\| \lesssim 1, j \in \mathbb{N}, \quad (1.14)$$

où $\|\cdot\|$ désigne implicitement la norme matricielle associée à la norme l^2 .

Preuve. L'inversibilité de la matrice M_j équivaut, pour tout $u_{j+1} = c_{j+1}^T \Phi_{j+1}$, à l'existence d'une décomposition unique $v_{j+1} = v_j + w_j$ telle que $v_j = c_j^T \Phi_j$ et $w_j = d_j^T \Psi_j$. L'équivalence entre la propriété de base de Riesz et (1.14) est alors une conséquence directe de la définition de la norme matricielle et des relations

$$c_{j+1} = M_j \begin{pmatrix} c_j \\ d_j \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} c_j \\ d_j \end{pmatrix} = M_j^{-1} c_{j+1}.$$

□

L'inverse M_j^{-1} est l'opérateur de décomposition que l'on écrira sous la forme

$$M_j^{-1}c_{j+1} = \begin{pmatrix} c_j \\ d_j \end{pmatrix}, \quad c_j = \tilde{H}^j c_{j+1}, \quad d_j = \tilde{G}^j c_{j+1}. \quad (1.15)$$

Les matrices \tilde{H}^j et \tilde{G}^j s'interpréteront au § 1.1.5 comme les filtres d'une AMR *duale* ou *biorthogonale* \tilde{V}_j .

Exemple 1. Pour l'AMR (1.8) le choix du complémentaire orthogonal $W_j = V_{j+1} \cap V_j^\perp$ conduit à la base d'ondelettes orthogonales

$$\Psi_j = \left\{ \psi_{j,k} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_{j+1,2k} - \varphi_{j+1,2k+1}), \quad k \in \nabla_j = \{0, \dots, 2^j - 1\} \right\}$$

On note P_j les projecteurs orthogonaux sur les espaces V_j . La figure 1.1 représente pour $j = 2$ les approximations fine $f_{j+1} = P_{j+1}f$ et grossière $f_j = P_j f$ d'une fonction f de $L^2(]0, 1[)$. On voit clairement que les détails $w_j = f_{j+1} - f_j$ vivent dans l'espace W_j engendré par les ondelettes de Haar $\psi_{j,k}$.

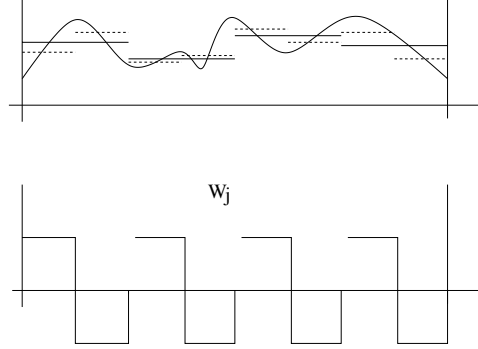


FIG. 1.1 – AMR (1.7) , complémentaire orthogonal

Exemple 2. Pour L'AMR (1.9) la projection par interpolation I_j aux points de la grille Δ_j conduit comme dans l'exemple précédent au choix du complémentaire $W_j = \text{Span}\Psi_j$ où

$$\Psi_j = \left\{ \psi_{j,k} = \varphi_{j+1,2k+1}, \quad k \in \nabla_j = \{0, \dots, 2^j - 1\} \right\}$$

est une base de Riesz uniforme en j . Ce choix définit la base de Schauder ou base hiérarchique. De nouveau la figure 1.2 représente pour $j = 2$ les approximations fine $f_{j+1} = I_{j+1}f$ et grossière $f_j = I_j f$ d'un fonction f continue, où l'on voit que les détails $w_j = f_{j+1} - f_j$ vivent dans l'espace W_j .

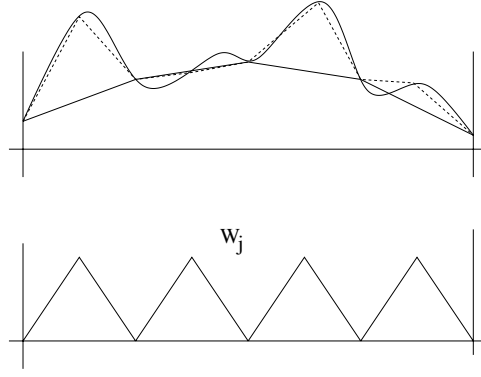


FIG. 1.2 – AMR (1.8), complémentaire interpolant

1.1.3 Décompositions et recompositions multiéchelles

Sous l'hypothèse de supports compacts (de diamètres $\sim 2^{-j}$) des fonctions d'échelle $\varphi_{j,k}$ et des ondelettes $\psi_{j,k}$, les filtres H^j et G^j comportent $\mathcal{O}(N_j)$ termes non nuls. La formule de recombinaison (1.13) s'effectue donc en $\mathcal{O}(N_j)$ opérations. D'après la croissance exponentielle de N_j (cf (1.6)), l'algorithme de recombinaison multiéchelle obtenu en itérant l'opérateur à deux niveaux précédent jusqu'à l'échelle la plus fine J est donc de complexité $\mathcal{O}(N_J)$.

$$\begin{array}{ccccccc}
 c_0 & \rightarrow & c_1 & \rightarrow & c_2 & \dots & \rightarrow & c_J \\
 & \nearrow & & \nearrow & & \dots & \nearrow & \\
 d_0 & & d_1 & & d_2 & & d_{J-1} &
 \end{array}$$

Inversement, on disposera d'un algorithme de décomposition multiéchelle rapide de complexité $\mathcal{O}(N_J)$ si les filtres duaux \tilde{H}^j et \tilde{G}^j sont creux. Or il est bien connu qu'en général l'inverse d'une matrice creuse est au contraire une matrice pleine. Ainsi, en paraphrasant [40], tout l'art et la difficulté de construction des bases d'ondelettes consiste en quelque sorte à trouver les exceptions, i.e. étant donnés les filtres H^j , des filtres creux G^j tels que l'inverse M_j^{-1} soit aussi creux.

$$\begin{array}{ccccccc}
 c_J & \rightarrow & c_{J-1} & \rightarrow & c_{J-2} & \dots & \rightarrow & c_0 \\
 & \searrow & & \searrow & & \dots & \searrow & \\
 & & d_{J-1} & & d_{J-2} & & d_0 &
 \end{array}$$

Sous réserve d'obtention de telles constructions, on disposera donc d'algorithmes rapides pour passer des composantes d'un vecteur dans la base de fonctions d'échelle Φ_J à celles dans la base multiéchelle

$$\Phi_0 \cup \bigcup_{j=0}^{J-1} \Psi_j \tag{1.16}$$

et réciproquement.

Exemple 1. La base d'ondelette $\Phi_0 \cup \bigcup_{j=0}^{J-1} \Psi_j$, appelée base de Haar, est orthogonale; ainsi $M_j^{-1} = M_j^T$ ou en d'autres termes $\tilde{H}^j = H^j$ et $\tilde{G}^j = G^j$.

Exemple 2. La figure ci-dessous représente dans le cas de l'exemple 2 la base nodale et la base multiéchelle pour $J = 2$. La relation d'échelle (1.10) se réécrit $\varphi_{j,0} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(2\varphi_{j+1,0} + \psi_{j,0})$, $\varphi_{j,k} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\psi_{j,k-1} + 2\varphi_{j+1,2k} + \psi_{j,k})$, $k \in \{1, \dots, 2^j - 1\}$ et $\varphi_{j,2^j} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\psi_{j,2^j-1} + 2\varphi_{j+1,2^{j+1}})$, d'où l'on déduit la formule de décomposition

$$c_{j,k} = \sqrt{2}c_{j+1,2k}, k \in \Delta_j, d_{j,k} = c_{j+1,2k+1} - \frac{1}{2}c_{j+1,2k} - \frac{1}{2}c_{j+1,2k+2}, k \in \nabla_j,$$

et les filtres duaux \tilde{H}^j, \tilde{G}^j . On vérifie que $\|M_j^{-1}\| \sim 1$. La base Ψ_j étant bien sûr une base de Riesz uniforme (et donc $\|M_j\| \sim 1$) on en déduit la stabilité de la décomposition à deux niveaux (1.11).

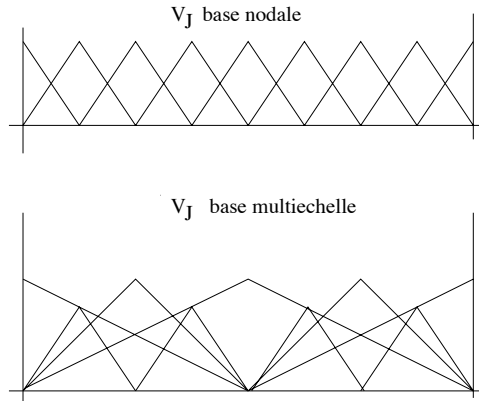


FIG. 1.3 – Bases nodale et multiéchelle (exemple 2) pour $J = 2$

1.1.4 Lifting scheme

Partant d'un premier choix de décomposition $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ vérifiant la propriété de stabilité à deux niveaux (1.11), on peut construire une famille de décompositions $V_{j+1} = V_j \oplus \bar{W}_j$ conservant la même propriété de stabilité. L'objectif est de stabiliser la décomposition multiéchelle au sens de (1.3) par correction d'un premier choix simple de décomposition. Par exemple, partant de la base hiérarchique de l'exemple 2, on souhaite modifier le complémentaire interpolant afin d'obtenir une décomposition stable dans L^2 , tout en conservant la propriété de support compact (ce qui exclut le choix extrême du complémentaire orthogonal).

On renvoie à [40] pour une description générale de ce mécanisme et l'on se contente ici de décrire le procédé de correction “par la grille grossière” ou *lifting scheme* introduit dans [92]. Il consiste à corriger la base d'ondelettes Ψ_j de W_j par des combinaisons linéaires des fonctions d'échelle de Φ_j . Soit une famille de matrices

K^j de taille $\nabla_j \times \Delta_j$, uniformément bornées en norme matricielle l^2 . On considère

$$\bar{\psi}_{j,k} = \psi_{j,k} + \sum_{k' \in \Delta_j} K_{k,k'}^j \varphi_{j,k'}, \quad k \in \nabla_j$$

ou encore $\bar{\Psi}_j = \Psi_j + K^j \Phi_j$ engendrant le nouveau choix d'espaces complémentaires \bar{W}_j . Ceci revient aussi à considérer les nouveaux filtres $\bar{G}^j = G^j + K^j H^j$. On a alors la proposition suivante.

Proposition 1.2 *Si la décomposition $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ vérifie (1.11) alors, les opérateurs de recomposition $\bar{M}_j = ((H^j)^T, (\bar{G}^j)^T)$ et de décomposition $\bar{M}_j^{-1} = (\tilde{H}^j, \tilde{G}^j)$ sont uniformément bornés, i.e. la décomposition $V_{j+1} = V_j \oplus \bar{W}_j$ satisfait aussi la propriété (1.11).*

Preuve. On vérifie facilement que

$$\begin{cases} \tilde{G}^j = \bar{G}^j, \\ \tilde{H}^j = \bar{H}^j - (K^j)^T \bar{G}^j, \end{cases} \quad (1.17)$$

d'où le résultat. □

Remarque 1.1 *En pratique, afin de préserver le support compact des ondelettes primales, la matrice K^j sera une matrice bande. Il résulte de (1.17) que le lifting scheme préserve aussi la propriété de support compact des ondelettes duales.*

Remarque 1.2 *L'autre stratégie de correction d'un premier choix instable de base d'ondelettes est la correction "par la grille fine" où la base $\bar{\Psi}_j$ est recherchée sous la forme*

$$\bar{\Psi}_j : = \Psi_j + K_j \Phi_{j+1}$$

et K_j est cette fois une matrice $\nabla_j \times \Delta_{j+1}$ bande. Contrairement à l'approche précédente, ni la propriété de support compact des ondelettes duales ni même celle de base complémentaire ne sont a priori garanties par une tel choix. Ceci rend l'analyse de la stabilisation bien plus difficile que dans le premier cas, mais en revanche ce procédé permet d'obtenir potentiellement des supports d'ondelettes primales plus petits (cf l'ondelette à trois points de [90]).

1.1.5 Analyse multirésolution duale

Pour une AMR donnée V_j , $j \in \mathbb{N}$, il existe une infinité de choix d'espaces complémentaires W_j . Le choix le plus naturel est certainement le complémentaire orthogonal, qui en particulier garantit la stabilité de la décomposition multiéchelle (1.3). Il conduit cependant en général à des filtres pleins. C'est en particulier le cas pour

l'AMR (1.9) pour laquelle il est connu que le choix du complémentaire orthogonal conduit soit à des filtres primaux denses soit à des filtres duaux denses.

L'abandon de l'orthogonalité autorise des choix d'AMR et de complémentaires souvent plus simples et mieux adaptés aux exigences de l'analyse numérique. En revanche l'analyse des propriétés de la décomposition multiéchelle est bien plus délicate comme on le verra au § 1.1.7. A ce stade on note que la propriété de stabilité (1.3) ainsi que les hypothèses de bases de Riesz de Φ_j et Ψ_j traduisent en fait que la base multiéchelle

$$\Psi = \Phi_0 \cup \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \Psi_j := \{\psi_\lambda, \lambda \in \nabla\} \quad (1.18)$$

est une base de Riesz de L^2 , où la notation λ condense le couple (j, k) de localisation en échelle et en espace et $\nabla = \Delta_0 \cup \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \nabla_j$. Par commodité on notera parfois $\Delta_0 = \nabla_{-1}$, $\Phi_0 = \Psi_{-1}$ et donc $\Psi = \bigcup_{j \geq -1} \Psi_j$. La base d'ondelettes Ψ admet dans ce cas une base de Riesz duale (ou biorthogonale) notée

$$\tilde{\Psi} = \tilde{\Phi}_0 \cup \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \tilde{\Psi}_j := \{\tilde{\psi}_\lambda, \lambda \in \nabla\}, \quad (1.19)$$

avec la propriété de biorthogonalité

$$\langle \psi_\lambda, \tilde{\psi}_{\lambda'} \rangle = \delta_{\lambda, \lambda'}, \quad \lambda \in \nabla, \lambda' \in \nabla. \quad (1.20)$$

Pour une collection de fonctions Φ de L^2 on note $S(\Phi)$ la fermeture dans L^2 de l'espace qu'elle engendre. La stabilité (1.3) implique que la famille de sous espaces emboîtés

$$\tilde{V}_j := S(\tilde{\Phi}_0) \oplus S(\tilde{\Psi}_0) \oplus \dots \oplus S(\tilde{\Psi}_{j-1}), j \in \mathbb{N} \quad (1.21)$$

définit une AMR dite duale ou biorthogonale de L^2 . On vérifie alors facilement que les espaces complémentaires W_j sont aussi définis par la formule

$$W_j = V_{j+1} \cap (\tilde{V}_j)^\perp, \quad (1.22)$$

c'est à dire que le couple d'AMR (V_j, \tilde{V}_j) , $j \in \mathbb{N}$ définit par (1.22) un choix de décomposition multiéchelle (1.2), et que toutes les décompositions multiéchelles stables dans L^2 s'expriment sous cette forme. En outre la décomposition multiéchelle primale induit une décomposition duale $\tilde{V}_{j+1} = \tilde{V}_j \oplus \tilde{W}_j$ où

$$\tilde{W}_j = \tilde{V}_{j+1} \cap (V_j)^\perp = S(\tilde{\Psi}_j) \quad (1.23)$$

qui hérite par dualité de la propriété de stabilité dans L^2 .

Une démarche naturelle et non restrictive, si l'on souhaite obtenir une stabilité dans L^2 , est donc de partir d'un couple d'AMR (V_j, \tilde{V}_j) , $j \in \mathbb{N}$ et de définir W_j par

(1.22). Le lemme classique suivant fournit alors une condition nécessaire et suffisante pour que les choix d'espaces complémentaires W_j et \widetilde{W}_j (1.22, 1.23) satisfassent la propriété de stabilité (1.11) à deux niveaux. On en donne la démonstration dans la mesure où ce lemme ne figure pas dans les références [26] ou [40] et où il nous sera utile par la suite.

Lemme 1.1 *Soient X_j et Y_j deux familles de sous espaces fermés d'un espace de Hilbert H muni du produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et de la norme hilbertienne $\|\cdot\|$. Soit $\alpha > 0$ une constante indépendante du paramètre h . Les propriétés suivantes sont alors équivalentes*

- (i) $\inf_{x \in X_j, x \neq 0} \sup_{y \in Y_j, y \neq 0} \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} \geq \alpha > 0$.
- (ii) $\|\pi_j x\| \geq \alpha \|x\|$ pour tout $x \in X_j$, où π_j est le projecteur orthogonal sur Y_j .
- (iii) La somme $Y_j^\perp \oplus X_j$ est directe ($Y_j^\perp \cap X_j = \{0\}$) et uniformément stable dans H , plus précisément $\|x + z\|^2 \geq (1 - \sqrt{1 - \alpha^2})(\|x\|^2 + \|z\|^2)$ pour tout $x \in X_j, z \in Y_j^\perp$.

Si de plus

$$\inf_{y \in Y_j, y \neq 0} \sup_{x \in X_j, x \neq 0} \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} > 0, \quad (1.24)$$

ou si les espaces X_j et Y_j sont de même dimension (finie), alors les conditions précédentes sont aussi équivalentes aux mêmes conditions (i), (ii), (iii), où les rôles des espaces X_j et Y_j sont interchangés. Les deux conditions inf-sup (i) et (1.24) sont en outre équivalentes à la propriété que l'une quelconque des sommes $Y_j^\perp \oplus X_j$ ou $X_j^\perp \oplus Y_j$ est directe, égale à H et uniformément stable dans H .

Preuve. On déduit des égalités

$$\sup_{y \in Y_j} \frac{\langle x, y \rangle}{\|y\|} = \sup_{y \in Y_j} \frac{\langle \pi_j x, y \rangle}{\|y\|} = \|\pi_j x\|,$$

que les propriétés (i) et (ii) sont équivalentes. La propriété (iii) énonce que l'angle entre X_j et Y_j^\perp est uniformément minoré. La borne inférieure $\inf\{\frac{\|x+z\|^2}{\|x\|^2 + \|z\|^2} : x \in X_j, z \in Y_j^\perp\}$ est donnée par $1 - \beta$, où β est la borne supérieure de $\cos(x, z)$ pour $x \in X_j, z \in Y_j^\perp$

$$\begin{aligned} \beta &= \sup_{x \in X_j, z \in Y_j^\perp, x \neq 0, z \neq 0} \frac{\langle x, z \rangle}{\|x\| \|z\|} = \sup_{x \in X_j, z \in Y_j^\perp, x \neq 0, z \neq 0} \frac{\langle x - \pi_j x, z \rangle}{\|x\| \|z\|} \\ &= \sup_{x \in X_j, x \neq 0} \frac{\|x - \pi_j x\|}{\|x\|} = \left(1 - \left(\sup_{x \in X_j, x \neq 0} \frac{\|\pi_j x\|}{\|x\|}\right)^2\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Ceci prouve l'équivalence des propriétés (ii) et (iii). La deuxième assertion du lemme s'obtient par transposition. Soient des bases orthonormées (finies ou dénombrables)

$\{e_k^x, k \in E_j\}$ de X_j et $\{e_k^y, k \in F_j\}$ de Y_j . Si la condition inf-sup (1.24) est supposée vérifiée, ou si les espaces X_j et Y_j ont même dimension, la propriété (ii) énonce de façon équivalente que la matrice $A_j = (\langle e_k^y, e_{k'}^x \rangle)_{k \in F_j, k' \in E_j}$ est inversible et que son inverse admet la borne uniforme en norme matricielle l^2 : $\|A_j^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha}$. Alors, la transposition échange les rôles de X_j et Y_j et le résultat énoncé découle de l'égalité $\|A_j^{-1}\| = \|A_j^{-T}\|$. Enfin pour démontrer la dernière assertion du lemme, il nous reste à prouver dans un sens que les conditions inf-sup (i) et (1.24) impliquent les propriétés $H = X_j^\perp + Y_j$ et $H = Y_j^\perp + X_j$, ce qui est facile par l'équivalence (i)-(iii) et par transposition. Dans l'autre sens, par exemple, l'uniforme stabilité de la somme $Y_j^\perp \oplus X_j$ implique (i) par la première partie du lemme, et le fait que cette somme soit de plus égale à H entraîne que pour tout $y \in Y_j$ non nul

$$\sup_{x \in X_j} \frac{\langle y, x \rangle}{\|y\| \|x\|} \gtrsim \sup_{z \in H} \frac{\langle y, z \rangle}{\|y\| \|z\|} = 1$$

et donc que la condition inf-sup (1.24) soit vérifiée. \square

Proposition 1.3 *Soit (V_j, \tilde{V}_j) un couple d'AMR de L^2 , les décompositions multi-échelles primale $V_{j+1} = V_j \oplus W_j$ et duale $\tilde{V}_{j+1} = \tilde{V}_j \oplus \tilde{W}_j$ définies par les choix (1.22, 1.23) satisfont la propriété de stabilité à deux niveaux (1.11) si et seulement si il existe une constante α telle que*

$$\begin{cases} \inf_{v_j \in V_j} \sup_{\tilde{v}_j \in \tilde{V}_j} \frac{\langle v_j, \tilde{v}_j \rangle}{\|v_j\| \|\tilde{v}_j\|} \geq \alpha > 0, \quad \forall j \in \mathbb{N}, \\ \inf_{\tilde{v}_j \in \tilde{V}_j} \sup_{v_j \in V_j} \frac{\langle v_j, \tilde{v}_j \rangle}{\|v_j\| \|\tilde{v}_j\|} > 0, \quad \forall j \in \mathbb{N}. \end{cases} \quad (1.25)$$

En outre si les espaces V_j ou \tilde{V}_j sont de dimension finie il faut et il suffit qu'ils aient même dimension et que l'une quelconque des conditions Inf-Sup soit vérifiée avec une constante uniforme $\alpha > 0$.

Preuve. Il suffit d'appliquer le lemme 1.1 avec $H = L^2$ et $(X_j, Y_j) = (V_j, \tilde{V}_j)$ ou (\tilde{V}_j, V_j) . \square

Le cadre de la proposition 1.3 s'avère adapté à l'étude de la stabilité de la décomposition multi-échelle, en particulier dans L^2 . En général la stabilité à deux niveaux ne suffit pas à garantir cette stabilité, il faudra en outre pour l'assurer, des propriétés minimales d'approximation et de régularité des espaces V_j et \tilde{V}_j qui seront formulées au § 1.1.7. Le prix à payer pour sortir du cadre orthogonal (pour lequel $V_j = \tilde{V}_j$) est donc l'étude des propriétés d'approximation et de régularité de l'AMR duale \tilde{V}_j , ce qui constitue certainement le point le plus délicat de la construction et de l'analyse des bases d'ondelettes.

Les AMR (V_j, \tilde{V}_j) satisfaisant les propriétés de la proposition 1.3 seront dites biorthogonales. On notera par la suite $\Phi_j = \{\varphi_{j,k}, k \in \Delta_j\}$ la base de Riesz primale

de V_j et $\tilde{\Phi}_j = \{\tilde{\varphi}_{j,k}, k \in \Delta_j\}$ la base de Riesz duale de \tilde{V}_j vérifiant la propriété de biorthogonalité

$$\langle \varphi_{j,k}, \tilde{\varphi}_{j,k'} \rangle = \delta_{k,k'}, k, k' \in \Delta_j \text{ où } \langle \Phi_j, \tilde{\Phi}_j \rangle = I_{\Delta_j}, \quad (1.26)$$

dont l'existence et l'unicité est assurée par les conditions Inf-Sup (1.25). De même pour les espaces d'ondelettes W_j et \tilde{W}_j l'existence de bases de Riesz $\Psi_j = \{\psi_{j,k}, k \in \nabla_j\}$, $\tilde{\Psi}_j = \{\tilde{\psi}_{j,k}, k \in \nabla_j\}$ biorthogonales i.e telles que

$$\langle \psi_{j,k}, \tilde{\psi}_{j,k'} \rangle = \delta_{k,k'}, k, k' \in \nabla_j, \text{ où } \langle \Psi_j, \tilde{\Psi}_j \rangle = I_{\nabla_j} \quad (1.27)$$

est garantie par le lemme suivant.

Lemme 1.2 *Si le couple d'AMR (V_j, \tilde{V}_j) vérifie les conditions inf-sup (1.25) alors c'est aussi le cas pour le couple (W_j, \tilde{W}_j) .*

Preuve. On applique à nouveau le lemme 1.1 pour $H = L^2$ et $(X_j, Y_j) = (W_j, \tilde{W}_j)$. Il faut montrer que la somme $X_j \oplus Y_j^\perp$ est égale à H et uniformément stable. Par définition de \tilde{W}_j on a $\tilde{W}_j^\perp = \tilde{V}_{j+1}^\perp \oplus V_j$ et donc $\tilde{W}_j^\perp \oplus W_j = \tilde{V}_{j+1}^\perp \oplus V_j \oplus W_j$. Le résultat découle alors de la stabilité à deux niveaux appliquée entre les échelles j et $j+1$ et entre $j+1$ et $j+2$. \square

Par définition des espaces d'ondelettes on a en outre les relations

$$\langle \Phi_j, \tilde{\Psi}_j \rangle = \langle \tilde{\Phi}_j, \Psi_j \rangle = 0. \quad (1.28)$$

Les propriétés de biorthogonalité (1.26, 1.27, 1.28) se traduisent facilement sur les filtres primaux H^j et G^j et duaux \tilde{H}^j, \tilde{G}^j par les relations de biorthogonalité

$$\begin{pmatrix} \tilde{H}^j(H^j)^T & \tilde{H}^j(G^j)^T \\ \tilde{G}^j(H^j)^T & \tilde{G}^j(G^j)^T \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{\Delta_j} & 0 \\ 0 & I_{\nabla_j} \end{pmatrix} \quad (1.29)$$

ou de façon équivalente

$$(H^j)^T \tilde{H}^j + (G^j)^T \tilde{G}^j = I_{\Delta_{j+1}}. \quad (1.30)$$

Ceci montre en particulier que l'opérateur de décomposition (1.15) est bien défini par les filtres duaux.

Remarque 1.3 *Etant donné un couple d'AMR biorthogonales, la propriété (1.25) ne dit rien sur l'existence de filtres duaux et primaux creux, qui permet de disposer d'algorithmes de décomposition et recombinaison rapides. Cette propriété équivaut à l'existence de bases de Riesz primales et duales biorthogonales dont les supports soient compacts de diamètres $\sim 2^{-j}$.*

Etant donnée la famille $(V_j, \Phi_j)_{j \in \mathbb{N}}$, une méthode de construction d'AMR duales (et donc d'espaces d'ondelettes) consiste à trouver des filtres duaux creux \tilde{H}^j vérifiant la propriété de biorthogonalité

$$\tilde{H}^j (H^j)^T = I_{\Delta_j}.$$

L'AMR duale $\tilde{V}_j := S(\tilde{\Phi}_j)$ est alors implicitement définie par l'équation d'échelle

$$\tilde{\Phi}_j = \tilde{H}^j \tilde{\Phi}_{j+1}$$

et la difficulté consiste à étudier la régularité des solutions de cette équation.

C'est en particulier la stratégie adoptée dans le cas de la construction sur la droite réelle [29] qui exploite en outre l'invariance par translation. Dans ce cas particulier, on peut déduire facilement des bases d'ondelettes biorthogonales à supports compacts des espaces complémentaires W_j et \tilde{W}_j . Ces résultats seront rappelés brièvement au §1.2.

On introduit dans le paragraphe suivant la notion de projecteur biorthogonal qui permet d'étendre la notion d'AMR duale lorsque celle-ci est moins régulière que L^2 . C'est en particulier le cas de la base de Schauder (exemple 2 § 1.1.3) pour laquelle il est facile de voir que l'AMR duale est engendrée par les mesures de Dirac aux points dyadiques $2^{-j}k, k = 0, \dots, 2^j$.

1.1.6 Projecteur biorthogonal

Toujours partant de l'AMR $V_j, j \in \mathbb{N}$, une autre approche conduisant à se donner un choix d'espaces complémentaires W_j consiste à définir une famille de projecteurs P_j d'un sous-espace dense de L^2 dans V_j ayant la propriété dite de biorthogonalité suivante

$$P_j P_{j+1} = P_j, \tag{1.31}$$

ou de façon équivalente telle que les opérateurs

$$Q_j = P_{j+1} - P_j \tag{1.32}$$

soient aussi des projecteurs. Les espaces complémentaires sont par définition les images des projecteurs Q_j qui vérifient d'après (1.31) la propriété de somme directe (1.2).

La propriété d'emboîtement des images V_j s'exprime aussi par la relation $P_{j+1} P_j = P_j$. Par transposition de (1.31) la propriété de biorthogonalité des projecteurs P_j exprime donc que les images des projecteurs adjoints \tilde{P}_j (définis formellement de $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$ dans $\mathcal{D}'(\bar{\Omega})$) sont emboîtées, et définissent donc une "AMR duale". Le lien avec le cadre précédent est précisé par la proposition suivante.

Proposition 1.4 *Si la famille de projecteur P_j vérifiant les hypothèses ci-dessus est uniformément stable dans L^2 , les images \tilde{V}_j des projecteurs adjoints \tilde{P}_j définissent*

une AMR de L^2 telle que

$$W_j = \text{Im}(Q_j) = V_{j+1} \cap \tilde{V}_j^\perp,$$

et le couple d'AMR (V_j, \tilde{V}_j) vérifient les conditions inf-sup (1.25).

Réciproquement tout couple d'AMR (V_j, \tilde{V}_j) vérifiant la proposition 1.3 définit deux familles de projecteurs adjoints P_j, \tilde{P}_j uniformément stables dans L^2 par

$$P_j f = \sum_{k \in \Delta_j} \langle f, \tilde{\varphi}_{j,k} \rangle \varphi_{j,k} \quad (1.33)$$

où $(\Phi_j = \{\varphi_{j,k}, k \in \Delta_j\}, \tilde{\Phi}_j = \{\tilde{\varphi}_{j,k}, k \in \Delta_j\})$ est n'importe quel couple de bases de Riesz biorthogonales uniformément stables de V_j et \tilde{V}_j .

Preuve. Partant d'une famille de bases de Riesz uniformément stables Φ_j des espaces V_j , il suffit d'appliquer le théorème de représentation de Riesz pour conclure à l'existence de bases de Riesz $\tilde{\Phi}_j$ de \tilde{V}_j , uniformément stables et telles que $P_j f = \sum_{k \in \Delta_j} \langle f, \tilde{\varphi}_{j,k} \rangle \varphi_{j,k}$. Les conditions inf-sup (1.25) s'en déduisent facilement. La propriété de densité de l'union des \tilde{V}_j s'obtient par dualité (voir [38]). La preuve de la réciproque est facile. \square

Exemple 1. La propriété de biorthogonalité et de stabilité dans L^2 est bien sûr toujours vérifiée pour des projecteurs orthogonaux sur une famille d'espaces emboîtés.

Exemple 2. Le projecteur interpolant

$$P_j v = \sum_{k=1}^{2^j-1} 2^{-\frac{j}{2}} v(2^{-j}k) \varphi_{j,k}, \quad v \in C^0([0,1])$$

vérifie la propriété de biorthogonalité (1.31) et conduit au choix d'espace complémentaire W_j défini au § 1.1.2. Il n'est en revanche pas stable dans L^2 . L'AMR duale est engendrée par les mesures de Dirac aux points $2^{-j}k$, $k = 1, \dots, 2^j - 1$. Par extension de la dualité aux mesures de Radon, on emploiera encore la terminologie de base et d'AMR duale ou biorthogonale.

Remarque 1.4 La stabilité uniforme des projecteurs P_j dans L^2 entraîne classiquement l'équivalence

$$\inf_{v_j \in V_j} \|v - v_j\| \sim \|v - P_j v\|, \quad \forall v \in L^2.$$

On en déduit que la propriété de densité des AMR équivaut à la propriété

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \|v - P_j v\| = 0. \quad (1.34)$$

Ainsi la stabilité uniforme dans L^2 des projecteurs P_j garantit la convergence dans L^2 de la décomposition multiéchelle (1.1)

$$v = P_0 v + \sum_{j \in \mathbb{N}} Q_j v \quad (1.35)$$

au sens de la convergence des suites partielles, et la même propriété pour la décomposition duale. Cette propriété est bien sûr moins forte que la propriété de stabilité L^2 (1.3) qui traduit la convergence inconditionnelle de la série.

1.1.7 Décompositions multiéchelles et théorie de l'approximation

Etant donné la suite emboîtée d'espaces d'approximation V_j de l'espace de Sobolev $W^{t,p}$, la théorie de l'approximation cherche à relier le taux d'approximation

$$\inf_{v_j \in V_j} \|v - v_j\|_{W^{t,p}}$$

aux propriétés de régularité $W^{s,p}$, $s > t$ de la fonction v .

Sous l'hypothèse de stabilité uniforme dans $W^{t,p}$ des projecteurs P_j ,

$$\inf_{v_j \in V_j} \|v - v_j\|_{W^{t,p}} \sim \|v - P_j v\|_{W^{t,p}},$$

et on verra que cette question est intimement liée à la stabilité de la décomposition multiéchelle (1.35).

Cette théorie permettra donc de dégager des critères abstraits de stabilité de la décomposition multiéchelle, et en outre d'étendre l'équivalence de norme (1.3) à la classe des espaces de Besov $B_{p,q}^s$. Elle repose sur l'articulation entre les propriétés d'estimations directe et inverse dans les espaces d'approximation V_j et la théorie de l'interpolation. On se contente de rappeler les théorèmes qui nous seront utiles dans la suite de cet exposé et renvoyons par exemple au § III de [26] pour une étude détaillée.

Espaces fonctionnels et interpolation

Soit Ω un domaine Lipschitz de \mathbb{R}^d . On considèrera par la suite les espaces de Sobolev $W^{s,p}$ définis classiquement pour $1 \leq p \leq \infty$ et $s \geq 0$ (voir par exemple [1]). Pour $p = 2$ on adopte la notation usuelle $H^s := W^{s,2}$ et pour $p = \infty$ et s non entier on obtient les espaces de Hölder $C^s := W^{s,\infty}$.

Il nous faut compléter cette échelle de régularité des espaces fonctionnels en introduisant les espaces de Besov $B_{p,q}^s$, $1 \leq p, q \leq \infty$, où le paramètre q apparaît comme une modulation supplémentaire (voir par exemple [54] pour la définition par module de continuité ou [96] pour une définition par décomposition de Littlewood-Paley).

Classiquement pour s non entier $B_{p,p}^s = W^{s,p}$, (donc en particulier $B_{\infty,\infty}^s = C^s$) et pour $p = 2$, $B_{2,2}^s = H^s$ quelque soit s . D'autre part $B_{p,q_1}^s \subset B_{p,q_2}^s$ pour $q_1 \leq q_2$ et $B_{p,q_1}^{s_1} \subset B_{p,q_2}^{s_2}$ pour $s_1 > s_2$ quelque soient q_1 et q_2 où l'on voit que le paramètre q joue un rôle de modulation mineur.

Rappelons brièvement la théorie de l'interpolation réelle qui joue un rôle essentiel dans ce qui suit (voir par exemple [3] pour une étude détaillée). Soient X et Y deux espaces de Banach tels que $Y \subset X$ avec injection continue et dense. On leur associe la K -fonctionnelle définie pour tout $f \in X$ par

$$K(f, t) = K(f, t, X, Y) := \inf_{g \in Y} [\|f - g\|_X + t\|g\|_Y]. \quad (1.36)$$

Pour $\theta \in]0, 1[$ et $q \in [1, +\infty[$, on définit les espaces intermédiaires $Y \subset [X, Y]_{\theta, q} \subset X$, comme l'ensemble des fonctions f telles que la fonctionnelle

$$\|f\|_{[X, Y]_{\theta, q}} := \|t^{-\theta} K(f, t)\|_{L^q(]0, 1[, dt/t)}$$

soit bornée. Ce sont des espaces de Banach pour la norme $\|f\|_{[X, Y]_{\theta, q}}$. D'après la propriété de monotonie de la K fonctionnelle, une norme équivalente est définie par la série

$$\|\rho^{j\theta} K(f, \rho^{-j})\|_{l^q(\mathbb{N})}$$

quelque soit $\rho > 1$ fixé. L'interpolation définit un *foncteur* pour la classe des opérateurs linéaires bornés: si T est continu de X_1 dans X_2 et de Y_1 dans Y_2 alors T est aussi continu de $[X_1, Y_1]_{\theta, q}$ dans $[X_2, Y_2]_{\theta, q}$ avec l'estimation

$$\|T\|_{\mathcal{L}([X_1, Y_1]_{\theta, q}, [X_2, Y_2]_{\theta, q})} \lesssim \|T\|_{\mathcal{L}(Y_1, Y_2)}^\theta \|T\|_{\mathcal{L}(X_1, X_2)}^{1-\theta}. \quad (1.37)$$

La deuxième propriété essentielle est le théorème de réitération qui traduit l'intuition selon laquelle l'espace intermédiaire $[X, Y]_{\theta, q}$ se comporte comme le "barycentre" des espaces X et Y pondérés des poids $1-\theta, \theta$. Soient $Z_1 = [X, Y]_{\theta_1, q_1}$ et $Z_2 = [X, Y]_{\theta_2, q_2}$, alors

$$[Z_1, Z_2]_{\theta, q} = [X, Y]_{\theta(1-\theta_1)+\theta_2, q}. \quad (1.38)$$

Les espaces de Besov apparaissent naturellement par interpolation réelle des espaces de Sobolev $W^{s,p}$.

$$[W^{t,p}, W^{s,p}]_{\theta, q} = B_{p,q}^r, \quad r = (1-\theta)t + \theta s. \quad (1.39)$$

En outre, une conséquence directe de la propriété précédente et du théorème de réitération est que l'échelle des espaces de Besov est stable par interpolation:

$$[B_{p,q_1}^t, B_{p,q_2}^s]_{\theta, q} = B_{p,q}^r, \quad r = (1-\theta)t + \theta s \quad (1.40)$$

quelques soient q_1, q_2 . Ce n'est pas le cas des espaces de Sobolev $W^{s,p}$ pour $p \neq 2$, et constitue une première justification de l'introduction des espaces de Besov.

La définition des espaces de Besov peut en outre être étendue aux valeurs $p, q < 1$, ce qui s'avérera crucial dans le cadre de l'approximation non linéaire dont la théorie est brièvement rappelée au § 2.2.1. On obtient des quasi Banach munis d'une quasi norme ne satisfaisant pas l'inégalité triangulaire. Néanmoins ils satisfont la μ inégalité triangulaire

$$\|f + g\|^\mu \leq \|f\|^\mu + \|g\|^\mu \quad (1.41)$$

pour $\mu \leq \min(p, q)$. Les espaces L^p pour $p < 1$ n'étant pas des espaces de distributions, on supposera toujours que $\frac{s}{d} > \max(1/p - 1, 0)$, hypothèse qui garantit l'injection de $B_{p,q}^s$ dans L^1 (voir [54]).

Théorie de l'approximation

Définition 1.1 Soient X un espace de Banach et $(V_j)_{j \in \mathbb{N}}$ une suite d'espaces emboîtés dont l'union est dense dans X . Pour $s > 0$ et $q \in [1, +\infty]$ on définit l'espace $\mathcal{A}_q^s(X)$ par

$$\mathcal{A}_q^s(X) := \{f \in X, (2^{sj} \text{dist}_X(f, V_j))_{j \in \mathbb{N}} \in l^q\}, \quad (1.42)$$

où $\text{dist}_X(f, V_j) := \inf_{f_j \in V_j} \|f - f_j\|_X$. Pour $X = L^p$, on notera en particulier $\mathcal{A}_{p,q}^s := \mathcal{A}_q^s(L^p)$.

On vérifie que l'espace $\mathcal{A}_q^s(X)$ ainsi défini est un espace de Banach muni de la norme

$$\|f\|_{\mathcal{A}_q^s(X)} := \|f\|_X + \|f\|_{\mathcal{A}_q^s(X)}, \quad \|f\|_{\mathcal{A}_q^s(X)} := \|(2^{sj} \text{dist}_X(f, V_j))_{j \in \mathbb{N}}\|_{l^q}, \quad (1.43)$$

et s'injecte continuellement dans X .

Soit $Y \subset X$ avec injection dense et continue. La théorie de l'interpolation permet d'identifier les espace $\mathcal{A}_q^s(X)$ aux espaces d'interpolations $[X, Y]_{\theta, q}$ moyennant des hypothèses d'estimations directe et inverse dans V_j . La preuve (voir [26] § III) est rappelée en Appendice 1.

Théorème 1.1 Soit l'AMR $V_j \subset V_{j+1} \subset Y \subset X$. Si pour un réel $m > 0$ on a l'estimation directe (ou inégalité de Jackson)

$$\text{dist}_X(f, V_j) \lesssim 2^{-mj} \|f\|_Y \quad (1.44)$$

et l'estimation inverse (ou inégalité de Bernstein)

$$\|f_j\|_Y \lesssim 2^{mj} \|f_j\|_X, \quad \forall f_j \in V_j, \quad (1.45)$$

alors on a l'équivalence de norme, pour tout $s \in]0, m[$

$$\|f\|_X + \|(2^{sj} \text{dist}_X(f, V_j))_{j \in \mathbb{N}}\|_{l^q} \sim \|2^{js} K(f, 2^{-jm})\|_{l^q} \quad (1.46)$$

et donc $[X, Y]_{\theta, q} = \mathcal{A}_q^s(X)$ pour $s = \theta m$, $\theta \in]0, 1[$.

En pratique on s'intéresse à l'erreur d'approximation $\|f - P_j f\|_X$, voire aux détails $\|P_{j+1} - P_j f\|_X$, pour certaines familles de projecteurs P_j sur V_j (comme les projecteurs biorthogonaux du § 1.1.6) et non à la meilleure approximation. Moyennant l'hypothèse de stabilité uniforme des projecteurs P_j dans X , on a alors le théorème suivant (à nouveau la preuve est reportée à l'appendice 1).

Théorème 1.2 *Sous les mêmes hypothèses que le théorème précédent, si de plus la famille de projecteurs P_j est uniformément bornée dans X , alors*

$$\|f - P_j f\|_X \sim \text{dist}_X(f, V_j)$$

et pour $s = \theta m$, $\theta \in]0, 1[$, les normes $\mathcal{A}_q^s(X)$, $[X, Y]_{\theta, q}$ sont aussi équivalentes à

$$\|P_0 f\|_X + \|(2^{js} \|f - P_j f\|_X)_{j \in \mathbb{N}}\|_{l^q}, \quad (1.47)$$

et à

$$\|P_0 f\|_X + \|(2^{js} \|Q_j f\|_X)_{j \in \mathbb{N}}\|_{l^q}. \quad (1.48)$$

Remarque 1.5 *On voit que les propriétés d'approximation dans V_j de la fonction f dépendent essentiellement de sa régularité ($f \in [X, Y]_{\theta, q}$) et ne dépendent du choix spécifique des espaces V_j que par le biais des estimations directe et inverse (1.44) et (1.45).*

Remarque 1.6 *Considérant les projecteurs biorthogonaux du paragraphe 1.1.6, l'équivalence de norme (1.48) entraîne la stabilité de la décomposition multiéchelle dans les espaces d'interpolation $[X, Y]_{\theta, q}$, au sens où pour toute fonction $f \in [X, Y]_{\theta, q}$, la série $P_0 f + \sum_{j \in \mathbb{N}} Q_j f$ converge inconditionnellement dans l'espace $[X, Y]_{\theta, q}$. En particulier pour $X = L^2$ et $Y = H^m$, sous les hypothèses du théorème précédent, on obtient l'équivalence de norme, pour tout $0 < s < m$*

$$\|f\|_{H^s} \sim \|P_0 f\|_{L^2} + \|(2^{js} \|Q_j f\|_{L^2})_{j \in \mathbb{N}}\|_{l^2}. \quad (1.49)$$

Sous l'hypothèse que les bases d'ondelettes Ψ_j sont des bases de Riesz uniformes des espaces W_j , on a donc

$$\|f\|_{H^s} \sim \|(2^{|\lambda|s} |\langle f, \tilde{\psi}_\lambda \rangle|)_{\lambda \in \nabla}\|_{l^2}. \quad (1.50)$$

i.e. la caractérisation de l'espace H^s par la norme l^2 des coefficients d'ondelettes pondérés des poids $2^{|\lambda|s}$.

Plus généralement on a le corollaire suivant du Théorème 1.2 qui énonce la caractérisation de la norme Besov d'une fonction par une norme discrète de sa décomposition dans une base d'ondelettes Ψ . Rappelons que par convention $\Delta_{-1} := \nabla_0$ et $\Psi_{-1} := \Phi_0$. Pour $p, q \in [1, +\infty]$ on notera $l^q(l^p)$ l'espace de Banach des suites $l^q(\{j \in \mathbb{Z}, j \geq -1\})$ à valeurs dans $l^p(\nabla_j)$ muni de la norme

$$\|(F_j)_{j \geq -1}\|_{l^q(l^p)} = \|(\|F_j\|_{l^p(\nabla_j)})_{j \geq -1}\|_{l^q}.$$

Corollaire 1.1 *Soient un couple d'AMR biorthogonales $(V_j, \tilde{V}_j)_{j \in \mathbb{N}}$ de L^2 vérifiant les hypothèses de la proposition 1.3 et les projecteurs biorthogonaux associés $(P_j)_{j \in \mathbb{N}}$ uniformément stables dans L^2 . On suppose que pour $p \in [1, +\infty]$ fixé et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, on a*

(i) $V_j \subset L^p$ et $\tilde{V}_j \subset L^{p'}$.

(ii) Il existe des bases de Riesz biorthogonales Φ_j et $\tilde{\Phi}_j$ de V_j et \tilde{V}_j dont les supports soient compacts de diamètres $\sim 2^{-j}$ et telles que $\|\varphi_{j,k}\|_{L^p} \sim 2^{d(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})j}$, $\|\tilde{\varphi}_{j,k}\|_{L^{p'}} \sim 2^{d(\frac{1}{2}-\frac{1}{p'})j}$, $k \in \Delta_j$.

(iii) les espaces V_j vérifient les estimations directe et inverse (1.44) et (1.45) pour $X = L^p$, $Y = W^{m(p),p}$ et $m = m(p) > 0$.

(iv) Il existe des bases d'ondelettes biorthogonales $\Psi_j, \tilde{\Psi}_j$ des espaces W_j, \tilde{W}_j dont les supports soient compacts de diamètres $\sim 2^{-j}$ et telles que $\|\psi_{j,k}\|_{L^p} \sim 2^{d(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})j}$, $\|\tilde{\psi}_{j,k}\|_{L^{p'}} \sim 2^{d(\frac{1}{2}-\frac{1}{p'})j}$, $k \in \nabla_j$.

Alors pour tout $0 < s < m(p)$ et $q \in [1, +\infty]$, on a l'équivalence de normes

$$\|f\|_{B_{p,q}^s} \sim \left\| \left(2^{sj} 2^{d(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})j} \langle f, \tilde{\Psi}_j \rangle \right)_{j \geq -1} \right\|_{l^q(l^p)}. \quad (1.51)$$

Preuve. De l'hypothèse (ii) on déduit classiquement (voir Appendice 2)

$$\|F_j^T \Phi_j\|_{L^p} \sim 2^{d(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})j} \|F_j\|_{l^p}, \quad (1.52)$$

puis la stabilité des projecteurs P_j dans L^p

$$\|P_j f\|_{L^p} \sim 2^{d(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})j} \|\langle f, \tilde{\Phi}_j \rangle\|_{l^p} \lesssim \sum_{k \in \Delta_j} \|f\|_{L^p(\text{Supp } \tilde{\varphi}_{j,k})} \lesssim \|f\|_{L^p}.$$

Le Théorème 1.2 et la propriété $[L^p, W^{m,p}]_{\theta,q} = B_{p,q}^{\theta m}$ (cf. (1.39)), donnent alors l'équivalence de norme pour tout $0 < s < m(p)$ et $q \in [1, +\infty]$

$$\|f\|_{B_{p,q}^s} \sim \|P_0 f\|_{L^p} + \| (2^{sj} \|Q_j f\|_{L^p})_{j \in \mathbb{N}} \|_{l^q}.$$

On conclut par $\|F_j^T \Psi_j\|_{L^p} \sim 2^{d(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})j} \|F_j\|_{l^p}$ qui résulte de (iv). \square

Estimations directes et inverses

Les estimations directes (par exemple dans V_j) résulteront classiquement des propriétés d'approximation polynômiales des espaces V_j . Classiquement si les projecteurs P_j sont locaux, stables dans L^p (1.52) et reproduisent les polynômes de \mathbb{P}_{n-1} , il résultera d'arguments de type Deny-Lions (voir par exemple [24]) que

$$\|f - P_j f\|_{L^p} \lesssim 2^{-js} \|f\|_{W^{s,p}}, \quad \forall 0 \leq s \leq n.$$

En particulier notons que les propriétés $\mathbb{P}_{n-1} \subset V_j$ (et de même $\mathbb{P}_{\tilde{n}-1} \subset \tilde{V}_j$) se traduisent sur les bases d'ondelettes par celles de moments nuls

$$\int x^k \psi_\lambda dx = 0, \quad \forall k = 0, \dots, \tilde{n} - 1, \quad \int x^k \tilde{\psi}_\lambda dx = 0, \quad \forall k = 0, \dots, n - 1,$$

qui sont à la base de leurs propriétés de compression (voir Appendice 3).

Les estimations inverses (par exemple dans V_j) seront une conséquence facile de la stabilité dans L^p (1.52) et de la régularité des espaces $V_j \subset W^{s,m(p)}$.

Tous ces arguments sont détaillés dans l'exemple modèle des ondelettes sur la droite réelle en Appendice 2. Les autres cas de figure considérés par la suite se traiteront dans le même esprit avec le cas échéant des difficultés techniques qui seront brièvement discutées. On renvoie dans tous les cas au Chapitre III de [26] pour une analyse complète de ces estimations dans un cadre général.

Dualité

Le Corollaire 1.1 s'applique aussi à la décomposition dans la base duale $\tilde{\Psi}$. Moyennant les hypothèses d'estimations directe et inverse pour l'AMR \tilde{V}_j avec $X = L^{p'}$, $Y = W^{\tilde{m}(p'),p'}$ on obtient l'équivalence de normes

$$\|f\|_{B_{p',q'}^s} \sim \left\| \left(2^{sj} 2^{d(\frac{1}{2} - \frac{1}{p'})j} \langle f, \Psi_j \rangle \right)_{j \geq -1} \right\|_{l^{q'}(l^{p'})} \quad (1.53)$$

pour tout $0 < s < \tilde{m}(p')$ et $q' \in [1, +\infty]$.

Par dualité, on peut facilement déduire une équivalence de norme pour la décomposition dans la base primale sur les espaces duaux topologiques $(B_{p',q'}^s)'$. Sur \mathbb{R}^n on écrit généralement $B_{p,q}^{-s} := (B_{p',q'}^s)'$ qui est un espace de distributions. Sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ la notation $B_{p,q}^{-s}$ est réservée au dual topologique de la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $B_{p',q'}^s$ qui est alors un espace de distributions, ce qui n'est pas le cas de $(B_{p',q'}^s)'$. Ceci nécessite d'incorporer les conditions aux limites ad-hoc pour les espaces \tilde{V}_j et sera traité ci-dessous.

Théorème 1.3 *Si la décomposition en ondelettes duales vérifie l'équivalence de norme (1.53) alors la décomposition en ondelettes primales caractérise les espaces*

deux topologiques

$$\|T\|_{(B_{p',q'}^s)'} \sim \left\| \left(2^{-sj} 2^{d(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})j} \langle T, \tilde{\Psi}_j \rangle \right)_{j \geq -1} \right\|_{l^q(l^p)} \quad (1.54)$$

pour tout $0 < s < \tilde{m}(p')$ et $q \in [1, +\infty]$.

Preuve. Pour $f \in B_{p',q'}^s$, soit $F_j = \langle f, \Psi_j \rangle$, de sorte que $f = \sum_{j \geq -1} F_j^T \tilde{\Psi}_j$ et

$$\langle T, f \rangle = \sum_{j \geq -1} \left(2^{sj} 2^{d(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})j} F_j \right)^T \left(2^{-sj} 2^{d(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})j} \langle T, \tilde{\Psi}_j \rangle \right).$$

Par la dualité des espaces $l^{q'}(l^{p'})$ et $l^q(l^p)$ on déduit que

$$\sup \left\{ \langle T, f \rangle : \left\| \left(2^{sj} 2^{d(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})j} F_j \right)_{j \geq -1} \right\|_{l^{q'}(l^{p'})} = 1 \right\} = \left\| \left(2^{-sj} 2^{d(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})j} \langle T, \tilde{\Psi}_j \rangle \right)_{j \geq -1} \right\|_{l^q(l^p)}$$

ce qui prouve le théorème. \square

Le Corollaire 1.1 et le théorème précédent ne couvrent pas le cas $s = 0$. Néanmoins celui-ci se déduit par interpolation en écrivant que $B_{p,q}^0 = [B_{p,q}^{-\varepsilon}, B_{p,q}^{\varepsilon}]_{1/2,q}$. En particulier on obtient la propriété de base de Riesz pour Ψ et $\tilde{\Psi}$, où l'on voit que l'on a utilisé la régularité H^ε des AMR primale et duale pour $\varepsilon > 0$. En revanche le cadre Besov ne traite pas la caractérisation des espaces L^p pour $p \neq 2$ dans la mesure où $B_{p,p}^0 \neq L^p$. Il est bien connu que les espaces L^1 et L^∞ n'admettent pas de bases inconditionnelles. Pour $1 < p < +\infty$, il faut avoir recours aux espaces de Lizorkin $F_{p,q}^s$ pour lesquels $W^{m,p} = F_{p,2}^m$ pour m entier et qui donnent lieu à une équivalence de norme de type $L^p(l^q)$ au lieu de $l^q(L^p)$ dans le cas des espaces de Besov (voir [81]).

Cas des projecteurs instables dans L^p

Le Corollaire 1.1 suppose la stabilité uniforme des projecteurs P_j dans L^p . Dans le cadre du paragraphe 1.1.6 on sera amené à considérer des projecteurs instables dans L^2 quoique stable dans une norme plus forte comme par exemple H^1 . C'est en particulier le cas de l'exemple 2 de la base de Schauder. De même, les projecteurs biorthogonaux ne sont pas stables dans les espaces L^p pour $0 < p < 1$. Une première façon de contourner cette difficulté consiste à utiliser la stabilité uniforme des projecteurs dans un espace plus régulier $B_{p,p}^{s_0}$ et de dérouler le même mécanisme qu'au Théorème 1.2 en interpolant entre les espaces $B_{p,p}^{s_0}$ et $B_{p,p}^{s_1}$ pour $s_1 > s_0$.

Afin d'éviter la preuve de la stabilité uniforme dans $B_{p,p}^{s_0}$ des projecteurs on utilisera plutôt un mécanisme similaire présenté dans le § III de [26] qui contourne astucieusement cette difficulté. La preuve est rappelée pour la commodité du lecteur.

Théorème 1.4 *Pour p fixé dans $]0, +\infty]$, on suppose que pour des paramètres réels $0 \leq s_0 < s_1$ les projecteurs P_j vérifient l'estimation directe*

$$\|f - P_j f\|_{L^p} \lesssim 2^{-sj} \|f\|_{B_{p,p}^{s_0}}, \quad \forall s_0 < s < s_1, \quad (1.55)$$

et les espaces V_j l'estimation inverse

$$\|f_j\|_{B_{p,p}^s} \lesssim 2^{sj} \|f_j\|_{L^p}, \quad \forall s_0 < s < s_1, \quad \forall f_j \in V_j, \quad (1.56)$$

alors pour tout $s_0 < s < s_1$ et pour tout $q \in]0, +\infty]$

$$\|f\|_{B_{p,q}^s} \sim \|P_0 f\|_{L^p} + \|(2^{js} \|Q_j f\|_{L^p})_{j \in \mathbb{N}}\|_{l^q}. \quad (1.57)$$

Preuve. Soit $\mathcal{A}_{p,q}^s$ l'espace des fonctions de $B_{p,p}^{s_0}$ telles que

$$\|f\|_{\mathcal{A}_{p,q}^s} := \|P_0 f\|_{L^p} + \|(2^{js} \|Q_j f\|_{L^p})_{j \in \mathbb{N}}\|_{l^q}, \quad (1.58)$$

soit borné. De l'estimation directe (1.55) on déduit

$$B_{p,p}^s \subset \mathcal{A}_{p,+\infty}^s.$$

De l'estimation inverse (1.56) et pour $p \geq 1$ il vient

$$\begin{aligned} \|f\|_{B_{p,p}^s} &\leq \|P_0 f\|_{B_{p,p}^s} + \sum_{j \in \mathbb{N}} \|Q_j f\|_{B_{p,p}^s} \\ &\leq \|P_0 f\|_{L^p} + \sum_{j \in \mathbb{N}} 2^{sj} \|Q_j f\|_{L^p} \\ &\leq \|f\|_{\mathcal{A}_{p,1}^s}. \end{aligned}$$

Pour $0 < p < 1$, l'inégalité triangulaire est à remplacer par la μ inégalité triangulaire (1.41), de sorte que l'on obtient $\|f\|_{B_{p,p}^s} \leq \|f\|_{\mathcal{A}_{p,p}^s}$, soit dans tous les cas $\|f\|_{B_{p,p}^s} \leq \|f\|_{\mathcal{A}_{p,q_p}^s}$ avec $q_p = \min(p, 1)$. Il en résulte l'encadrement

$$\mathcal{A}_{p,q_p}^s \subset B_{p,p}^s \subset \mathcal{A}_{p,+\infty}^s$$

pour tout $s_0 < s < s_1$. Pour conclure il suffit d'interpoler entre t_1 et t_2 tels que $s_0 < t_1 < t_2 < s_1$ et d'invoquer que les espaces $B_{p,q}^s$ et $\mathcal{A}_{p,q}^s$ sont des espaces d'interpolations au sens où ils satisfont la propriété de réitération (1.38). Pour les espaces $\mathcal{A}_{p,q}^s$ cette propriété résulte, par le mécanisme de la démonstration du Théorème 1.2 (voir Appendice 1), des estimations directes et inverses et de la stabilité uniforme des projecteurs, propriétés qui en norme $\mathcal{A}_{p,q}^s$ sont immédiates. \square

Remarque 1.7 *Le théorème précédent permet a posteriori de prouver la stabilité uniforme des projecteurs P_j et les estimations directe et inverse en norme $B_{p,q}^s$ pour $s_0 < s < s_1$. Ces résultats sont en effet immédiats en norme $\mathcal{A}_{p,q}^s$ équivalente à la norme Besov.*

Exemple 2. Le projecteur interpolant P_j est défini pour les fonctions continues i.e. en dimension 1 en norme $W^{s,p}$ pour $1/p < s_0 < (p+1)/p$. Les estimations directes et inverses sont classiquement obtenues pour $s_1 \leq (p+1)/p$. On déduit du théorème que la décomposition en ondelettes caractérise les espaces de Besov pour $1/p < s < (p+1)/p$.

Conditions aux limites

En analyse numérique, on est amené à considérer des espaces de Besov ou de Sobolev incorporant dans leur définition des conditions aux limites homogènes d'ordre m sur le bord Γ du domaine Ω (ou de la variété) ou une partie Γ_D (de codimension 1) du bord. Ces espaces sont définis par complétion: pour m entier positif soit

$$\mathcal{D}(\Omega, \Gamma^D, m) = \left\{ f \in \mathcal{D}(\bar{\Omega}), |f(x)| \lesssim |\text{dist}(x, \Gamma^D)|^{m+1} \right\}.$$

Alors on note $B_{p,q}^s(\Omega, \Gamma^D, m)$ (resp. $W^{s,p}(\Omega, \Gamma^D, m)$) la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega, \Gamma^D, m)$ dans $B_{p,q}^s$ (resp. W_p^s).

Pour $s < 1/p$ et moyennant une hypothèse de régularité minimale sur le domaine Ω (par exemple Lipschitz), $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $B_{p,q}^s$ (resp $W^{s,p}$) de sorte que $B_{p,q}^s(\Omega, \Gamma^D, m) = B_{p,q}^s$ (resp. $W^{s,p}(\Omega, \Gamma^D, m) = W^{s,p}$).

D'autre part, pour tout $m > s - 1/p$ et par exemple $\Gamma^D = \Gamma$, il est équivalent de considérer la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ et l'on notera dans ce cas

$$B_{p,q,0}^s := B_{p,q}^s(\Omega, \Gamma^D, m) \text{ et } W_0^{s,p} := W^{s,p}(\Omega, \Gamma, m), \forall m > s - 1/p.$$

Il suffira donc de distinguer les valeurs entières de m telles que $0 \leq m \leq s - 1/p$.

Pour un domaine régulier ou régulier par morceaux, une définition équivalente repose sur les théorèmes de trace (voir par exemple [60]). Soit $\{\gamma_0^D, \dots, \gamma_m^D\}$ les dérivées normales d'ordre $k = 0, \dots, m$ sur le bord régulier Γ^D ou chacun des morceaux réguliers de ce bord. Cet opérateur, défini sur $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$, se prolonge de façon unique par le théorème de trace en un opérateur continu de $B_{p,q}^s$ dans $\prod_{k=0}^m B_{p,q}^{s-k-1/p}(\Gamma^D)$ pour tout $s > m + 1/p$. Alors pour $s > m + 1/p$, l'espace $B_{p,q}^s(\Omega, \Gamma^D, m)$ coïncide avec le noyau de l'opérateur $\{\gamma_0^D, \dots, \gamma_m^D\}$.

Pour appliquer les Théorèmes 1.1 et 1.2 à ces espaces fonctionnels il suffit de comprendre leurs propriétés d'interpolation. On a alors le Théorème suivant du § III de [26] qui se déduit de la définition comme noyau de l'opérateur de trace et de la propriété de foncteur de l'interpolation.

Théorème 1.5 *Si les réels $s_0 < s_1$ sont tous deux dans l'un des intervalles $]m + 1/p, +\infty[$, $]0, 1/p[$ ou $]l - 1 + 1/p, l + 1/p[$, $l = 1, \dots, m$, et si $s = (1 - \theta)s_0 + \theta s_1$, $\theta \in]0, 1[$, alors*

$$B_{p,q}^s(\Omega, \Gamma^D, m) = [W^{s_0,p}(\Omega, \Gamma^D, m), W^{s_1,p}(\Omega, \Gamma^D, m)]_{\theta,q}. \quad (1.59)$$

Les Théorèmes 1.1 et 1.2 s'appliquent alors directement. En particulier les espaces V_j doivent bien sûr satisfaire les conditions aux limites ad-hoc. Ces conditions aux limites peuvent aussi porter sur l'AMR duale (§1.1.5). Le Théorème 1.3 de dualité

appliqué aux espaces $B_{p',q',0}^s$ énonce alors la caractérisation des espaces de distributions $B_{p,q}^{-s}$.

Remarque 1.8 *Le Théorème 1.5 laisse en suspend les valeurs $s = l + 1/p$, $l = 0, \dots, m$. Pour ces dernières, les espaces obtenus par interpolation diffèrent des espaces $B_{p,q}^{l+1/p}(\Omega, \Gamma^D, m)$. Par exemple on distingue classiquement l'espace $H_0^{1/2} = H^{1/2}(\Omega, \Gamma, 0)$ de $H_{0,0}^{1/2} = [L^2, H_0^1]_{1/2,2}$.*

1.2 Ondelettes biorthogonales sur la droite réelle

On présente succinctement et sans preuve les bases de la construction générale en renvoyant à l'article [29] ainsi qu'à la référence [26] pour une présentation complète et les démonstrations. Dans un second temps, on introduit les exemples classiques qui seront utilisés en pratique par la suite.

La construction sur \mathbb{R} s'appuie sur des AMR biorthogonales $(V_j(\mathbb{R}), \tilde{V}_j(\mathbb{R}))$ engendrées par les translatées dilatées dyadiques d'un couple de fonctions de $L^2(\mathbb{R})$ $(\phi, \tilde{\phi})$ à supports compacts, vérifiant la propriété de biorthogonalité

$$\langle \phi(\cdot - k), \tilde{\phi} \rangle = \delta_k. \quad (1.60)$$

On définit donc

$$\begin{cases} V_j(\mathbb{R}) = S(\Phi_j), \Phi_j = \{\phi_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}}\phi(2^j \cdot - k), k \in \mathbb{Z}\} \\ \tilde{V}_j(\mathbb{R}) = S(\tilde{\Phi}_j), \tilde{\Phi}_j = \{\tilde{\phi}_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}}\tilde{\phi}(2^j \cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}, \end{cases} \quad (1.61)$$

où d'après la biorthogonalité (1.60) et l'hypothèse de supports compacts, les bases Φ_j et $\tilde{\Phi}_j$ constituent des bases de Riesz biorthogonales des espaces $V_j(\mathbb{R})$ et $\tilde{V}_j(\mathbb{R})$.

Les fonctions $(\phi, \tilde{\phi})$ seront définies comme solutions des équations d'échelle

$$\begin{cases} \phi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sqrt{2}h_n\phi(2x - n), \\ \tilde{\phi}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sqrt{2}\tilde{h}_n\tilde{\phi}(2x - n), \end{cases} \quad (1.62)$$

qui expriment la propriété d'emboîtement des espaces $V_j(\mathbb{R})$ et $\tilde{V}_j(\mathbb{R})$ et les normalisations $\int_{\mathbb{R}} \phi(x)dx = \int_{\mathbb{R}} \tilde{\phi}(x)dx = 1$. Les filtres H^j et \tilde{H}^j sont donc indépendants de j et "invariants" par translation

$$H_{k,m}^j = h_{m-2k}, \quad \tilde{H}_{k,m}^j = \tilde{h}_{m-2k} \quad (1.63)$$

et la biorthogonalité se traduit sur les filtres h et \tilde{h} par la relation canonique

$$\sum_{n \in \mathbb{Z}} h_n \tilde{h}_{n-2k} = \delta_k. \quad (1.64)$$

Il est facile de vérifier en outre que les filtres

$$G_{k,m}^j = g_{m-2k}, \quad \tilde{G}_{k,m}^j = \tilde{g}_{m-2k} \quad (1.65)$$

où $g_n = (-1)^n \tilde{h}_{1-n}$ et $\tilde{g}_n = (-1)^n h_{1-n}$ vérifient les relations de biorthogonalité (1.29). Les translatées entières, dilatées dyadiques des ondelettes mères

$$\begin{cases} \psi(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sqrt{2} g_n \phi(2x - n), \\ \tilde{\psi}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \sqrt{2} \tilde{g}_n \tilde{\phi}(2x - n), \end{cases} \quad (1.66)$$

engendrent donc des bases de Riesz biorthogonales

$$\Psi_j = \{\psi_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}} \psi(2^j \cdot - k), k \in \mathbb{Z}\} \text{ et } \tilde{\Psi}_j = \{\tilde{\psi}_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}} \tilde{\psi}(2^j \cdot - k), k \in \mathbb{Z}\}$$

des espaces complémentaires $W_j(\mathbb{R})$ et $\tilde{W}_j(\mathbb{R})$.

La difficulté de la construction réside dans la définition de fonctions d'échelle biorthogonales ϕ et $\tilde{\phi}$ suffisamment régulières, à supports compacts et telles que les espaces $V_j(\mathbb{R})$ et $\tilde{V}_j(\mathbb{R})$ satisfassent les propriétés d'approximation du Théorème 1.2. La méthode introduite dans [29] consiste à construire des filtres finis h et \tilde{h} vérifiant (1) la relation de biorthogonalité (1.64), (2) les conditions de type Strang et Fix (voir [91]) qui traduisent sur les filtres h (resp. \tilde{h}) la reproduction des polynômes de \mathbb{P}_{n-1} , $n \geq 1$ (resp. $\mathbb{P}_{\tilde{n}-1}$, $\tilde{n} \geq 1$) par les translatées entières de la fonction d'échelle ϕ (resp. $\tilde{\phi}$) vérifiant la relation d'échelle (1.62) et la normalisation $\int_{\mathbb{R}} \phi(x) dx = 1$ (resp. $\int_{\mathbb{R}} \tilde{\phi}(x) dx = 1$).

Il reste à formuler des conditions sur les filtres afin que les solutions (uniques dans \mathcal{D}') de (1.62) définissent des fonctions ϕ et $\tilde{\phi}$ dans $L^2(\mathbb{R})$. D'après les relations sur les filtres, elles vérifieront alors les relations de biorthogonalité (1.60) et leurs translatées entières reproduiront les polynômes \mathbb{P}_{n-1} et $\mathbb{P}_{\tilde{n}-1}$. Ces conditions (voir [29]) donnent en fait la régularité Sobolev des fonctions ϕ et $\tilde{\phi}$ et l'on notera

$$\tau(p) := \sup\{t \geq 0 : \phi \in W^{t,p}(\mathbb{R})\} \text{ si } \phi \in L^p(\mathbb{R})$$

celle de ϕ et de même $\tilde{\tau}(p)$ celle de $\tilde{\phi}$. On supposera toujours par la suite $\tau(2) = \tau > 0$ et $\tilde{\tau}(2) = \tilde{\tau} > 0$.

Remarque 1.9 *La propriété de support compact des fonctions d'échelle équivaut à la finitude des filtres $h = (h_n)_{n=-m_0, \dots, m_1}$ et $\tilde{h} = (\tilde{h}_n)_{n=-\tilde{m}_0, \dots, \tilde{m}_1}$ et de plus $\text{supp } \phi = [-m_0, m_1]$, $\text{supp } \tilde{\phi} = [-\tilde{m}_0, \tilde{m}_1]$.*

Remarque 1.10 *Les propriétés de reproduction des polynômes par les translatées entières des fonctions d'échelle se traduisent par les propriétés de moments nuls des ondelettes primales et duales.*

$$\int_{\mathbb{R}} x^\alpha \psi dx = 0, \quad \forall \alpha = 0, \dots, \tilde{n} - 1 \text{ et } \int_{\mathbb{R}} x^\alpha \tilde{\psi} dx = 0, \quad \forall \alpha = 0, \dots, n - 1. \quad (1.67)$$

Du lemme de Bramble Hilbert appliqué aux formes linéaires $\langle f, \psi_{j,k} \rangle$ et $\langle f, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle$ on en déduit les propriétés de compression des ondelettes qui relient la décroissance des coefficients d'ondelettes de f à la régularité locale de f .

$$\begin{cases} |\langle f, \psi_{j,k} \rangle| \lesssim 2^{-sj} 2^{-(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})j} \|f\|_{W^{s,p}(\text{Supp } \psi_{j,k})} \text{ pour tout } s \leq \tilde{n}, \\ |\langle f, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle| \lesssim 2^{-sj} 2^{-(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})j} \|f\|_{W^{s,p}(\text{Supp } \tilde{\psi}_{j,k})} \text{ pour tout } s \leq n. \end{cases} \quad (1.68)$$

Remarque 1.11 Les fonctions ϕ et $\tilde{\phi}$ ne sont en général pas définies explicitement par une formule analytique. L'équation d'échelle et les propriétés de reproduction des polynômes suffisent toutefois au calcul des quantités nécessaires à leur utilisation en calcul scientifique, comme par exemple les matrices de masse $\langle \phi_{j,k}, \phi_{j,k'} \rangle$ ou de rigidité $\langle \phi'_{j,k}, \phi'_{j,k'} \rangle$, les valeurs ponctuelles de $\phi^{(m)}$ aux points dyadiques $2^{-j}k$, $k \in \mathbb{Z}$, ou encore l'approximation par quadratures des produits scalaires $\langle f, \phi_{j,k} \rangle$. L'idée de base introduite dans [44] consiste à se ramener au calcul d'un vecteur propre (de dimension fixée indépendante de j) en exploitant la relation d'échelle. Moyennant l'écriture de conditions de normalisations exprimant la reproduction des polynômes, il est montré dans [44] que l'on détermine ainsi de façon unique la solution. Cette stratégie est en outre efficace et précise.

1.2.1 Ondelettes splines biorthogonales

Une fonction spline d'ordre n ou de degré $n - 1$, associée aux noeuds entiers est une fonction polynômiale de degré $n - 1$ sur chacun des intervalles $[k, k + 1)$, $k \in \mathbb{Z}$, et globalement de classe C^{n-2} (discontinue dans le cas $n = 1$). Une base est engendrée par les translatées entières des B-splines

$$\phi^n(x) = \chi_{[0,1]}^{*(n+1)}\left(x + \left[\frac{n}{2}\right]\right) \quad (1.69)$$

qui sont positives, symétriques en 0 pour n pair et en $1/2$ pour n impair, et de supports $[-\frac{n}{2}, n - \frac{n}{2}]$. Ces fonctions satisfont la relation d'échelle (1.62) associée au symbole

$$m_n(\omega) := \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_n h_n e^{-in\omega} = e^{i[\frac{n}{2}]\omega} \left(\frac{1 + e^{-i\omega}}{2}\right)^n. \quad (1.70)$$

D'après son caractère polynômial par morceaux ϕ^n génère un choix privilégié d'AMR $V_j(\mathbb{R})$, et il s'agit de construire une base d'ondelette associée. Sauf pour $n = 1$, qui correspond à l'exemple 1 (base de Haar), le complément orthogonal conduit à des bases d'ondelettes primales ou duales à supports non compacts. Il faut donc se résoudre à la biorthogonalité plus flexible et chercher un générateur biorthogonal $\tilde{\phi}$.

On désigne par $\tilde{n} - 1 \in \mathbb{N}$ le degré de reproduction polynômiale du générateur dual $\tilde{\phi}$. Dans [29], une famille à un paramètre de générateurs biorthogonaux de même

symétrie $\tilde{\phi}^{n,\tilde{n}}$, $n + \tilde{n}$ pair, est construite telle que, pour \tilde{n} suffisamment grand, $\tilde{\phi}^{n,\tilde{n}}$ soit dans $L^2(\mathbb{R})$.

Plus précisément, la régularité $\tilde{\tau}(\infty)$ des fonctions d'échelle duales $\tilde{\phi}^{n,\tilde{n}}$ est étudiée dans [29] où est démontrée la majoration $\tilde{\tau}(\infty) \geq 0.2\tilde{n} - 0.8n + 1.6$. Cette estimation est cependant assez grossière pour les petites valeurs de n . En particulier, à n fixé, les plus petites valeurs de \tilde{n} pour lesquelles $\tilde{\phi}^{n,\tilde{n}}$ est dans L^2 sont $\tilde{n} = 1, 2, 3, 6$ pour $n = 1, 2, 3, 4$. Noter aussi que $\tilde{\phi}^{1,\tilde{n}}$, $\tilde{n} = 3$ est dans H^s pour un $s > 1$, que $\tilde{\phi}^{1,\tilde{n}}$, $\tilde{n} = 5, 7$ sont dans H^s pour un $s > 2$ et que $\tilde{\phi}^{2,4}$ est dans H^s pour un $s > 1$.

1.2.2 Ondelettes orthogonales

Il est possible de définir une fonction d'échelle ϕ^{D,n_d} (engendrant les polynômes de degré $n_d - 1 \geq 0$) à support compact et orthogonale au sens où elle vérifie

$$\langle \phi^{D,n_d}, \phi^{D,n_d}(\cdot - k) \rangle = \delta_k.$$

Pour se faire il faut toutefois renoncer (sauf pour $n_d = 1$) au caractère polynômial par morceaux du générateur ϕ^{D,n_d} et en outre à ses propriétés de symétrie. Cette construction est due à Daubechies [50].

La régularité de ϕ^{D,n_d} vérifie la majoration $\tau(\infty) \geq 0.2n_d$. En outre $\phi^{D,3}$ est dans H^s pour un $s > 1$ et $\phi^{D,4}$ est dans H^s pour un $s > 2$.

1.2.3 Ondelettes interpolantes

Cette construction due à Donoho [56] généralise l'exemple 2 de la base hiérarchique à des ordres supérieurs. Une fonction d'échelle interpolante $\tilde{\phi}^{0,2\tilde{n}}$, $\tilde{n} \in \mathbb{N}^+$ peut se voir comme un cas limite d'un couple de générateurs biorthogonaux $(\phi^0, \tilde{\phi}^{0,2\tilde{n}})$ où $\phi^0 = \delta(= \chi_{[0,1]}^*$) est la distribution de Dirac en 0 (qui vérifie l'équation d'échelle $\delta(x) = \sqrt{2}\delta(2x)$) et $\tilde{\phi}^{0,2\tilde{n}}$ est continue. En d'autres termes

$$\tilde{\phi}^{0,2\tilde{n}}(k) = \delta_k, \quad k \in \mathbb{Z} \quad \text{et} \quad \tilde{\psi}^{0,2\tilde{n}} = \tilde{\phi}^{0,2\tilde{n}}(2 \cdot - 1).$$

Les bases $\tilde{\Phi}_j$ et $\tilde{\Psi}_j$ des espaces $\tilde{V}_j(\mathbb{R})$ et $\tilde{W}_j(\mathbb{R})$ sont toujours L^p -stables au sens du lemme 3.5 de l'Appendice 2, propriété qui s'obtient classiquement par un argument de locale indépendance linéaire (voir Appendice 4, lemme 3.7). Noter que l'ondelette $\tilde{\psi}^{0,2\tilde{n}}$ n'a plus de moments nuls mais que l'ondelette duale

$$\psi^{0,2\tilde{n}} = \sum_{m=-2\tilde{n}+1}^{2\tilde{n}-1} (-1)^m \tilde{h}_{1-m} \delta(x - m)$$

a $2\tilde{n}$ moments nuls.

Par application du Théorème 1.4 on montre, comme dans l'Appendice 2, la caractérisation des espaces de Besov par la décomposition en ondelettes interpolantes pour $\frac{1}{p} < s < \tilde{\tau}(p)$. La fonction d'échelle $\tilde{\phi}^{0,2}$ est la spline ϕ^2 (on retrouve l'exemple 2) de régularité $C^{1-\varepsilon}$, pour tout $\varepsilon > 0$ et $\tilde{\phi}^{0,4}$ est la fonction d'échelle de Deslauriers-Dubuc [51] de régularité $C^{2-\varepsilon}$ pour tout $\varepsilon > 0$.

1.2.4 Multiondelettes

Ce cadre généralise le précédent au cas où l'AMR $V_j(\mathbb{R})$ (et $\tilde{V}_j(\mathbb{R})$) est engendrée par plusieurs générateurs $\Phi^T = \{\phi^n, n = 1, \dots, N\}$ vérifiant une équation d'échelle matricielle $\Phi(x) = \sum_m H(m)\Phi(2x - m)$ et dont les translatés entières

$$\Phi_0 = \{\phi^n(\cdot - k), n = 1, \dots, N, k \in \mathbb{Z}\}$$

définissent une base de Riesz.

La plupart des résultats décrits dans le cadre des ondelettes biorthogonales s'étendent au cadre des multiondelettes biorthogonales. En particulier les conditions de Strang et Fix sont formulées dans [64], l'obtention des générateurs des espaces d'ondelettes est automatique en préservant la propriété de support compact des fonctions d'échelle, enfin l'analyse de la régularité est étendue dans [31].

Contrairement aux ondelettes sur \mathbb{R} , le cadre des multiondelettes permet la construction dans [57] de bases d'ondelettes orthogonales à supports compacts, polynômiales par morceaux, d'ordre arbitraire et de régularité C^0 ou C^1 . L'idée de base est la construction d'une AMR orthogonale V_j^{inter} telle que V_0^{inter} soit imbriqué (*intertwined*) entre les espaces V_0 et V_m d'une AMR de type spline (donc non orthogonale) V_j , pour un m fixé.

1.2.5 Pré-ondelettes

Etant donné une AMR V_j , cette terminologie s'applique aux bases d'ondelettes correspondant au choix des complémentaires orthogonaux

$$W_j = V_{j+1} \cap V_j^\perp$$

mais pour lesquelles on relâche la contrainte d'orthogonalité des bases Ψ_j des espaces W_j pour celle plus flexible de base de Riesz uniforme en j . L'avantage est de simplifier l'analyse de la stabilité L^2 de la base d'ondelettes Ψ en la réduisant à la construction d'une base de Riesz uniforme au sein d'un niveau fixé j . On peut ainsi, pour de nombreux choix d'AMR, obtenir des bases d'ondelettes à supports compacts. En revanche la base d'ondelettes duale $\tilde{\Psi}_j$ de W_j n'est pas en général à supports compacts.

En particulier, partant de l'AMR spline de générateur ϕ^n , Chui et Wang construisent dans [23] un générateur ψ^n à support compact et dont les translatées entières Ψ_0 engendrent une base de Riesz de W_0 .

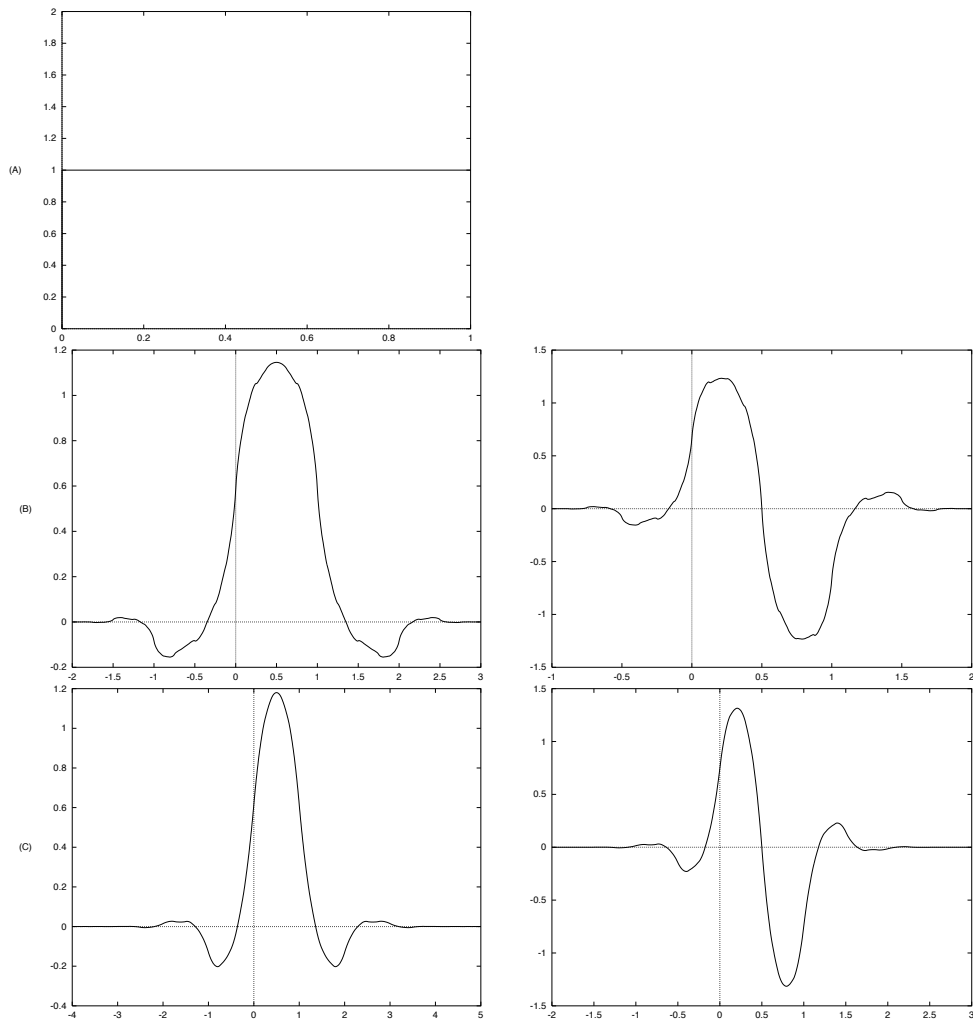
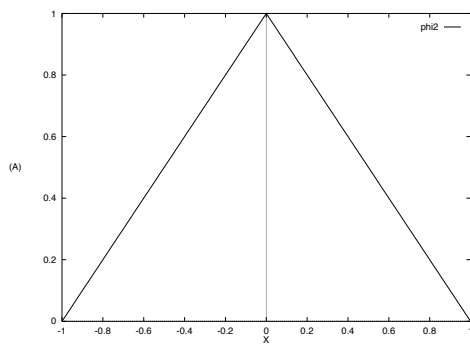


FIG. 1.4 – (A) Fonction d'échelle primaire ϕ^1 . (B) Fonction d'échelle et ondelette duales $\tilde{\phi}^{1,3}$ et $\tilde{\psi}^{1,3}$. (C) Fonction d'échelle et ondelette duales $\tilde{\phi}^{1,5}$ et $\tilde{\psi}^{1,5}$.



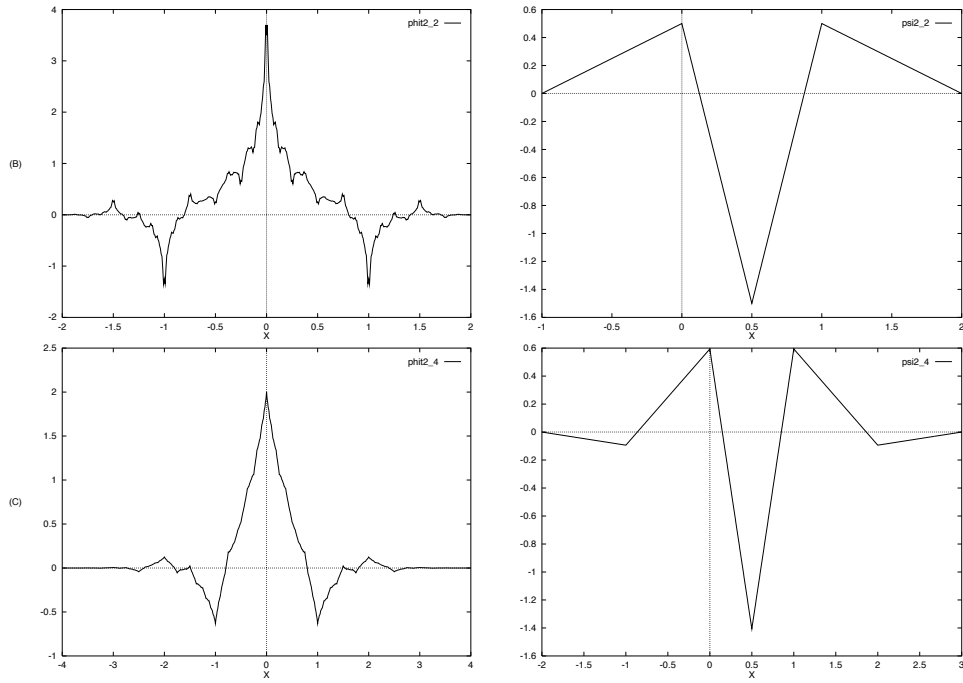
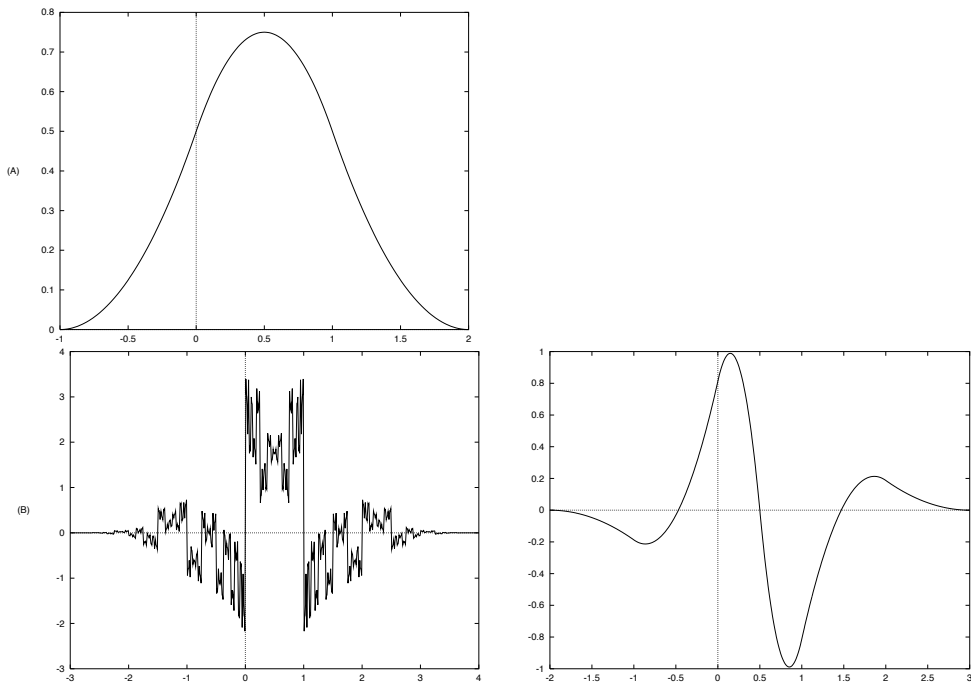


FIG. 1.5 – (A) Fonction d'échelle primale ϕ^2 . (B) Fonction d'échelle duale et ondelette primale $\tilde{\phi}^{2,2}$ et $\psi^{2,2}$. (C) Fonction d'échelle duale et ondelette primale $\tilde{\phi}^{2,4}$ et $\psi^{2,4}$.



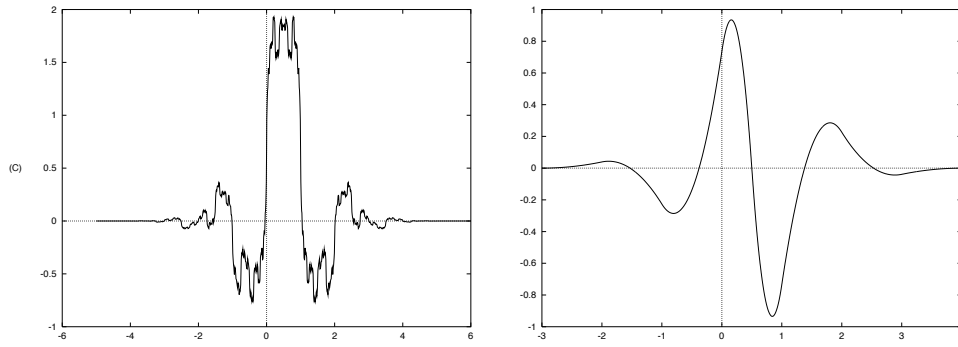


FIG. 1.6 – (A) Fonction d'échelle primale ϕ^3 . (B) Fonction d'échelle duale et ondelette primale $\tilde{\phi}^{3,3}$, $\psi^{3,3}$. (C) Fonction d'échelle duale et ondelette primale $\tilde{\phi}^{3,5}$, $\psi^{3,5}$.

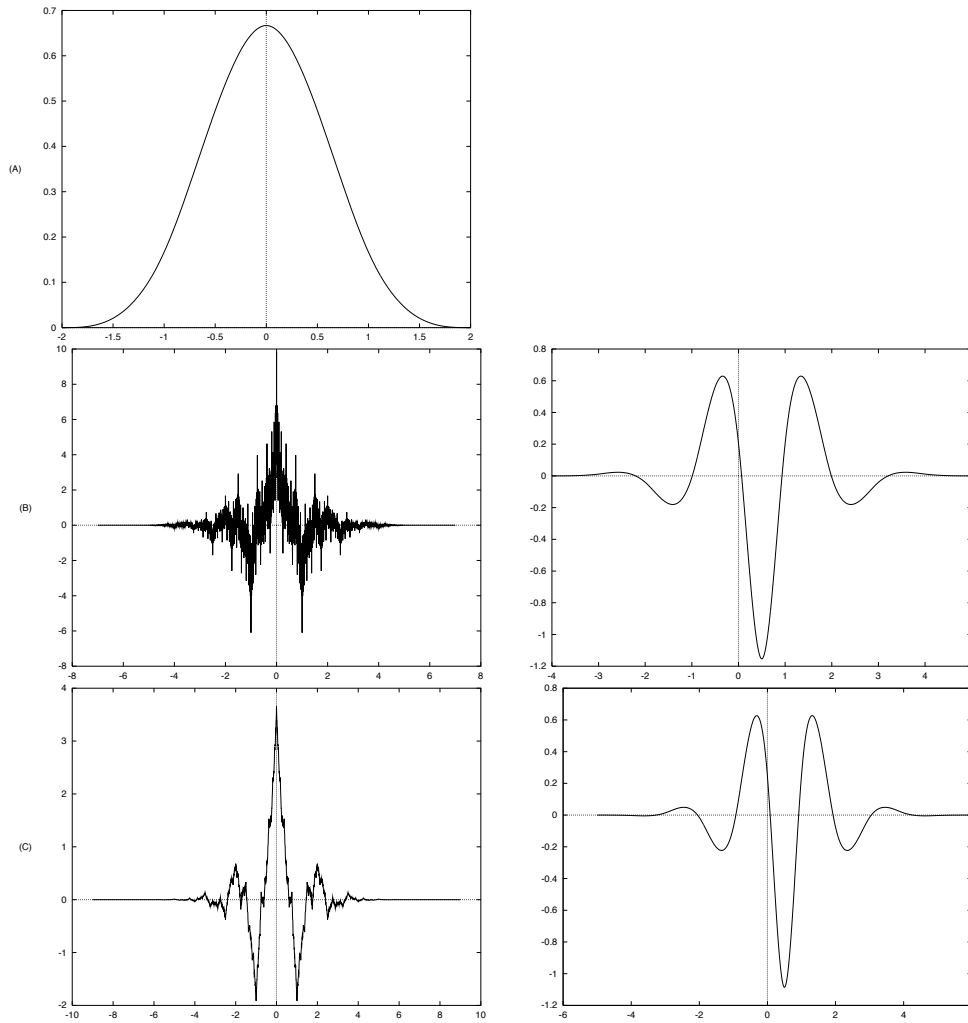


FIG. 1.7 – (A) Fonction d'échelle primale ϕ^4 . (B) Fonction d'échelle duale et ondelette primale $\tilde{\phi}^{4,6}$, $\psi^{4,6}$. (C) Fonction d'échelle duale et ondelette primale $\tilde{\phi}^{4,8}$, $\psi^{4,8}$.

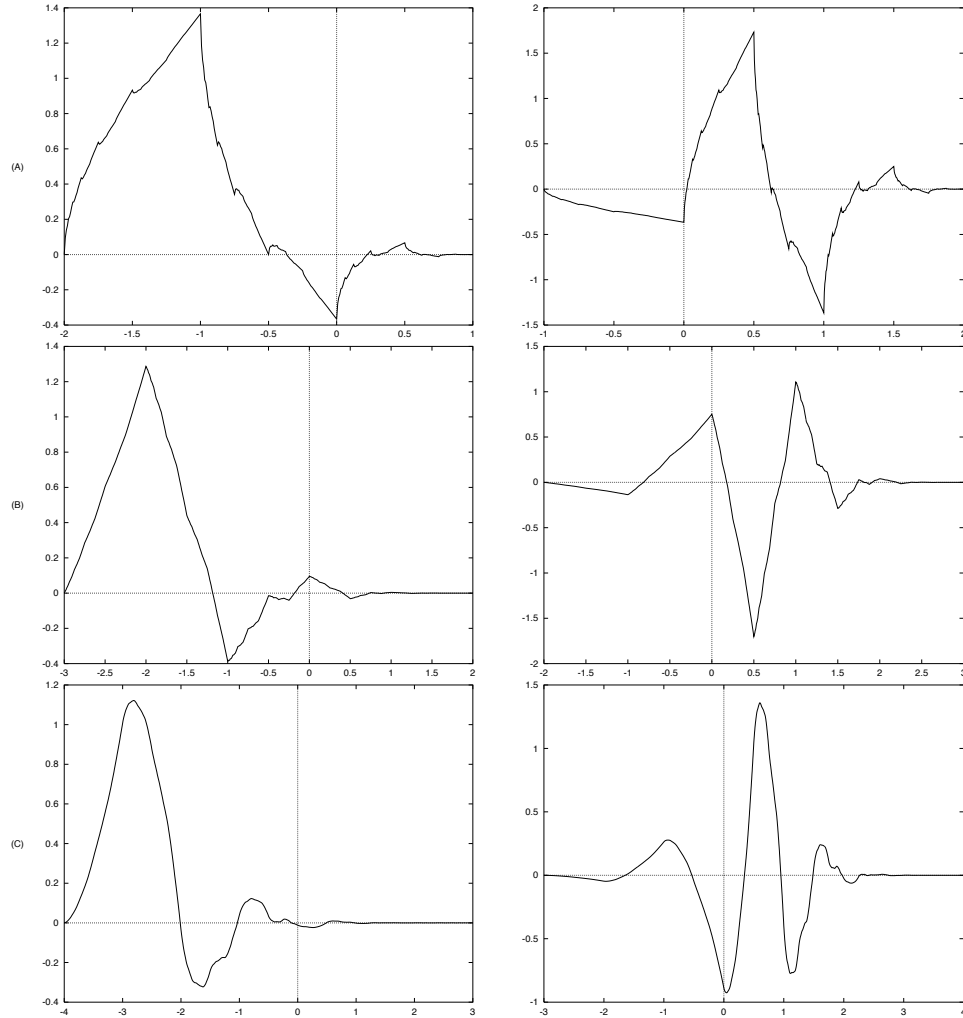


FIG. 1.8 – Fonctions d'échelles et ondelettes orthogonales à support compact de Daubechies ϕ^{D,n_d} , ψ^{D,n_d} . (A): $n_d = 2$, (B): $n_d = 3$, (C): $n_d = 4$.

1.3 Ondelettes biorthogonales sur l'intervalle

Soit un couple $(\phi, \tilde{\phi})$ de fonctions d'échelle biorthogonales à supports compacts $[-m_0, m_1]$ et $[-\tilde{m}_0, \tilde{m}_1]$, engendrant les AMR biorthogonales sur \mathbb{R} notées $V_j(\mathbb{R})$, $\tilde{V}_j(\mathbb{R})$, $j \in \mathbb{N}$. On reprend pour ce couple les notations et les hypothèses du § 1.2. En outre la notation $\phi_{j,k} = 2^{j/2}\phi(2^j \cdot -k)$ (et de même $\tilde{\phi}_{j,k} = 2^{j/2}\tilde{\phi}(2^j \cdot -k)$) sera réservée aux fonctions d'échelle sur \mathbb{R} , alors que les fonctions d'échelle sur l'intervalle seront notées comme au § 1.1 $\varphi_{j,k}$ et $\tilde{\varphi}_{j,k}$.

Définition 1.2 On appelle AMR biorthogonales sur l'intervalle $[0, 1]$ associées au

couple $(\phi, \check{\phi})$, une famille d'espaces $V_j, \tilde{V}_j, j \geq j_0 \geq 0$ tels que

(i) $V_j \subset V_{j+1}, \tilde{V}_j \subset \tilde{V}_{j+1}, j \geq j_0$

(ii) $V_j \subset V_j(\mathbb{R})|_{[0,1]}, \tilde{V}_j \subset \tilde{V}_j(\mathbb{R})|_{[0,1]}, j \geq j_0$

(iii) les espaces $(V_j, \tilde{V}_j), j \geq j_0$ vérifient les conditions *Inf-Sup* (1.25).

Il s'agit d'une définition minimale. On souhaite en outre préserver les ordres d'approximation n et \tilde{n} pour les espaces V_j et \tilde{V}_j . Ceci est naturel pour l'AMR primale V_j supposée par convention engendrer les espaces de fonctions d'essais dans les applications numériques. C'est aussi le cas de l'AMR duale \tilde{V}_j pour la raison suivante. On préserve ainsi le nombre de moments nuls des ondelettes primales Ψ_j qui gouverne en particulier les propriétés de compression des opérateurs dans la base Ψ (voir Appendice 3).

Enfin, on souhaite aussi pouvoir incorporer naturellement dans la définition des espaces V_j et \tilde{V}_j des conditions aux limites homogènes d'ordre m en 0 ou en 1.

Le choix naturel $V_j = V_j(\mathbb{R})|_{[0,1]}$ et $\tilde{V}_j = \tilde{V}_j(\mathbb{R})|_{[0,1]}$ vérifie bien les conditions (i) et (ii). En outre, ces espaces reproduisent les polynômes de degrés respectivement $n - 1$ et $\tilde{n} - 1$ et conservent donc les ordres d'approximation optimaux n et \tilde{n} . En revanche, sauf à considérer une AMR orthogonale $\phi = \check{\phi}$, il ne satisfait pas en général (iii) dans la mesure où ces espaces n'ont pas a priori même dimension. De plus, il ne permet pas de traiter les conditions aux limites et s'avère en pratique (dans le cas orthogonal) très instable du fait que les translatées des fonctions d'échelle, restreintes à l'intervalle $[0, 1]$, peuvent être quasi nulles.

L'idée introduite dans les articles de référence [30] et [2] consiste à ne retenir aux extrémités, dans la définition de V_j , que les combinaisons linéaires tronquées dans la base $\{\phi_{j,k}, k \in \mathbb{Z}\}$ des polynômes de degrés au plus $n - 1$. Ce choix s'avère vérifier la propriété d'emboîtement (i), en outre l'ordre d'approximation est naturellement préservé et l'incorporation des conditions aux limites s'effectue en se restreignant aux polynômes satisfaisant les dites conditions aux limites.

L'apport du travail présenté ci dessous, dont l'essentiel est publié dans [79], réside sur le plan théorique dans la généralisation de la construction de [30] et [2] dans le cas biorthogonal pour des ordres d'approximation optimaux n et \tilde{n} , des générateurs $(\phi, \check{\phi})$ et des conditions aux limites quelconques. Il faut signaler d'autres travaux poursuivant un objectif similaire au notre. En particulier la construction présentée dans [43] suit la même approche pour la définition des AMR biorthogonales mais l'obtention des bases d'ondelettes repose sur une technique de "stable completion" très différente de la notre. Citons aussi les travaux de [83] et [22] qui concernent le traitement des conditions aux limites homogènes dans le cadre des ondelettes orthogonales.

Sur le plan numérique, l'accent est mis sur l'étude du préconditionnement diagonal en base d'ondelettes (voir § 2.1) ainsi que sur les propriétés d'approximation en relation avec les adaptations aux bords. En particulier, pour le préconditionnement des opérateurs elliptiques en base d'ondelettes, le choix des ondelettes de base modifiées aux extrémités 0 et 1 s'avère crucial.

On expose au § 1.3.2 la construction des AMR biorthogonales sur l'intervalle et au § 1.3.3 la construction des bases d'ondelettes associées. Les modifications nécessaires à la prise en compte des conditions aux limites sont traitées au § 1.3.4. On finit ce chapitre par quelques exemples numériques au § 1.3.5. On présente en préalable au § 1.3.1 le procédé de périodisation des ondelettes sur la droite réelle qui nous servira de référence dans nos études numériques.

1.3.1 Périodisation

Un premier pas vers une construction sur l'intervalle $[0, 1]$ consiste à déduire des ondelettes sur \mathbb{R} une construction sur le cercle unité \mathbb{T} (voir [81]). On rappelle ce procédé ici dans la mesure où il nous sera utile ultérieurement.

L'idée est de substituer à la convention d'écriture du § 1.2

$$g_{j,k} := 2^{\frac{j}{2}} g(2^j x - k)$$

celle liée au procédé de périodisation

$$g_{j,k} := 2^{\frac{j}{2}} \sum_{l \in \mathbb{Z}} g(2^j(x+l) - k) \quad (1.71)$$

où g est une fonction à support compact.

Etant donné un couple de fonctions d'échelle biorthogonales $(\phi, \tilde{\phi})$, à supports compacts, il est facile de vérifier que les familles

$$\Phi_j = \{\phi_{j,k}, k \in \Delta_j\}, \tilde{\Phi}_j = \{\tilde{\phi}_{j,k}, k \in \Delta_j\}, \Delta_j = \{0, \dots, 2^j - 1\}$$

définissent des bases de Riesz biorthogonales des espaces qu'elles engendrent notés $V_j(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T})$ et $\tilde{V}_j(\mathbb{T}) \subset L^2(\mathbb{T})$. En outre les fonctions $\phi_{j,k}$ (et de même $\tilde{\phi}_{j,k}$) satisfont les relations d'échelle

$$\phi_{j,k} = \sum_{m \in \Delta_{j+1}} \left(\sum_{l \in \mathbb{Z}} h_{m-2k+2^j+1l} \right) \phi_{j+1,m}$$

à savoir que les nouveaux filtres sont déduits des filtres sur \mathbb{R} par 2^{j+1} -périodisation. Les espaces $V_j(\mathbb{T})$ et $\tilde{V}_j(\mathbb{T})$ définissent donc un couple d'AMR biorthogonales de $L^2(\mathbb{T})$ avec en outre les mêmes propriétés d'approximation que sur la droite réelle puisque la reproduction locale des polynômes de degré au plus $n-1$ et $\tilde{n}-1$ est préservée.

Les espaces d'ondelettes $W_j(\mathbb{T})$ et $\widetilde{W}_j(\mathbb{T})$ sont bien sûr engendrés par les bases biorthogonales

$$\Psi_j = \{\psi_{j,k}, k \in \Delta_j\}, \quad \check{\Psi}_j = \{\check{\psi}_{j,k}, k \in \Delta_j\}$$

et

$$\Psi = \Phi_0 \cup \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \Psi_j, \quad \check{\Psi} = \check{\Phi}_0 \cup \bigcup_{j \in \mathbb{N}} \check{\Psi}_j$$

sont des bases de Riesz duales de $L^2(\mathbb{T})$. Noter que d'après la propriété $\sum_{m \in \mathbb{Z}} \phi(x - m) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \check{\phi}(x - m) = 1$, on a $\Phi_0 = \check{\Phi}_0 = \{1\}$. Les théorèmes de caractérisation 3.2 et 3.3 (cf Appendice 2) s'énoncent sans changement.

Même si l'intérêt pratique des ondelettes sur \mathbb{T} est assez limité en analyse numérique, ce cadre servira pour nous de référence par rapport aux constructions sur des domaines plus généraux qui, en particulier, vont induire des perturbations au bord du domaine.

On peut toutefois déduire des ondelettes sur \mathbb{T} une première construction grossière sur l'intervalle $[0, 1]$ par le procédé de périodisation $f \rightarrow \sum_{k \in \mathbb{Z}} f(x - k)$ qui définit un isomorphisme de $H^s(]0, 1[)$ dans $H^s(\mathbb{T})$ pour $|s| < 1/2$. La limitation $s < 1/2$ traduit simplement le fait que la périodisation introduit artificiellement des discontinuités aux points entiers.

Ces ondelettes peuvent d'autre part être utilisées dans une approche où les conditions aux limites sont traitées séparément par multiplicateurs de Lagrange [71].

1.3.2 AMR biorthogonales sur $[0, 1]$

Pour un couple d'entiers positifs $\delta = (\delta_0, \delta_1)$, on définit les espaces $V_j^{\delta, int}$ engendrés par les fonctions d'échelle $\phi_{j,k}$ à supports dans l'intervalle $[2^{-j}\delta_0, 1 - 2^{-j}\delta_1]$ soit

$$V_j^{\delta, int} : = S(\Phi_j^{\delta, int}), \quad \Phi_j^{\delta, int} : = \left\{ \varphi_{j,k} = \phi_{j,k}, k = m_0 + \delta_0, \dots, 2^j - m_1 - \delta_1 \right\} \quad (1.72)$$

On va les compléter par les espaces engendrés par les décompositions tronquées des monômes x^α , $\alpha = 0, \dots, n - 1$ aux extrémités 0 et 1, i.e

$$V_j^{\delta_0, (0)} : = S(\Phi_j^{\delta_0, (0)}) \text{ et } V_j^{\delta_1, (1)} : = S(\Phi_j^{\delta_1, (1)})$$

où

$$\Phi_j^{\delta_0, (0)} : = \left\{ \varphi_{j,\alpha}^{\delta_0, (0)} = \sum_{k=-m_1+1}^{m_0-1+\delta_0} \langle x^\alpha, \check{\phi}_{0,k} \rangle \phi_{j,k}, \alpha = 0, \dots, n - 1 \right\}, \quad (1.73)$$

$$\Phi_j^{\delta_1, (1)} : = \left\{ \varphi_{j,\alpha}^{\delta_1, (1)} = \sum_{k=-m_0+1}^{m_1-1+\delta_1} \langle (-x)^\alpha, \check{\phi}_{0,-k} \rangle \phi_{j,2^j-k}, \alpha = 0, \dots, n - 1 \right\} \quad (1.74)$$

Proposition 1.5 *En supposant $\delta_\varepsilon \geq 1$, $\varepsilon = 0, 1$ pour le générateur B-spline $\phi = \phi^n$ et $\delta_\varepsilon \geq 0$, $\varepsilon = 0, 1$ pour tout autre choix de générateur, moyennant la condition de découplage des extrémités 0 et 1*

$$2^j > m_0 + m_1 + \delta_0 + \delta_1 - 2, \quad (1.75)$$

les espaces

$$V_j^\delta := V_j^{\delta_0, (0)} \oplus V_j^{\delta, int} \oplus V_j^{\delta_1, (1)} \quad (1.76)$$

sont des sous espaces de $V_j(\mathbb{R})|_{[0,1]}$ de dimension

$$\#\Delta_j = 2^j - m_1 - m_0 - \delta_0 - \delta_1 + 1 + 2n \geq 2n$$

et admettent pour base

$$\Phi_j^\delta = \Phi_j^{\delta_0, (0)} \cup \Phi_j^{\delta, int} \cup \Phi_j^{\delta_1, (1)}. \quad (1.77)$$

Preuve. Tout d'abord, la condition $2^j > m_0 + m_1 + \delta_0 + \delta_1 - 2$ de découplage des extrémités 0 et 1 exprime qu'il n'y a pas de recouvrement des indices k des fonctions $\phi_{j,k}$ dans la définition des bases $\Phi_j^{\delta_0, (0)}$ et $\Phi_j^{\delta_1, (1)}$, et donc les sommes (1.76) sont bien directes.

Il reste à montrer l'indépendance linéaire des fonctions de $\Phi_j^{\delta_0, (0)}$ et $\Phi_j^{\delta_1, (1)}$. Le raisonnement est le même aux deux bords, considérons par exemple le bord 0.

Les restrictions à $[0, 1]$ des fonctions $\phi_{j,k}$ pour $k = -m_1 + 1, \dots, m_0 - 1 + \delta_0$ étant trivialement linéairement indépendantes d'après les propriétés de leurs supports, la propriété est équivalente à l'indépendance linéaire des n vecteurs

$$V_\alpha = \{\langle x^\alpha, \tilde{\phi}_{0,k} \rangle, k = -m_1 + 1, \dots, m_0 - 1 + \delta_0\}^T, \alpha = 0, \dots, n - 1$$

En supposant $m_0 + m_1 + \delta_0 - 1 \geq n$, c'est aussi équivalent à l'indépendance linéaire des n polynômes de degré au plus $n - 1$

$$p_\alpha(k) = \langle x^\alpha, \tilde{\phi}_{0,k} \rangle.$$

Par récurrence sur α , partant de $p_0 = \int_{\mathbb{R}} \tilde{\phi}_{0,k}(x) dx = 1$, et par application de la formule du binôme, on montre facilement que les polynômes p_α sont exactement de degré α , ce qui permet de conclure.

Il reste à démontrer la propriété $m_0 + m_1 + \delta_0 - 1 \geq n$. La reproduction des polynômes de degré au plus $n - 1$ se traduit par les conditions de Strang et Fix à l'ordre n , soit pour des fonctions d'échelle, par les relations sur les filtres (cf. [26])

$$\sum_{k=-m_0}^{m_1} (-k)^\alpha h_k = 0, \quad \forall \alpha = 0, \dots, n - 1.$$

On en déduit qu'une fonction d'échelle ϕ reproduisant les polynômes de degré $n - 1$ à un support minimal de taille $m_0 + m_1 + 1 = n + 1$ et on vérifie que ce support minimal est atteint exactement pour la B-spline ϕ^n , ce qui montre l'assertion compte tenue de l'hypothèse $\delta_\varepsilon \geq 1$, $\varepsilon = 0, 1$ pour la B-spline. \square

Remarque 1.12 Pour la B-spline ϕ^n , on vérifie que $V_j^\delta = V_j(\mathbb{R})|_{[0,1]}$ quel que soit $\delta \in \{0, 1\}^2$. Dans ce cas, une base de cardinalité $\#\Delta_j = 2^j + n - 1$ est donc aussi définie par les restrictions à l'intervalle $[0, 1]$ des fonctions d'échelle $\phi_{j,k}^n$ pour $k = -n + [n/2] + 1, \dots, 2^j + [n/2] - 1$.

Remarque 1.13 La propriété d'invariance par dilatation des fonctions d'échelle de bord reste vrai au sens où elles vérifient

$$\varphi_{j+1,\alpha}^{\delta_0,(0)} = \sqrt{2}\varphi_{j,\alpha}^{\delta_0,(0)}(2\cdot) \text{ et } \varphi_{j+1,\alpha}^{\delta_1,(1)}(1 - \cdot) = \sqrt{2}\varphi_{j,\alpha}^{\delta_1,(1)}(2(1 - \cdot)) \quad (1.78)$$

D'autre part, dans le cas des générateurs splines biorthogonaux $(\phi^n, \tilde{\phi}^{n,\tilde{n}})$, les propriétés de symétrie paire (en 0 pour n pair et en $1/2$ pour n impair) de ϕ (et de même pour $\tilde{\phi}$) impliquent les relations de symétrie suivantes sur les fonctions d'échelle de bords

$$\varphi_{j,\alpha}^{\delta_1,(1)}(x) = \varphi_{j,\alpha}^{\delta_1,(0)}(1 - x), \quad \alpha = 0, \dots, n - 1. \quad (1.79)$$

En pratique, pour la famille des splines biorthogonales on considérera toujours $\delta_0 = \delta_1$ de façon à préserver la symétrie des fonctions d'échelle. La valeur commune sera alors notée δ .

On prouve maintenant la propriété d'emboîtement (i) des espaces V_j^δ , qui repose sur la propriété de reproduction des polynômes \mathbb{P}_{n-1} de l'AMR $V_j(\mathbb{R})$. La preuve proposée est issue de la référence [2].

Proposition 1.6 Les espaces V_j^δ sont emboîtés

$$V_j^\delta \subset V_{j+1}^\delta, \quad j \geq j_0. \quad (1.80)$$

Plus précisément $V_j^{\delta,int} \subset V_{j+1}^{\delta,int}$, $j \geq j_0$, et les fonctions d'échelle de bord satisfont les relations d'échelle

$$\begin{aligned} \varphi_{j,\alpha}^{\delta_0,(0)} &= \frac{2^{-\alpha}}{\sqrt{2}}\varphi_{j+1,\alpha}^{\delta_0,(0)} + \sum_{m=m_0+\delta_0}^{m_1+2m_0+2\delta_0-2} \sum_{k=-m_1+1}^{m_0+\delta_0-1} \langle x^\alpha, \tilde{\phi}_{0,k} \rangle h_{m-2k} \phi_{j+1,m} \\ \varphi_{j,\alpha}^{\delta_1,(1)} &= \frac{2^{-\alpha}}{\sqrt{2}}\varphi_{j+1,\alpha}^{\delta_1,(1)} + \sum_{m=m_1+\delta_1}^{m_0+2m_1+2\delta_1-2} \sum_{k=-m_0+1}^{m_1+\delta_1-1} \langle (-x)^\alpha, \tilde{\phi}_{0,-k} \rangle h_{2k-m} \phi_{j+1,2^j+1-m}, \end{aligned} \quad (1.81)$$

qui définissent les filtres modifiés aux bords H^ε , $\varepsilon = 0, 1$ comme matrices $n \times (m_0 + m_1 + \delta_\varepsilon - 1)$.

Preuve. La relation d'emboîtement $V_j^{\delta, \text{int}} \subset V_{j+1}^{\delta, \text{int}}$ résulte directement de la définition de $V_j^{\delta, \text{int}}$ comme sous espace de $V_j(\mathbb{R})$ des fonctions à supports dans l'intervalle $[2^{-j}\delta_0, 1 - 2^{-j}\delta_1]$. Il reste donc à prouver les relations d'échelle des fonctions d'échelle de bord. Par exemple considérons celles liées au bord 0.

On injecte la relation d'échelle sur \mathbb{R} $\phi_{j,k} = \sum_{m=-m_0}^{m_1} h_m \phi_{j+1, m+2k}$ dans la définition (1.73) des fonctions d'échelle de bord.

$$\varphi_{j,\alpha}^{\delta_0, (0)} = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{k \leq m_0 + \delta_0 - 1} \sum_{m \leq m_0 + \delta_0 - 1} h_{m-2k} \langle x^\alpha, \tilde{\phi}_{0,k} \rangle \phi_{j+1, m} |_{[0,1]} + \\ \sum_{m=m_0+\delta_0}^{m_1+2m_0+2\delta_0-2} (\sum_{k=-m_1+1}^{m_0+\delta_0-1} \langle x^\alpha, \tilde{\phi}_{0,k} \rangle h_{m-2k}) \phi_{j+1, m}. \end{array} \right. \quad (1.82)$$

Le second terme du membre de droite est par définition dans $V_{j+1}^{\delta, \text{int}}$. Pour traiter le premier on utilise la relation de recomposition sur \mathbb{R}

$$\tilde{\phi}_{1,m} = \sum_k h_{m-2k} \tilde{\phi}_{0,k} + \sum_k g_{m-2k} \tilde{\psi}_{0,k},$$

et les moments nuls des ondelettes duales $\tilde{\psi}_{0,k}$

$$\int_{\mathbb{R}} x^\alpha \tilde{\psi}_{0,k} = 0, \quad \alpha = 0, \dots, n-1,$$

qui traduisent la reproduction des polynômes \mathbb{P}_{n-1} par les translatées entières du générateur ϕ .

On déduit de ces relations que

$$\sum_{k \leq m_0 + \delta_0 - 1} h_{m-2k} \langle x^\alpha, \tilde{\phi}_{0,k} \rangle = \sum_{k \in \mathbb{Z}} h_{m-2k} \langle x^\alpha, \tilde{\phi}_{0,k} \rangle = \langle x^\alpha, \tilde{\phi}_{1,m} \rangle$$

quels que soient $m \leq m_0 + \delta_0 - 1$ et $\alpha = 0, \dots, n-1$, ce qui achève de prouver (1.81). \square

En définissant de même les espaces V_j^δ pour le générateur $\tilde{\phi}$ d'ordre \tilde{n} , on obtient ainsi deux familles d'AMR

$$V_j^\delta \subset V_{j+1}^\delta \quad \text{et} \quad \tilde{V}_j^\delta \subset \tilde{V}_{j+1}^\delta, \quad j \geq j_0.$$

vérifiant les propriétés (i) et (ii) de la Définition 1.2, reproduisant par construction les polynômes \mathbb{P}_{n-1} et $\mathbb{P}_{\tilde{n}-1}$ et munies en outre des bases locales Φ_j^δ et $\tilde{\Phi}_j^\delta$. Le niveau grossier j_0 est bien sûr choisi tel que

$$2^{j_0} > \max(m_0 + m_1 + \delta_0 + \delta_1 - 2, \tilde{m}_0 + \tilde{m}_1 + \tilde{\delta}_0 + \tilde{\delta}_1 - 2) \quad (1.83)$$

Il reste à vérifier les relations de *biorthogonalité* (iii) sous la forme des conditions inf-sup (1.25). Pour cela on considère les matrices carrées

$$\begin{aligned} M^0 &:= (\langle f_{j,k}^0, \tilde{f}_{j,k'}^0 \rangle)_{k,k'=0,\dots,\max(n,\tilde{n})-1}, \\ M^1 &:= (\langle f_{j,k}^1, \tilde{f}_{j,k'}^1 \rangle)_{k,k'=0,\dots,\max(n,\tilde{n})-1}, \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$f_{j,\alpha}^0 = \varphi_{j,\alpha}^{\delta_0,(0)} \text{ pour } \alpha = 0, \dots, n-1,$$

et

$$f_{j,k}^0 = \phi_{j,m_0+\delta_0+(k-n)} \text{ pour } k = n, \dots, \max(n, \tilde{n}) - 1$$

(si du moins $\tilde{n} > n$) et une définition analogue pour $f_{j,k}^1$, $\tilde{f}_{j,k}^0$ et $\tilde{f}_{j,k}^1$. Noter que par l'invariance d'échelle (cf. remarque 1.13), les matrices M^0 et M^1 sont indépendantes de j .

Proposition 1.7 *Soient δ et $\tilde{\delta}$ vérifiant les hypothèses de la proposition 1.5 et les conditions*

$$\begin{cases} m_0 + \delta_0 + -n = \tilde{m}_0 + \tilde{\delta}_0 - \tilde{n}, \\ m_1 + \delta_1 - n = \tilde{m}_1 + \tilde{\delta}_1 - \tilde{n}, \end{cases} \quad (1.84)$$

qui traduisent l'égalité des dimensions des AMR primale et duale en découplant en outre les extrémités 0 et 1. Alors les AMR V_j^δ et $\tilde{V}_j^{\tilde{\delta}}$, $j \geq j_0$, vérifient l'hypothèse (iii) de biorthogonalité si et seulement si les matrices M^0 et M^1 sont inversibles.

Preuve. Une condition nécessaire aux deux conditions inf-sup (1.25) est bien sûr l'égalité des dimensions des espaces V_j^δ et $\tilde{V}_j^{\tilde{\delta}}$. Celle-ci est satisfaite par les conditions (1.84) où en outre on a naturellement découpé les extrémités 0 et 1.

Montrons que l'inversibilité des matrices M^0 et M^1 est aussi une condition nécessaire. Tout d'abord, les conditions de découplage des extrémités 0 et 1 entraînent que

$$\#\Phi_j^\delta = \#\tilde{\Phi}_j^{\tilde{\delta}} \geq 2 \max(n, \tilde{n}).$$

On peut donc raisonner séparément sur les matrices M^0 et M^1 . Considérons par exemple celle associée au bord 0. Si celle-ci est singulière, alors il existe une fonction $f_j \in S(\{f_{j,k}^0, k = 0, \dots, \max(n, \tilde{n}) - 1\})$ orthogonale au sous espace engendré par $\{\tilde{f}_{j,k}^0, k = 0, \dots, \max(n, \tilde{n}) - 1\}$. Par les hypothèses de découplage et la biorthogonalité des fonctions d'échelle sur \mathbb{R} , f_j est en fait orthogonale à $\tilde{V}_j^{\tilde{\delta}}$, ce qui contredit (iii).

Il reste à prouver que ces conditions sont suffisantes. En raison des conditions (1.84), la matrice $\langle \Phi_j^\delta, \tilde{\Phi}_j^{\tilde{\delta}} \rangle$ découple en un bloc identité et les deux blocs carrés M^0 et M^1 aux extrémités 0 et 1. Ainsi en posant

$$\tilde{g}_{j,k}^0 = \sum_{k'=0}^{\max(n,\tilde{n})-1} (M^0)^{-T}_{k,k'} \tilde{f}_{j,k'}^0 \text{ et } \tilde{g}_{j,k}^1 = \sum_{k'=0}^{\max(n,\tilde{n})-1} (M^1)^{-T}_{k,k'} \tilde{f}_{j,k'}^1, \quad (1.85)$$

la nouvelle base de $\tilde{V}_j^{\tilde{\delta}}$

$$\tilde{\Phi}_j^{\tilde{\delta},*} = \left\{ \tilde{g}_{j,k}^0, \tilde{g}_{j,k}^1, k = 0, \dots, \max(n, \tilde{n}) - 1 \right\} \cup \tilde{\Phi}_j^{\tilde{\delta},*int} \quad (1.86)$$

où $\tilde{\delta}^* = \tilde{\delta} + \{\max(n, \tilde{n}) - \tilde{n}\}^2$, est biorthogonale à Φ_j^δ . Les bases Φ_j^δ et $\tilde{\Phi}_j^{\tilde{\delta},*}$ étant de plus locales (de supports de diamètres $\sim 2^{-j}$), et de normes uniformément bornées dans L^2 , ce sont en outre des bases de Riesz uniformes ce qui prouve la condition (iii) (cf preuve du lemme 3.5 dans l'Appendice 2). \square

Remarque 1.14 *Il n'existe pas de preuve générale de la non singularité des matrices M^0 et M^1 pour un couple quelconque de générateurs biorthogonaux $(\phi, \tilde{\phi})$. En revanche cette propriété est démontrée dans [43] pour la famille des splines biorthogonales. De plus ces conditions sont très faciles à tester numériquement pour un choix fixé de générateurs.*

Remarque 1.15 *On choisira en règle générale les paramètres δ et $\tilde{\delta}$ maximisant la dimension communes des espaces V_j^δ et $\tilde{V}_j^{\tilde{\delta}}$ de façon à optimiser le profil de l'erreur d'approximation (voir § 1.3.6 pour les expériences numériques).*

Remarque 1.16 Biorthogonalisation des fonctions d'échelle de bord *Le choix (1.85) de biorthogonalisation des fonctions d'échelle de bord n'est clairement pas le seul possible. Si l'on note K^ε et \tilde{K}^ε , $\varepsilon = 0, 1$, les matrices de changement de bases telles que*

$$\begin{cases} g_{j,k}^\varepsilon = \sum_{k'=0}^{\max(n,\tilde{n})-1} K_{k,k'}^\varepsilon f_{j,k'}^\varepsilon, \varepsilon = 0, 1, \\ \tilde{g}_{j,k}^\varepsilon = \sum_{k'=0}^{\max(n,\tilde{n})-1} \tilde{K}_{k,k'}^\varepsilon \tilde{f}_{j,k'}^\varepsilon, \varepsilon = 0, 1, \end{cases} \quad (1.87)$$

celles-ci doivent satisfaire les relations

$$K^\varepsilon M^\varepsilon (\tilde{K}^\varepsilon)^T = I, \varepsilon = 0, 1. \quad (1.88)$$

Le choix des matrices K^ε et \tilde{K}^ε , $\varepsilon = 0, 1$ s'avère crucial pour la stabilité numérique et le préconditionnement des matrices de masse et de rigidité en base d'ondelettes (voir § 2.1). Si l'on suppose que l'AMR primale V_j définit les espaces d'approximations, il est naturel de chercher à optimiser la stabilité dans L^2 des bases de Riesz Φ_j . Pour se faire, on imposera une condition du type

$$K^\varepsilon G^\varepsilon (K^\varepsilon)^T = I, \varepsilon = 0, 1 \quad (1.89)$$

où G^ε , $\varepsilon = 0, 1$ sont les matrices de masse des bases $f_{j,k}^\varepsilon$, $k = 0, \dots, \max(n, \tilde{n}) - 1$. Cette condition revient à orthogonaliser les bases de fonctions d'échelle de bords primales qui vérifient alors les relations $\langle g_{j,k}^\varepsilon, g_{j,k'}^\varepsilon \rangle = \delta_{k,k'}$, $\varepsilon = 0, 1$, $k, k' = 0, \dots, \max(n, \tilde{n}) - 1$.

Remarque 1.17 *Le conditionnement des matrices M^ε , $\varepsilon = 0, 1$ croît rapidement en pratique avec n et \tilde{n} , ce qui peut causer des instabilités numériques dans le calcul des filtres modifiés aux bords (après biorthogonalisation) H^ε et \tilde{H}^ε . Une idée simple*

consiste alors à remplacer, dans la définition des fonctions d'échelle de bord, les monômes x^α par une autre base de \mathbb{P}_{n-1} et $\mathbb{P}_{\tilde{n}-1}$. Dans [79], pour la famille des splines biorthogonales, on a testé numériquement le choix des polynômes de Lagrange aux noeuds entiers, qui améliore considérablement le conditionnement des matrices M^ε , $\varepsilon = 0, 1$, et permet toujours de traiter les conditions aux limites homogènes de Dirichlet (les conditions aux limites d'ordre supérieur impliqueraient le choix d'un noeud de type Hermite en 0 ou 1.)

1.3.3 Ondelettes biorthogonales sur $[0, 1]$

Il reste à construire des bases biorthogonales locales Ψ_j et $\tilde{\Psi}_j$ des espaces d'ondelettes $W_j = V_{j+1}^\delta \cap (\tilde{V}_j^\delta)^\perp$ et $\tilde{W}_j = \tilde{V}_{j+1}^\delta \cap (V_j^\delta)^\perp$. On définit ci-dessous le principe général de construction. On notera P_j et \tilde{P}_j les projecteurs associés aux AMR biorthogonales sur l'intervalle $(V_j^\delta, \tilde{V}_j^\delta)$.

- (1) On définit les espaces $W_j^{int} : = V_{j+1}^{\delta, int} \cap W_j(\mathbb{R})$ engendrés par la collection d'ondelettes sur \mathbb{R} à supports dans l'intervalle $[2^{-(j+1)}\delta_0, 1 - 2^{-(j+1)}\delta_1]$ notée

$$\Psi_j^{int} = \{\psi_{j,k} = 2^{\frac{j}{2}}\psi(2^j \cdot - k), k \in \nabla_j^{int}\}. \quad (1.90)$$

- (2) On construit une base complémentaire Ψ_j^\sharp de Φ_j^δ dans V_{j+1}^δ telle que

$$\Psi_j^\sharp = \Psi_j^{(0)} \cup \Psi_j^{int} \cup \Psi_j^{(1)} \quad (1.91)$$

où par un simple raisonnement sur la cardinalité et les supports, $\Psi_j^{(0)}$ et $\Psi_j^{(1)}$ seront constitués d'un nombre fixé, indépendant de j , de fonctions de V_{j+1}^δ localisées en 0 et 1.

- (3) Etape de correction grossière: la famille

$$\Psi_j = (I - P_j)\Psi_j^\sharp \quad (1.92)$$

définit donc une base d'ondelettes de W_j . En raison du choix de la base complémentaire (1.91), cette correction ne porte que sur un nombre fixé, indépendant de j de fonctions de bases localisées en 0 et 1.

- (4) Etape de biorthogonalisation. On construit de même $\tilde{\Psi}_j$ base d'ondelettes de \tilde{W}_j . Les corrections grossières étant locales, la matrice $\langle \Psi_j, \tilde{\Psi}_j \rangle$ découple en un bloc identité au centre et deux blocs carrés aux extrémités de dimensions fixées indépendantes de j . En invoquant le lemme 1.2, on voit que ces matrices N^0 et N^1 (de dimension notées $n_0 + 1$ et $n_1 + 1$) sont nécessairement inversibles. En procédant comme pour les bases de fonctions d'échelle (dans la preuve de la proposition 1.7), on obtient des bases biorthogonales locales de fonctions uniformément bornées dans L^2 qui sont donc des bases de Riesz uniformes. De surcroît seul un nombre fixé d'ondelettes, indépendant de j , localisées à chaque extrémité, diffèrent des ondelettes sur \mathbb{R} .

La difficulté de la construction réside dans la détermination des bases $\Psi_j^{(0)}$ et $\Psi_j^{(1)}$ vérifiant (1.91), qui est cependant une tâche bien plus aisée que la construction directe d'une base de W_j . On suit ici l'approche proposée dans [2] en l'adaptant au cadre biorthogonal général. En outre, la preuve de la propriété (1.91) présentée ici est nouvelle et plus concise.

Remarque 1.18 *L'ensemble d'indices ∇_j^{int} défini par (1.90) s'écrit*

$$\nabla_j^{int} = \{p_0, \dots, 2^j - p_1 - 1\} \quad (1.93)$$

où l'on a posé

$$p_\varepsilon = [(m_\varepsilon + \tilde{m}_{1-\varepsilon} + \delta_\varepsilon)/2], \quad \varepsilon = 0, 1. \quad (1.94)$$

On en déduit $\#\Psi_j^{(\varepsilon)} = p_\varepsilon$, $\varepsilon = 0, 1$.

Preuve. De la définition de ψ

$$\psi = \sum_{m=1-\tilde{m}_1}^{1+\tilde{m}_0} g_m \phi_{1,m}$$

on déduit facilement que le support de ψ s'écrit $[-s_0, s_1]$ où $2s_0 + 1 = m_0 + \tilde{m}_1$ et $2s_1 - 1 = \tilde{m}_0 + m_1$ sont des entiers impairs d'après la relation de biorthogonalité discrète

$$\sum_{n=-\tilde{m}_0}^{\tilde{m}_1} h_{n-2k} \tilde{h}_n = \delta_k.$$

De la définition de Ψ_j^{int} , il ressort que $p_0 = s_0 + [(\delta_0 + 1)/2]$ et $p_1 + 1 = s_1 + [(\delta_1 + 1)/2]$, ce qui montre la première assertion du lemme. La seconde repose sur le simple argument de cardinalité $\#\Psi_j^\sharp = \#\Psi_{j+1} - \#\Psi_j = 2^j$ et le découplage des extrémités 0 et 1. \square

Il reste donc à construire p_ε fonctions de V_{j+1}^δ localisées à chaque extrémité $\varepsilon = 0, 1$ (moyennant éventuellement une hypothèse supplémentaire de découplage) et qui complètent $\Phi_j^\delta \cup \Psi_j^{int}$. Du fait des relations d'échelle (1.81), il est équivalent de compléter $\Phi_j^{\delta, int} \cup \Psi_j^{int}$ dans $V_{j+1}^{\delta, int}$.

Tout d'abord, par la relation de recomposition

$$\phi_{j+1,m} = \sum_k \tilde{h}_{m-2k} \phi_{j,k} + \sum_k \tilde{g}_{m-2k} \psi_{j,k},$$

il est facile de vérifier que

$$S(\{\phi_{j+1,k}, k = t_0, \dots, 2^{j+1} - t_1 - 1\}) \subset S(\Phi_j^{\delta, int} \cup \Psi_j^{int}) \quad (1.95)$$

où l'on a posé $t_0 = 2m_0 + \tilde{m}_1 + 2\delta_0 - 1$ et $t_1 = 2m_1 + \tilde{m}_0 + 2\delta_1 - 2$. Ainsi, $V_{j+1}^{\delta, int}$ est engendré par $\Phi_j^{\delta, int} \cup \Psi_j^{int}$ et les fonctions d'échelle manquantes

$$\begin{aligned} & \{\phi_{j+1,k}, k = \tilde{m}_0 + \delta_0, \dots, t_0 - 1\} \text{ au bord } 0, \\ & \{\phi_{j+1,k}, 2^{j+1} - t_1, \dots, 2^{j+1} - m_1 - \delta_1\} \text{ au bord } 1. \end{aligned}$$

En fait il est démontré dans [2] qu'une base complémentaire est obtenue en ne retenant qu'une sur deux de ces fonctions d'échelle. On propose ci-dessous une nouvelle preuve de ce résultat.

Proposition 1.8 *Moyennant l'hypothèse de découplage $2^{j+1} - t_1 > t_0 - 1$ (i.e. $2^j > m_0 + m_1 + \delta_0 + \delta_1 - 2 + [(\tilde{m}_0 + \tilde{m}_1)/2]$), les bases*

$$\begin{aligned} \Psi_j^{(0)} &= \{\phi_{j+1, t_0 - 1 - 2\gamma}, \gamma = 0, \dots, p_0 - 1\}, \\ \Psi_j^{(1)} &= \{\phi_{j+1, 2^{j+1} - t_1 + 1 + 2\gamma}, \gamma = 0, \dots, p_1 - 1\}, \end{aligned}$$

complètent $\Phi_j^\delta \cup \Psi_j^{int}$ dans V_{j+1}^δ . Si de plus, $\tilde{h}_{\tilde{m}_1 - 1} \neq 0$ et $\tilde{h}_{-\tilde{m}_0 + 1} \neq 0$ on peut dans tous les cas poser

$$\begin{aligned} \Psi_j^{(0)} &= \{\phi_{j+1, m_0 + \delta_0 + 2\gamma}, \gamma = 0, \dots, p_0 - 1\} \\ \Psi_j^{(1)} &= \{\phi_{j+1, 2^{j+1} - m_1 - \delta_1 - 2\gamma}, \gamma = 0, \dots, p_1 - 1\}. \end{aligned}$$

Preuve. Noter tout d'abord que la nouvelle hypothèse de découplage ci-dessus entraîne toujours la validité de l'hypothèse de découplage de la définition des espaces V_j^δ , ainsi que $2^j \geq p_0 + p_1$. On peut donc écrire en conséquence la preuve de la proposition indépendamment aux deux extrémités. On considérera par exemple le bord 0.

Rappelons la définition de $\psi_{j,k}$ sur \mathbb{R}

$$\psi_{j,k} = \sum_{m=1-\tilde{m}_1}^{1+\tilde{m}_0} g_m \phi_{j+1, m+2k}. \quad (1.96)$$

Par définition de t_0 en (1.95), il existe un entier k_0 tel que

$$\psi_{j, k_0} = g_{1-\tilde{m}_1} \phi_{j+1, t_0} + \dots + g_{1+\tilde{m}_0} \phi_{j+1, 1+\tilde{m}_0+2k_0}$$

ou en d'autres termes $t_0 + \tilde{m}_1 - 1 = 2(m_0 + \tilde{m}_1 + \delta_0 - 1)$ est pair. D'autre part, si δ_0 est pair

$$\psi_{j, p_0} = g_{1-\tilde{m}_1} \phi_{j+1, m_0 + \delta_0} + \dots + g_{1+\tilde{m}_0} \phi_{j+1, 1+\tilde{m}_0+2p_0}$$

et si δ_0 est impair

$$\psi_{j, p_0} = g_{1-\tilde{m}_1} \phi_{j+1, m_0 + \delta_0 + 1} + \dots + g_{1+\tilde{m}_0} \phi_{j+1, 1+\tilde{m}_0+2p_0}.$$

Puisque $\psi_{j,k} \in \Psi_j^{int}$ pour tout $k = p_0, \dots, k_0$, il résulte de la définition (1.96), qu'en retenant une sur deux des fonctions d'échelle $\phi_{j+1,k}$ partant de $k = t_0 - 1$ à $k = m_0 + \delta_0$ si δ_0 est impair, et à $m_0 + \delta_0 + 1$ si δ_0 est pair, on engendre le sous espace localisé au bord 0 de l'espace quotient $V_{j+1}^{\delta, int} / (V_j^{\delta, int} \oplus W_j^{int})$. Il suffit donc de vérifier que se faisant l'on obtient exactement p_0 fonctions, ce qui est un calcul facile. Ceci achève la preuve de la première assertion, la seconde s'obtient facilement par (1.96). \square

Remarque 1.19 **Hypothèses de découplage et niveau grossier j_0 .** *La construction des bases d'ondelettes biorthogonales*

$$\Psi = \Phi_{j_0} \cup \bigcup_{j \geq j_0} \Psi_j \text{ et } \tilde{\Psi} = \tilde{\Phi}_{j_0} \cup \bigcup_{j \geq j_0} \tilde{\Psi}_j$$

nécessite la définition d'un niveau grossier j_0 vérifiant les conditions de découplage de la proposition 1.8 i.e. pour la première assertion (et légèrement mieux pour la seconde)

$$2^{j_0} > m_0 + m_1 + \delta_0 + \delta_1 - 2 + [(\tilde{m}_0 + \tilde{m}_1)/2] \text{ et } 2^{j_0} > \tilde{m}_0 + \tilde{m}_1 + \tilde{\delta}_0 + \tilde{\delta}_1 - 2 + [(m_0 + m_1)/2].$$

Si le niveau j_0 ci-dessus est strictement supérieur au niveau fondamental issu de la définition des espaces V_j^δ et \tilde{V}_j^δ , alors la construction ci-dessus des bases d'ondelettes ne s'applique pas aux niveaux manquants. Cette configuration, qui ne s'est pas présentée dans nos constructions, nécessite donc une construction particulière pour ces niveaux.

Remarque 1.20 **Choix des ondelettes de base aux bords 0 et 1.** *La remarque 1.16 sur la biorthogonalisation des fonctions d'échelle de bord s'applique aussi aux ondelettes de bord (cf étape (4)) pour lesquelles on imposera aussi la condition d'orthogonalité des ondelettes primales de bords suivante (l'AMR primale étant supposée définir l'espace d'approximation).*

$$\langle \psi_{j,\alpha}, \psi_{j,\beta} \rangle_{\alpha,\beta=0,\dots,n_0} = I, \quad \langle \psi_{j,2^j-\alpha-1}, \psi_{j,2^j-\beta-1} \rangle_{\alpha,\beta=0,\dots,n_1} = I.$$

Le bien fondé de ce choix sera confirmé par les résultats numériques du § 2.1 où l'on calculera les conditionnements des matrices de masse et de rigidité (après préconditionnement diagonal pour cette dernière) qui seront comparés au cas "idéal" des ondelettes périodiques.

1.3.4 Prise en compte des conditions aux limites

Soient les couples d'entiers

$$CL = (CL_0, CL_1) \text{ et } \tilde{CL} = (\tilde{CL}_0, \tilde{CL}_1)$$

tels que

$$-1 \leq CL_\varepsilon \leq n-1 \text{ et } -1 \leq \widetilde{CL}_\varepsilon \leq \tilde{n}-1.$$

On va décrire les adaptations nécessaires à la prise en compte des conditions aux limites homogènes aux extrémités 0 et 1 d'ordres CL pour l'AMR primaire notée $V_j^{\delta,CL}$ et \widetilde{CL} pour l'AMR duale $\widetilde{V}_j^{\delta,\widetilde{CL}}$, l'ordre -1 indiquant par convention l'absence de conditions aux limites.

- (1) Définition des espaces $V_j^{\delta,CL}$ (et de même $\widetilde{V}_j^{\delta,\widetilde{CL}}$): il suffit dans les définitions (1.73) et (1.74), de se restreindre aux monômes (ou tout autre base ad-hoc de polynômes) satisfaisant les conditions aux limites d'ordres CL.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_j^{\delta_0,CL_0,(0)} : = \left\{ \varphi_{j,\alpha}^{\delta_0,(0)} = \sum_{k=-m_1+1}^{m_0-1+\delta_0} \langle x^\alpha, \tilde{\phi}_{0,k} \rangle \phi_{j,k}, \alpha = CL_0 + 1, \dots, n-1 \right\} \\ \Phi_j^{\delta_1,CL_1,(1)} : = \left\{ \varphi_{j,\alpha}^{\delta_1,(1)} = \sum_{k=-m_0+1}^{m_1-1+\delta_1} \langle (-x)^\alpha, \tilde{\phi}_{0,-k} \rangle \phi_{j,2^j-k}, \right. \\ \left. \alpha = CL_1 + 1, \dots, n-1 \right\}. \end{array} \right. \quad (1.97)$$

Si $CL_\varepsilon = n-1$ on ne retient aucune fonction d'échelle de bord et on impose en outre $\delta_\varepsilon \geq 1$. Les propriétés (i) d'emboîtement et (ii) sont ainsi conservées (cf proposition 1.6) et les ordres d'approximation sont optimaux.

- (2) Egalisation des dimensions des AMR primales et duales en choisissant δ et $\tilde{\delta}$ tels que $\#\Phi_j^{\delta,CL} = \#\tilde{\Phi}_j^{\tilde{\delta},\widetilde{CL}}$. De surcroît on découple les deux bords ce qui conduit à poser les conditions

$$\left\{ \begin{array}{l} m_0 + \delta_0 - n + CL_0 = \tilde{m}_0 + \tilde{\delta}_0 - \tilde{n} + \widetilde{CL}_0, \\ m_1 + \delta_1 - n + CL_1 = \tilde{m}_1 + \tilde{\delta}_1 - \tilde{n} + \widetilde{CL}_1. \end{array} \right. \quad (1.98)$$

Les AMR $V_j^{\delta,CL}$ et $\widetilde{V}_j^{\tilde{\delta},\widetilde{CL}}$ satisfont alors l'hypothèse de biorthogonalité (iii) si et seulement si les matrices M^{0,CL_0} et M^{1,CL_1} définies ci-dessous sont inversibles, ce que l'on supposera toujours vérifié.

$$\begin{aligned} M^{0,CL_0,\widetilde{CL}_0} &= (\langle f_{j,k}^0, \tilde{f}_{j,k'}^0 \rangle)_{k,k'=0,\dots,\max(n-CL_0-1,\tilde{n}-\widetilde{CL}_0-1)-1}, \\ M^{1,CL_1,\widetilde{CL}_1} &= (\langle f_{j,k}^1, \tilde{f}_{j,k'}^1 \rangle)_{k,k'=0,\dots,\max(n-CL_1-1,\tilde{n}-\widetilde{CL}_1-1)-1} \end{aligned}$$

où

$$f_{j,\alpha}^0 = \varphi_{j,\alpha+CL_0+1}^{\delta_0,(0)}$$

pour $\alpha = 0, \dots, n - CL_0 - 2$, et

$$f_{j,k}^0 = \phi_{j,m_0+\delta_0+(k-n+CL_0+1)},$$

pour $k = n - CL_0 - 1, \dots, \max(n - CL_0 - 1, \tilde{n} - \widetilde{CL}_0 - 1) - 1$ (si du moins $n - CL_0 < \tilde{n} - \widetilde{CL}_0$), et une définition analogue de $f_{j,k}^1$, $\tilde{f}_{j,k}^0$ et $\tilde{f}_{j,k}^1$.

La preuve est immédiate du fait que, d'après les conditions (1.98), la matrice $\langle \Phi_j^{\delta,CL}, \tilde{\Phi}_j^{\tilde{\delta},\widetilde{CL}} \rangle$ découple en un bloc identité, et deux blocs carrés $M^{0,CL_0,\widetilde{CL}_0}$ et $M^{1,CL_1,\widetilde{CL}_1}$, indépendant de j aux extrémités 0 et 1.

- (3) Biorthogonalisation des bases de fonctions d'échelle selon la remarque 1.16.
- (4) Construction des bases d'ondelettes biorthogonales: la définition de la base complémentaire Ψ_j^\sharp est inchangée. En effet, celle-ci complète $\Phi_j^{\delta,int}$ dans $V_{j+1}^{\delta,int}$ et donc par les relations d'échelle (1.6) aussi $\Phi_j^{\delta,CL}$ dans $V_{j+1}^{\delta,CL}$ quelques soient les conditions aux limites CL. Les bases d'ondelettes Ψ_j et $\tilde{\Psi}_j$ sont obtenues par correction grossière

$$\Psi_j = (I - P_j)\Psi_j^\sharp \text{ et } \tilde{\Psi}_j = (I - P_j)\tilde{\Psi}_j^\sharp,$$

et l'étape de biorthogonalisation suit la remarque 1.20. In fine, seul un nombre fixé, indépendant de j , d'ondelettes à chaque bord diffère des ondelettes sur \mathbb{R} .

Il existe deux choix naturels de conditions aux limites "complémentaires" des AMR primales et duales. Supposons pour fixer les idées que l'on veuille incorporer des conditions aux limites d'ordre CL dans l'AMR primale V_j^δ .

Le premier choix consiste pour la duale à ne pas imposer de conditions aux limites i.e. à poser

$$\widetilde{CL} = (-1, -1). \quad (1.99)$$

Le second choix consiste à imposer des conditions aux limites symétriques i.e.

$$\widetilde{CL} = CL. \quad (1.100)$$

Le choix (1.99) permet de conserver les moments nuls des ondelettes primales Ψ au voisinage des extrémités. Cet aspect est important pour la compression des opérateurs dans la base Ψ (voir Appendice 3). Dans la même optique, mais d'un autre point de vue, il permet d'obtenir les propriétés d'approximation optimales du projecteur adjoint \tilde{P}_j , ce qui s'avère importer dans l'étude des algorithmes adaptatifs en bases d'ondelettes pour la compression du second membre dans la base duale (voir [28]).

Enfin, dans le cas des splines biorthogonales, il conduit, pour $n \geq 2$, à optimiser le profil d'erreur d'approximation dans $V_j^{\delta,CL}$ dans la mesure où c'est l'AMR duale qui impose la dimension maximale des espaces $V_j^\delta, \tilde{V}_j^{\tilde{\delta}}$ (voir § 1.3.6).

Malgré ces avantages incontestables, le choix symétrique (1.100) possède, pour les conditions aux limites de Dirichlet, des propriétés remarquables décrites ci-dessous (introduites dans [19] pour des générateurs continus et dans [34]). On considère les AMR biorthogonales

$$V_j^\delta \text{ et } \tilde{V}_j^{\tilde{\delta}}$$

ne satisfaisant aucune condition aux limites. En d'autres termes les paramètres δ et $\tilde{\delta}$ sont choisis tels que

$$m_\varepsilon + \delta_\varepsilon - n = \tilde{m}_\varepsilon + \tilde{\delta}_\varepsilon - \tilde{n}, \quad \varepsilon = 0, 1$$

et les matrices M^ε , $\varepsilon = 0, 1$ sont supposées inversibles. Pour fixer les idées, on considère des conditions aux limites de Dirichlet aux deux extrémités $CL = (0, 0)$. Dans la mesure où les deux bords sont traités séparément, les cas $CL = (0, -1)$ ou $(-1, 0)$ s'en déduisent immédiatement.

Proposition 1.9 *Soit $CL_D = (0, 0)$, on suppose que les AMR*

$$V_j^{\delta, CL_D} \text{ et } \tilde{V}_j^{\tilde{\delta}, CL_D}$$

satisfont la condition (iii) de biorthogonalité i.e. que les matrices $M^{\varepsilon, 0, 0}$, $\varepsilon = 0, 1$ sont inversibles. Alors, il existe des bases biorthogonales

$$\begin{cases} \Phi_j^\delta = \{\varphi_{j,k}, k = 0, \dots, \#\Delta_j - 1\} \\ \tilde{\Phi}_j^\delta = \{\tilde{\varphi}_{j,k}, k = 0, \dots, \#\Delta_j - 1\} \end{cases} \quad (1.101)$$

de $(V_j^\delta, \tilde{V}_j^{\tilde{\delta}})$ telles que

$$\begin{cases} \Phi_j^{\delta, CL_D} = \{\varphi_{j,k}, k = 1, \dots, \#\Delta_j - 2\} \\ \tilde{\Phi}_j^{\tilde{\delta}, CL_D} = \{\tilde{\varphi}_{j,k}, k = 1, \dots, \#\Delta_j - 2\}. \end{cases} \quad (1.102)$$

définissent des bases biorthogonales de V_j^{δ, CL_D} et $\tilde{V}_j^{\tilde{\delta}, CL_D}$. En outre, les filtres H^j de Φ_j^δ et \tilde{H}^j de $\tilde{\Phi}_j^\delta$ vérifient les propriétés suivantes, pour tout $k = 0, \dots, \#\Delta_j - 1$

$$\begin{cases} H_{k,0}^j = \frac{1}{\sqrt{2}}\delta_k^0, & H_{k, \#\Delta_j - 1}^j = \frac{1}{\sqrt{2}}\delta_k^{\#\Delta_j - 1}, \\ \tilde{H}_{k,0}^j = \frac{1}{\sqrt{2}}\delta_k^0, & \tilde{H}_{k, \#\Delta_j - 1}^j = \frac{1}{\sqrt{2}}\delta_k^{\#\Delta_j - 1}. \end{cases} \quad (1.103)$$

Preuve. La preuve est constructive et découple aux deux bords. On commence par biorthogonaliser les bases des espaces V_j^{δ, CL_D} et $\tilde{V}_j^{\tilde{\delta}, CL_D}$ aux extrémités 0 et 1. Soient Φ_j^{δ, CL_D} et $\tilde{\Phi}_j^{\tilde{\delta}, CL_D}$ un choix quelconque de telles bases biorthogonales. On cherche ensuite (par exemple au bord 0) les fonctions $\varphi_{j,0}$ et $\tilde{\varphi}_{j,0}$ sous la forme

$$\begin{cases} \varphi_{j,0} = \varphi_{j,0}^{\delta_0, (0)} + \sum_{k=1}^{\max(n, \tilde{n})-1} c_k \varphi_{j,k}, \\ \tilde{\varphi}_{j,0} = \tilde{c}_0 \tilde{\varphi}_{j,0}^{\tilde{\delta}_0, (0)} + \sum_{k=1}^{\max(n, \tilde{n})-1} \tilde{c}_k \tilde{\varphi}_{j,k} \end{cases} \quad (1.104)$$

et telles que $\langle \varphi_{j,0}, \tilde{\varphi}_{j,k} \rangle = \langle \varphi_{j,k}, \tilde{\varphi}_{j,0} \rangle = \delta_k^0$, $k = 0, \dots, \max(n, \tilde{n}) - 1$. Il vient immédiatement

$$c_k = -\langle \varphi_{j,0}^{\delta_0, (0)}, \tilde{\varphi}_{j,k} \rangle, \quad k = 1, \dots, \max(n, \tilde{n}) - 1$$

et le vecteur $(\tilde{c}_k, k = 0, \dots, \max(n, \tilde{n}) - 1)^T$ est solution du système carré

$$\begin{cases} \langle \tilde{\varphi}_{j,0}^{\tilde{\delta}_0, (0)}, \varphi_{j,k} \rangle \tilde{c}_0 + \tilde{c}_k = 0, & k = 1, \dots, \max(n, \tilde{n}) - 1, \\ \langle \tilde{\varphi}_{j,0}^{\tilde{\delta}_0, (0)}, \varphi_{j,0} \rangle \tilde{c}_0 = 1. \end{cases}$$

Ce système est nécessairement non dégénéré car la matrice M^0 est supposée inversible, ce qui prouve la première assertion. En particulier, $\langle \tilde{\varphi}_{j,0}^{\delta_0,(0)}, \varphi_{j,0} \rangle$ est non nul est donc aussi \tilde{c}_0 .

Les relations sur les filtres se déduisent facilement de (1.104), du fait que \tilde{c}_0 est non nul et des relations d'échelle de la proposition (1.6). \square

Proposition 1.10 *Avec les hypothèses et les notations de la proposition précédente, il existe des bases d'ondelettes biorthogonales Ψ_j et $\tilde{\Psi}_j$ des espaces $W_j = V_{j+1}^\delta \cap (\tilde{V}_j^\delta)^\perp$ et $\tilde{W}_j = \tilde{V}_{j+1}^\delta \cap (V_j^\delta)^\perp$*

$$\begin{cases} \Psi_j = \{\psi_{j,k}, k = 0, \dots, 2^j - 1\} \\ \tilde{\Psi}_j = \{\tilde{\psi}_{j,k}, k = 0, \dots, 2^j - 1\} \end{cases} \quad (1.105)$$

telles que

$$\begin{cases} \Psi_j^{\text{CLD}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{j,0} - \varphi_{j,0}), \psi_{j,k}, k = 1, \dots, 2^j - 2, \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{j,2^j-1} - \varphi_{j,\#\Delta_j-1}) \right\} \\ \tilde{\Psi}_j^{\text{CLD}} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{\psi}_{j,0} - \tilde{\varphi}_{j,0}), \tilde{\psi}_{j,k}, k = 1, \dots, 2^j - 2, \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{\psi}_{j,2^j-1} - \tilde{\varphi}_{j,\#\Delta_j-1}) \right\} \end{cases} \quad (1.106)$$

définissent des bases biorthogonales des espaces d'ondelettes

$$W_j^{\text{CLD}} = V_{j+1}^{\delta, \text{CLD}} \cap (\tilde{V}_j^{\delta, \text{CLD}})^\perp \quad \text{et} \quad \tilde{W}_j^{\text{CLD}} = \tilde{V}_{j+1}^{\delta, \text{CLD}} \cap (V_j^{\delta, \text{CLD}})^\perp.$$

Preuve. Il résulte du lemme 1.2 que les espaces W_j et \tilde{W}_j sont biorthogonaux. En d'autres termes, les matrices de bord N^0 et N^1 de l'étape (4) du § 1.3.3 sont inversibles. On va prouver que les espaces $W_j^0 = W_j \cap V_{j+1}^{\delta, \text{CLD}}$ et $\tilde{W}_j^0 = \tilde{W}_j \cap \tilde{V}_{j+1}^{\delta, \text{CLD}}$ sont des sous espaces de codimension 2 de W_j et \tilde{W}_j et en outre biorthogonaux (i.e. les sous matrices $N^{0, \text{CLD}}$ et $N^{1, \text{CLD}}$ de N^0 et N^1 sont inversibles).

Supposons ce résultat dans un premier temps. En raisonnant comme dans la preuve de la proposition 1.9, il existe donc des bases d'ondelettes biorthogonales (locales) Ψ_j et $\tilde{\Psi}_j$ (1.105) de W_j, \tilde{W}_j telles que les sous familles

$$\begin{cases} \Psi_j^0 = \{\psi_{j,k}, k = 1, \dots, 2^j - 2\} \\ \tilde{\Psi}_j^0 = \{\tilde{\psi}_{j,k}, k = 1, \dots, 2^j - 2\} \end{cases} \quad (1.107)$$

définissent des bases biorthogonales des espaces W_j^0 et \tilde{W}_j^0 . En conséquence les filtres G^j et \tilde{G}^j , $\Psi_j = G^j \Phi_{j+1}^\delta$ et $\tilde{\Psi}_j = \tilde{G}^j \tilde{\Phi}_{j+1}^\delta$ vérifient pour tous $k = 1, \dots, 2^j - 2$

$$\begin{cases} G_{k,0}^j = G_{k,\#\Delta_{j+1}-1}^j = 0, \\ \tilde{G}_{k,0}^j = \tilde{G}_{k,\#\Delta_{j+1}-1}^j = 0. \end{cases} \quad (1.108)$$

En outre, montrons que les bases Ψ_j et $\tilde{\Psi}_j$ peuvent être choisies telles que

$$\begin{cases} G_{0,0} = G_{2^j-1, \#\Delta_{j+1}-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \\ \tilde{G}_{0,0} = \tilde{G}_{2^j-1, \#\Delta_{j+1}-1} = \frac{1}{\sqrt{2}}. \end{cases}$$

Compte tenu des relations (1.103) et (1.108), l'identité (1.30)

$$\sum_{k \in \Delta_j} H_{k,m}^j \tilde{H}_{k,m'}^j + \sum_{k \in \nabla_j} G_{k,m}^j \tilde{G}_{k,m'}^j = \delta_m^{m'}, \quad m, m' \in \Delta_{j+1}$$

écrite en $m = m' = 0$ et en $m = m' = \#\Delta_{j+1} - 1$ implique que

$$G_{0,0} \tilde{G}_{0,0} = \frac{1}{2} \text{ et } G_{2^j-1, \#\Delta_{j+1}-1} \tilde{G}_{2^j-1, \#\Delta_{j+1}-1} = \frac{1}{2}.$$

Il suffit donc de renormaliser $\psi_{j,0}$ par $\frac{1}{\sqrt{2}G_{0,0}}$ et $\tilde{\psi}_{j,0}$ par $\sqrt{2}G_{0,0} = \frac{1}{\sqrt{2}\tilde{G}_{0,0}}$ pour obtenir la propriété énoncée.

Il est alors facile de déduire que Ψ_j^{CLD} et $\tilde{\Psi}_j^{\text{CLD}}$ définissent des bases biorthogonales de W_j^{CLD} et \tilde{W}_j^{CLD} . En effet, d'après les propriétés sur les filtres $S(\Psi_j^{\text{CLD}}) \subset V_{j+1}^{\delta, \text{CLD}}$ et $S(\tilde{\Psi}_j^{\text{CLD}}) \subset \tilde{V}_{j+1}^{\delta, \text{CLD}}$. D'autre part, $S(\Psi_j^{\text{CLD}}) \perp \tilde{V}_{j+1}^{\delta, \text{CLD}}$ et $S(\tilde{\Psi}_j^{\text{CLD}}) \perp V_{j+1}^{\delta, \text{CLD}}$ et les bases sont clairement biorthogonales.

Il reste à prouver la codimension 2 et la biorthogonalité des sous espaces W_j^0 et \tilde{W}_j^0 . Par découplage des extrémités, on peut raisonner séparément sur les conditions aux limites en 0 et 1. Considérons par exemple le bord 0. Si $W_j \cap V_{j+1}^{\delta, (0, -1)} = W_j$, alors nécessairement toute fonction de $V_{j+1}^{\delta} \cap (\tilde{V}_j^{\delta})^\perp$ appartient à $V_{j+1}^{\delta, (0, -1)}$. Or, d'après les propriétés sur les filtres H^j et \tilde{H}^j , la fonction

$$\varphi_{j+1,0} - P_j \varphi_{j+1,0} = (1 - H_{0,0} \tilde{H}_{0,0}) \varphi_{j+1,0} + \dots = \frac{1}{2} \varphi_{j+1,0} + \dots \quad (1.109)$$

viole cette hypothèse, ce qui prouve la codimension 1 de $W_j \cap V_{j+1}^{\delta, (0, -1)}$ dans W_j . Pour prouver la biorthogonalité des espaces $W_j \cap V_{j+1}^{\delta, (0, -1)}$ et $\tilde{W}_j \cap \tilde{V}_{j+1}^{\delta, (0, -1)}$ il suffit classiquement de prouver que toute fonction f_{j+1} de $W_j \cap V_{j+1}^{\delta, (0, -1)}$ orthogonale à $\tilde{W}_j \cap \tilde{V}_{j+1}^{\delta, (0, -1)}$ est nulle (l'uniformité de la condition inf-sup étant alors immédiate, voir par exemple la preuve de la proposition 1.7). Or, une telle fonction f_{j+1} est automatiquement orthogonale à l'espace

$$\tilde{V}_j^{\delta} \oplus (\tilde{W}_j \cap \tilde{V}_{j+1}^{\delta, (0, -1)}) \oplus S(\{\tilde{\varphi}_{j+1,0}\})$$

qui, d'après (1.109) (écrit pour $\tilde{\varphi}_{j+1,0}$), est égal à \tilde{V}_{j+1}^{δ} et donc f_{j+1} est bien nulle. \square

Remarque 1.21 *Si les générateurs ϕ et $\tilde{\phi}$ sont continus, il est plus naturel de raisonner sur les valeurs aux extrémités des fonctions d'échelle au lieu de celles des*

filtres. Néanmoins, le résultat précédent s'applique sans l'hypothèse de continuité, quelques soient les générateurs de L^2 vérifiant les hypothèses de la proposition 1.9.

Remarque 1.22 Les résultats de la proposition 1.9 (et donc de la proposition 1.10) ne s'étendent pas aux ordres supérieurs $\text{CL}_0 \geq 1$ ou $\text{CL}_1 \geq 1$ au sens où il n'est en général pas possible de biorthogonaliser les bases Φ_j et $\tilde{\Phi}_j$ de façon à conserver la propriété de diagonalité (1.6) sur les filtres primaux et duaux des fonctions d'échelle $\varphi_{j,\alpha}^{\delta_0,(0)}$ et $\tilde{\varphi}_{j,\alpha}^{\tilde{\delta}_0,(0)}$.

1.3.5 Estimations directes et inverses

La reproduction locale des polynômes étant préservée, avec les conditions aux limites ad-hoc, l'obtention des estimations directes fait partie du folklore de la théorie de l'approximation et suit de près les démonstrations sur la droite réelle présentées en Appendice 2. Les estimations inverses se démontrent comme sur la droite réelle, de sorte que tous les résultats de l'Appendice 2 s'adaptent naturellement sur l'intervalle $[0, 1]$.

Les principales difficultés techniques concernent l'incorporation des conditions aux limites dans les estimations directes ainsi que les estimations directes pour $p < 1$. On renvoie dans tous les cas au § III de [26] pour une étude détaillée et on se contente de présenter les principaux résultats.

La stabilité dans L^p , des bases $\Phi_j^{\delta,\text{CL}}$ et $\tilde{\Phi}_j^{\tilde{\delta},\tilde{\text{CL}}}$ se démontre comme sur la droite réelle (voir le lemme 3.5 et la remarque 3.17 en Appendice 2). De même la stabilité dans L^p , $p \geq 1$ des projecteurs P_j, \tilde{P}_j , se démontre par les mêmes arguments de biorthogonalité et de localité des bases (voir le lemme 3.5). On en déduit les estimations inverses comme dans la preuve de la proposition 3.17 en Appendice 2.

Proposition 1.11 Soit $p \in [1, \infty]$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Sous l'hypothèse $\tau(p) > 0$, on a l'estimation inverse

$$\|f_j\|_{W^{s,p}} \lesssim 2^{js} \|f_j\|_{L^p}, \text{ pour tout } 0 \leq s < \tau(p) \text{ et } f_j \in V_j^{\delta,\text{CL}}. \quad (1.110)$$

On note $W_{\text{CL}}^{s,p}$ la fermeture dans $W^{s,p}$ des fonctions régulières satisfaisant les conditions aux limites d'ordres CL_0 en 0 et CL_1 en 1.

Proposition 1.12 Soit $p \in [1, \infty]$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. On considère le projecteur biorthogonal P_j associé aux AMR biorthogonales $V_j^{\delta,\text{CL}}$ et $\tilde{V}_j^{\tilde{\delta},\tilde{\text{CL}}}$, avec $-1 \leq \text{CL}_0, \text{CL}_1 \leq n - 1$. Sous les hypothèses $\phi \in L^p$ et $\tilde{\phi} \in L^{p'}$, on a les estimations directes

$$\|f - P_j f\|_{L^p} \lesssim 2^{-js} \|f\|_{W^{s,p}}, \text{ pour tout } 0 \leq s \leq n \text{ et } f \in W_{\text{CL}}^{s,p}. \quad (1.111)$$

Preuve. En l'absence de conditions aux limites, la preuve est identique à celle de la proposition 3.16 sur \mathbb{R} (voir Appendice 2). Dans le cas de conditions aux limites, il faut invoquer une version généralisée du théorème de Deny-Lions (voir § III [26] Théorème 33.1 et 33.2). \square

Le Corollaire 1.1 et le Théorème 1.3 de dualité s'appliquent directement moyennant, pour les conditions aux limites, le théorème d'interpolation 1.5 et les précautions d'usage pour les valeur $m + 1/p$, m entier.

Pour les valeurs $p < 1$, on se réfère à nouveau au chapitre III de [26]. Les résultats énoncés sur la droite réelle (Théorème 3.3) s'étendent naturellement sur l'intervalle $[0, 1]$ moyennant à nouveau quelques précautions pour la prise en compte des conditions aux limites.

1.3.6 Quelques résultats numériques

On propose quelques exemples numériques d'ondelettes biorthogonales sur l'intervalle $[0, 1]$. Les générateurs sont choisis parmi la famille des ondelettes splines biorthogonales ainsi que celle des ondelettes orthogonales à supports compacts de Daubechies. On considère en outre un exemple de multiondelettes splines orthogonales à supports compacts issu de [57].

Pour les ondelettes splines biorthogonales, les paramètres δ et $\tilde{\delta}$ seront toujours choisis tels que $\delta_0 = \delta_1$ et $\tilde{\delta}_0 = \tilde{\delta}_1$ afin de préserver leurs propriétés de symétrie. On notera donc dans ce cas $\delta = \delta_0 = \delta_1$ et $\tilde{\delta} = \tilde{\delta}_0 = \tilde{\delta}_1$. D'autre part, l'espace d'approximation pourra être généré soit par les fonctions splines ϕ^n , soit par leurs duales $\tilde{\phi}^{n, \tilde{n}}$.

On illustre dans ce paragraphe la construction des fonctions d'échelle et des ondelettes de bord, puis l'accent est mis sur les propriétés d'approximation des AMR sur l'intervalle, en particulier en relation avec les adaptations aux bords. L'étude de la stabilité des décompositions multiéchelles sera étudiée en détail sous l'angle du préconditionnement en bases d'ondelettes au § 2.1.

Fonctions d'échelle et ondelettes de bord

Exemple 1. On considère les ondelettes biorthogonales sur l'intervalle $[0, 1]$ obtenues à partir des générateurs sur \mathbb{R}

$$(\phi^1, \tilde{\phi}^{1, \tilde{n}}), \tilde{n} \text{ impair}$$

avec $\delta = 1$ et $\tilde{\delta} = 1$ et donc $\Delta_j = \nabla_j = \{0, \dots, 2^j - 1\}$. Les bases de fonctions d'échelle et les ondelettes sont adaptées (pour les conditions aux limites de Dirichlet) aux bords 0 et 1 selon les propositions 1.9 et 1.10. La biorthogonalisation des ondelettes de bords s'effectue dans le cadre de la remarque 1.20 appliquée à l'espace d'approximation $\tilde{V}_j^{\tilde{\delta}}$ d'ordre \tilde{n} .

Exemple 2. On considère les ondelettes biorthogonales sur l'intervalle $[0, 1]$ obtenues à partir des générateurs sur \mathbb{R}

$$(\phi^2, \tilde{\phi}^{2, \tilde{n}}), \quad \tilde{n} \geq 2 \text{ pair.}$$

avec $\delta = 1$ et $\tilde{\delta} = 0$ soit $\Delta_j = \{0, \dots, 2^j\}$ et $\nabla_j = \{0, \dots, 2^j - 1\}$. Les bases de fonctions d'échelle et d'ondelettes sont à nouveau adaptées pour les conditions aux limites de Dirichlet aux bords 0 et 1, et la biorthogonalisation des ondelettes de bords s'effectue selon la remarque 1.20 appliquée cette fois à l'espace d'approximation V_j^δ d'ordre 2.

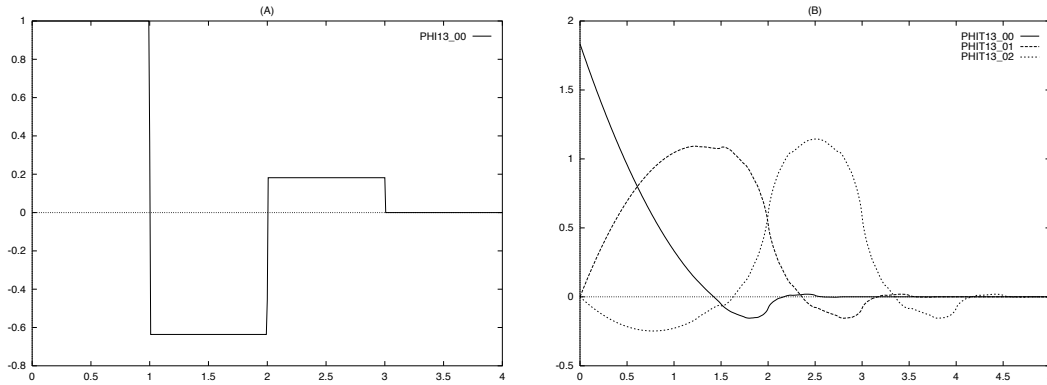
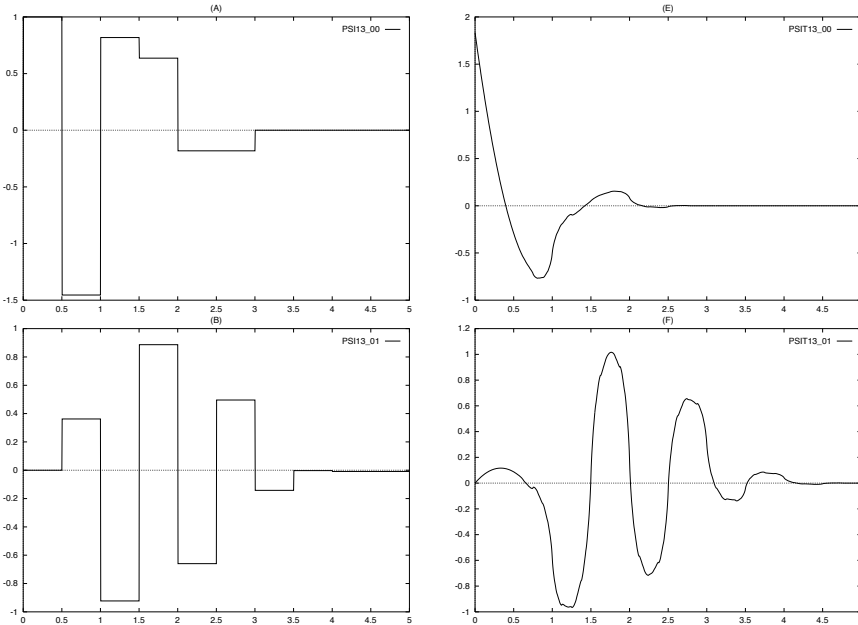


FIG. 1.9 – Pour les générateurs $(\phi^1, \tilde{\phi}^{1,3})$, fonctions d'échelle modifiées au bord 0: (A) $\varphi_{0,0}$, (B) $\tilde{\varphi}_{0,\alpha}$, $\alpha = 0, 1, 2$.



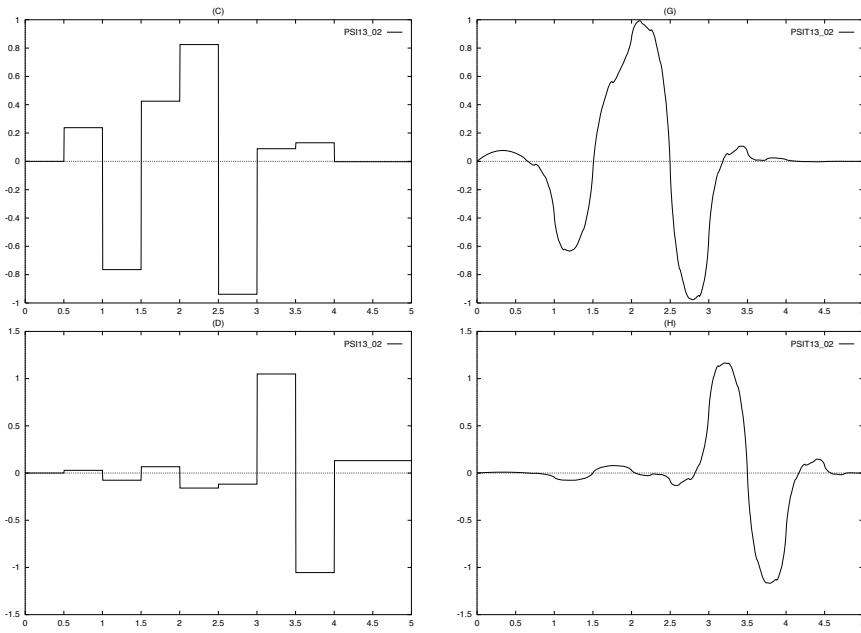


FIG. 1.10 – Pour les générateurs $(\phi^1, \tilde{\phi}^{1,3})$, ondelettes modifiées au bord 0: (A) $\psi_{0,0}$, (B) $\psi_{0,1}$, (C) $\psi_{0,2}$, (D) $\psi_{0,3}$, (E) $\tilde{\psi}_{0,0}$, (F) $\tilde{\psi}_{0,1}$, (G) $\tilde{\psi}_{0,2}$, (H) $\tilde{\psi}_{0,3}$.

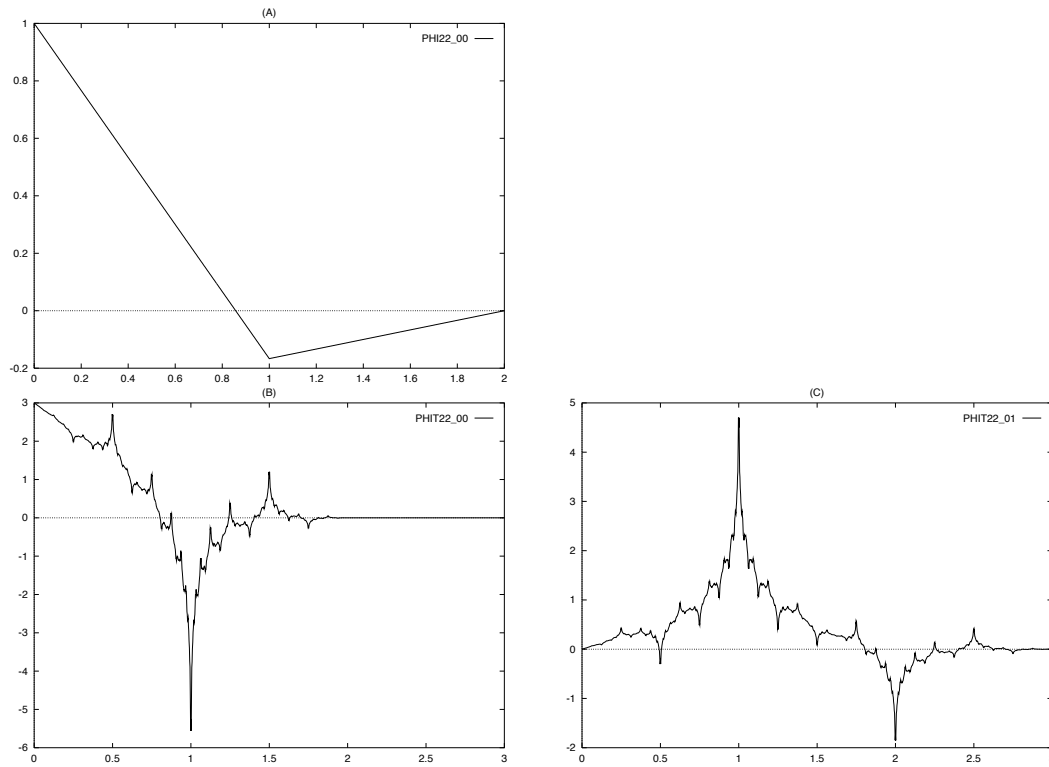


FIG. 1.11 – Pour les générateurs $(\phi^2, \tilde{\phi}^{2,2})$, fonctions d'échelle modifiées au bord 0: (A) $\varphi_{0,0}$, (B) $\tilde{\varphi}_{0,0}$, (C) $\tilde{\varphi}_{0,1}$.

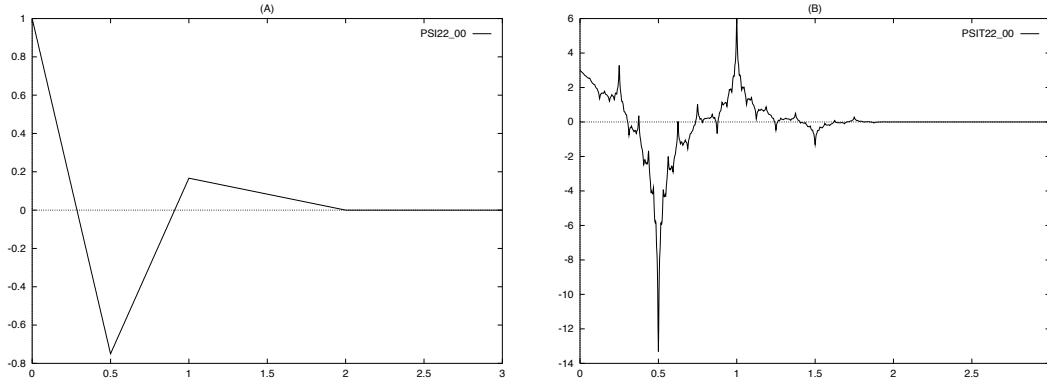


FIG. 1.12 – Pour les générateurs $(\phi^2, \tilde{\phi}^{2,2})$, ondelettes modifiées au bord 0: (A) $\psi_{0,0}$, (B) $\tilde{\psi}_{0,0}$.

Profils de l'erreur d'approximation des AMR sur l'intervalle

Ondelettes splines biorthogonales. L'utilisation des générateurs splines ϕ^n et $\psi^{n,\tilde{n}}$ est naturelle en analyse numérique par leur nature polynômiale et leurs remarquables propriétés d'approximation et de symétrie. Cependant, pour les splines de degré élevé (disons $n - 1 \geq 3$) plusieurs remarques viennent tempérer ces avantages.

- (1) Pour $n \geq 3$, la construction des AMR biorthogonales sur l'intervalle restreint la dimension optimale des espaces V_j^δ dans la mesure où c'est l'AMR duale qui impose la plus grande dimension. En l'absence de conditions aux limites, pour $n = 1$

$$\delta = \tilde{\delta} = 1 \text{ et } \#\Delta_j = 2^j,$$

et pour $n \geq 2$

$$\delta = n - 1, \tilde{\delta} = 0 \text{ et } \#\Delta_j = 2^j - n + 3,$$

à comparer à la dimension de $V_j|_{[0,1]}$ égale à $2^j + n - 1$. On perd donc pour $n \geq 2$, à chaque bord, $n - 2$ fonctions, ce qui se traduit par les profils d'erreurs présentés figure 1.13. Noter que dans tous les cas, l'ordre d'approximation n est par construction préservé.

- (2) Sur le plan de la stabilité (voir § 2.1), les conditionnements des matrices de masse en bases d'ondelettes se détériorent rapidement lorsque n augmente, même dans le cadre "idéal" des ondelettes périodiques. Il en est de même des matrices de rigidité d'opérateurs différentiels classiques tels que la dérivée seconde après préconditionnement par la diagonale en bases d'ondelettes.
- (3) L'exigence de régularité minimale de l'AMR duale entraîne un choix du paramètre \tilde{n} qui croît rapidement avec n . Par exemple (voir [29]), l'appartenance de l'AMR duale à L^2 a lieu asymptotiquement pour $\tilde{n} \sim 4n$. Ceci se traduit par des supports d'autant plus grands des ondelettes $\psi^{n,\tilde{n}}$

$$\text{diam}(\text{Supp } \phi^n) = n, \quad \text{diam}(\text{Supp } \psi^{n,\tilde{n}}) = n + \tilde{n} - 1.$$

Ces remarques conduisent à envisager d'utiliser (pour des ordres élevés) les fonctions d'échelle et ondelettes duales $\tilde{\phi}^{1,\tilde{n}}, \tilde{\psi}^{1,\tilde{n}}, \tilde{n} \geq 1$ impair (voire $\tilde{\phi}^{2,\tilde{n}}, \tilde{\psi}^{2,\tilde{n}}, \tilde{n} \geq 2$ pair) comme générateurs des espaces d'approximation. On vérifie figure 1.14 qu'en terme de profil d'erreur, ces générateurs se détériorent très peu lorsque l'ordre d'approximation \tilde{n} croît. Ceci s'interprète facilement dans la mesure où les fonctions d'échelle $\tilde{\phi}^{1,\tilde{n}}$ tendent lentement vers 0 alors que les splines s'annulent rapidement. Eliminer des fonctions de base aux bords est donc moins pénalisant sur l'erreur d'approximation dans le premier cas que dans le second.

D'autre part, on verra que le conditionnement des matrices de masse et de rigidité pour ce choix de générateur se détériore moins vite que pour les splines. Enfin les tailles des supports des ondelettes et des fonctions d'échelle sont données par

$$\text{diam}(\text{Supp } \phi^{1,\tilde{n}}) = 2\tilde{n} - 1, \quad \text{diam}(\text{Supp } \psi^{1,\tilde{n}}) = \tilde{n}$$

donc aussi plutôt avantageux.

En conclusion, les splines ont bien sûr l'avantage indéniable d'être des fonctions polynômiales, ce qui facilite considérablement leurs manipulations. Cependant, pour des ordres d'approximation $n \geq 4, 5$, les générateurs duaux sont néanmoins intéressant au regard des critères d'approximation, de supports et de stabilité.

Ondelettes orthogonales à supports compacts. Leur caractère très disymétrique et non analytique les rend incommodes d'utilisation en analyse numérique, où d'autre part l'orthogonalité est rarement un critère de choix. En particulier, le profil d'erreur figure 1.16 est en cohérence avec cette disymétrie des fonctions d'échelle ϕ^{D,n_d} . On exploitera néanmoins de façon surprenante cette disymétrie au chapitre III dans le cadre de la résolution du problème de Stokes.

Multiondelettes splines orthogonales C^0 . Si néanmoins on souhaite exploiter les propriétés d'orthogonalité des fonctions de base (par exemple dans des schémas explicites ou pour des opérateurs dégénérés du type $\mathcal{I} + \nu\mathcal{A}$, $\nu \ll 1$), il est préférable d'utiliser des multiondelettes splines orthogonales [57] (voir §1.2.4). Leur construction sur l'intervalle $[0, 1]$ à partir des ondelettes sur la droite est triviale et n'induit aucune perturbation quant au profil d'approximation présenté figure 1.17 pour l'ordre 4. Cependant leurs propriétés d'approximation sur la droite sont moins bonnes que les splines de même ordre pour un même nombre de fonctions de base.

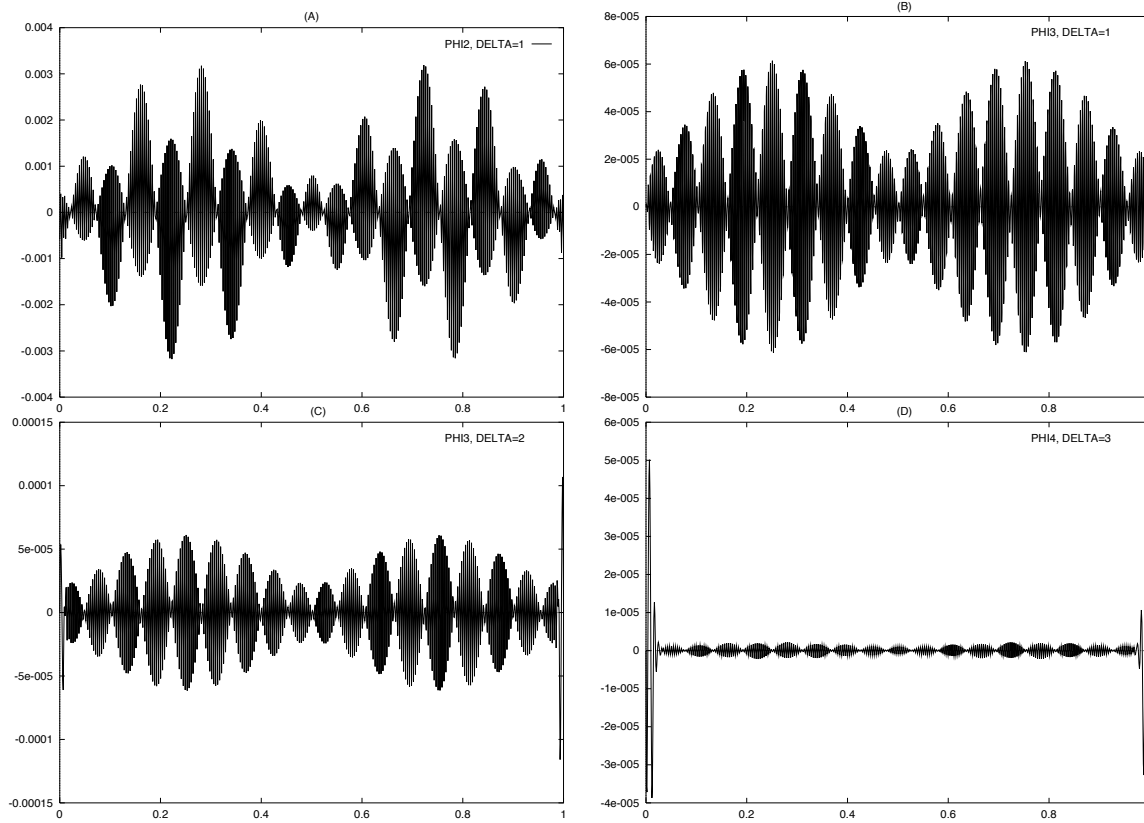
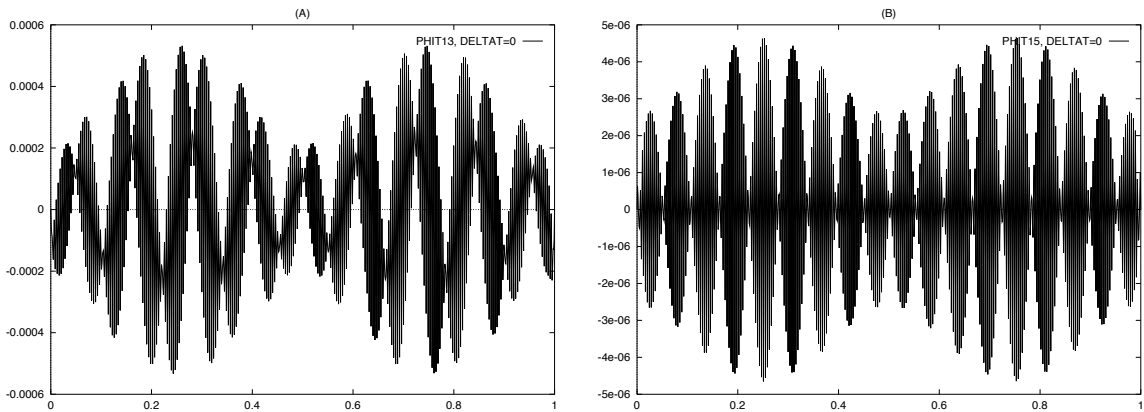


FIG. 1.13 – Erreur de projection orthogonale $H_0^1(]0,1[)$ de $\sin(\omega x)\sin(2\pi x)$ sur $V_j^{\delta, CLD}$ avec $\omega = 50$, $j = 8$ et les générateurs splines ϕ^n . (A) $n = 2$, $\delta = 1$, (B) $n = 3$, $\delta = 1$; (C) $n = 3$, $\delta = 2$; (D) $n = 4$, $\delta = 3$.



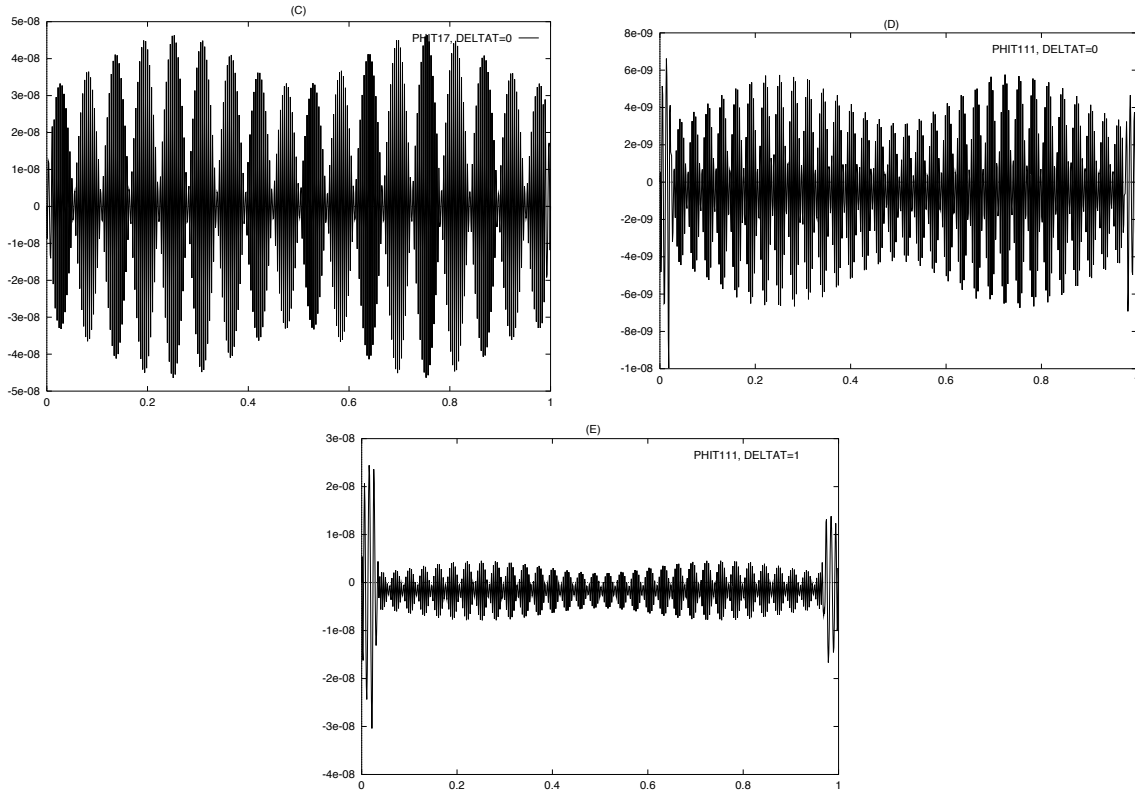


FIG. 1.14 – Erreur de projection orthogonale $H_0^1(]0,1[)$ de $\sin(\omega x)\sin(2\pi x)$ sur $V_j^{\delta,CLD}$ avec $j = 8$ et les générateurs $\tilde{\phi}^{1,\tilde{n}}$. (A) $\tilde{n} = 3$, $\tilde{\delta} = 0$, $\omega = 50$; (B) $\tilde{n} = 5$, $\tilde{\delta} = 0$, $\omega = 50$; (C) $\tilde{n} = 7$, $\tilde{\delta} = 0$, $\omega = 50$; (D) $\tilde{n} = 11$, $\tilde{\delta} = 0$, $\omega = 100$; (E) $\tilde{n} = 11$, $\tilde{\delta} = 1$, $\omega = 100$.

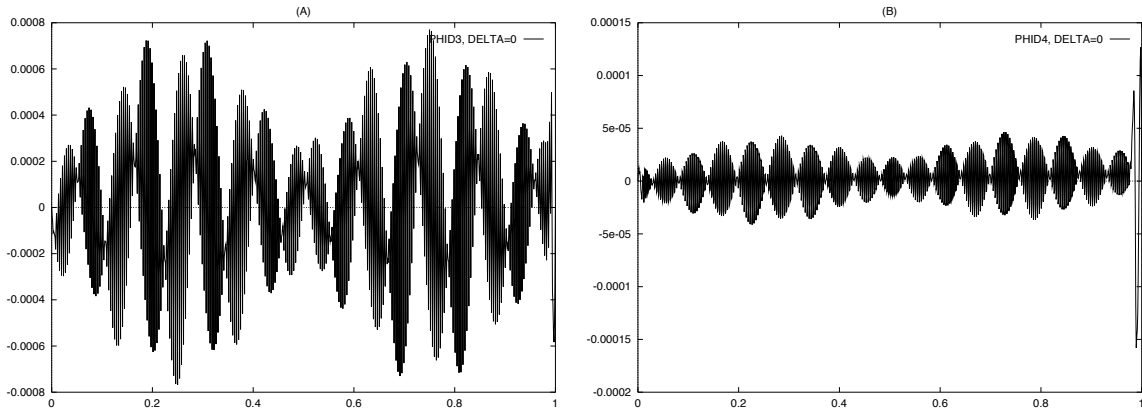


FIG. 1.15 – Erreur de projection orthogonale $H_0^1(]0,1[)$ de $\sin(\omega x)\sin(2\pi x)$ sur $V_j^{\delta,CLD}$ avec $\omega = 50$, $j = 8$ et les générateurs ϕ^{D,n_d} . (A) $n_d = 3$, $\delta = (0,0)$; (B) $n_d = 4$, $\delta = (0,0)$.

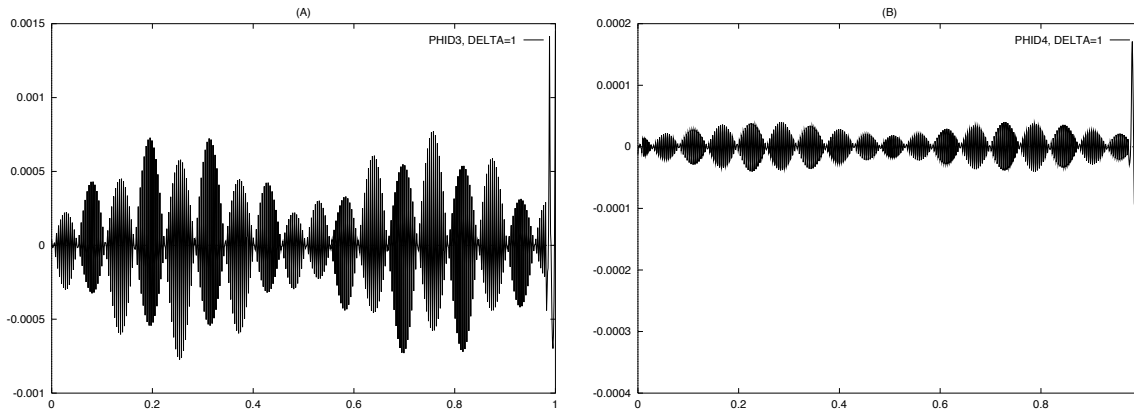


FIG. 1.16 – Erreur de projection orthogonale $L^2([0,1])$ de $\sin(\omega x)\sin(2\pi x)$ sur V_j^δ avec $\omega = 50$, $j = 8$ et les générateurs ϕ^{D,n_d} . (A) $n_d = 3$, $\delta = (1,1)$; (B) $n_d = 4$, $\delta = (1,1)$.

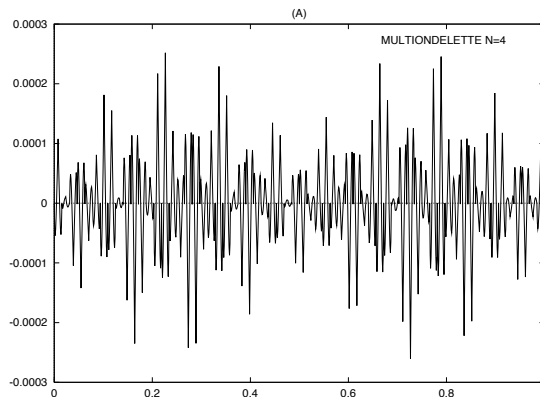


FIG. 1.17 – Erreur de projection orthogonale $H_0^1([0,1])$ de $\sin(\omega x)\sin(2\pi x)$ sur $V_j^{\delta,CLD}$ avec $\omega = 50$, $j = 6$ ($\#\Delta_j = 2^{j+2}$), et les multiondelettes splines C^0 d'ordre 4.

1.4 Construction de bases d'ondelettes par décomposition de domaine

On commence par rappeler la construction de bases d'ondelettes tensorielles sur des domaines tensorisés. Puis on passe en revue les différentes approches de la décomposition de domaine en précisant leurs performances en termes de stabilité. Enfin on expose en détail la décomposition de domaine conforme avec raccord continu aux interfaces. L'accent est mis sur la construction des bases d'ondelettes aux interfaces qui est la contribution originale de ce travail.

1.4.1 Domaines tensoriels

Pour $m = 1, \dots, d$ et $\omega_m = \mathbb{R}, \mathbb{T}$ ou $]0, 1[$, on considère le domaine tensoriel

$$\hat{\Omega} = \prod_{m=1}^d \omega_m.$$

Les domaines ω_m sont munis des bases de fonctions d'échelle et d'ondelettes biorthogonales

$$\Phi_{j,\omega_m}, \tilde{\Phi}_{j,\omega_m} \text{ et } \Psi_{j,\omega_m}, \tilde{\Psi}_{j,\omega_m},$$

engendrant les AMR $V_j(\omega_m), \tilde{V}_j(\omega_m)$ de $L^2(\omega_m)$ et les espaces complémentaires $W_j(\omega_m), \tilde{W}_j(\omega_m)$. On notera P_{j,ω_m} et \tilde{P}_{j,ω_m} , $Q_{j,\omega_m}, \tilde{Q}_{j,\omega_m}$ les projecteurs biorthogonaux associés.

Pour les quantités primales (et de même duales), on adopte la convention d'écriture

$$\begin{cases} \Psi_{j,\omega_m}^{\varepsilon_m} = \Phi_{j,\omega_m}, & Q_{j,\omega_m}^{\varepsilon_m} = P_{j,\omega_m}, & W_j^{\varepsilon_m}(\omega_m) = V_j(\omega_m) \text{ si } \varepsilon_m = 0, \\ \tilde{\Psi}_{j,\omega_m}^{\varepsilon_m} = \Psi_{j,\omega_m}, & \tilde{Q}_{j,\omega_m}^{\varepsilon_m} = Q_{j,\omega_m}, & \tilde{W}_j^{\varepsilon_m}(\omega_m) = W_j(\omega_m) \text{ si } \varepsilon_m = 1. \end{cases}$$

Les espaces

$$\begin{cases} V_j(\hat{\Omega}) = \bigotimes_{m=1}^d V_j(\omega_m), \\ \tilde{V}_j(\hat{\Omega}) = \bigotimes_{m=1}^d \tilde{V}_j(\omega_m), \end{cases} \quad (1.112)$$

définissent classiquement par produit tensoriel des AMR biorthogonales munies des bases de fonctions d'échelle biorthogonales

$$\begin{cases} \Phi_{j,\hat{\Omega}} = \bigotimes_{m=1}^d \Phi_{j,\omega_m}, \\ \tilde{\Phi}_{j,\hat{\Omega}} = \bigotimes_{m=1}^d \tilde{\Phi}_{j,\omega_m}, \end{cases} \quad (1.113)$$

associées aux projecteurs

$$P_{j,\hat{\Omega}} = \bigotimes_{m=1}^d P_{j,\omega_m} \text{ et } \tilde{P}_{j,\hat{\Omega}} = \bigotimes_{m=1}^d \tilde{P}_{j,\omega_m}.$$

Soit l'ensemble $\mathcal{E} := \{0, 1\}^d / (0, \dots, 0)$ dont on notera les éléments $\varepsilon = (\varepsilon_m)_{m=1, \dots, d}$. Les espaces d'ondelettes $W_j(\hat{\Omega})$ et $\tilde{W}_j(\hat{\Omega})$ sont les images des projecteurs

$$\begin{cases} Q_{j,\hat{\Omega}} = P_{j+1,\hat{\Omega}} - P_{j,\hat{\Omega}} = \sum_{\varepsilon \in \mathcal{E}} \bigotimes_{m=1}^d Q_{j,\omega_m}^{\varepsilon_m}, \\ \tilde{Q}_{j,\hat{\Omega}} = \tilde{P}_{j+1,\hat{\Omega}} - \tilde{P}_{j,\hat{\Omega}} = \sum_{\varepsilon \in \mathcal{E}} \bigotimes_{m=1}^d \tilde{Q}_{j,\omega_m}^{\varepsilon_m}. \end{cases}$$

i.e. les espaces

$$W_j(\hat{\Omega}) = \bigoplus_{\varepsilon \in \mathcal{E}} \bigotimes_{m=1}^d W_j^{\varepsilon_m}(\omega_m) \text{ et } \tilde{W}_j(\hat{\Omega}) = \bigoplus_{\varepsilon \in \mathcal{E}} \bigotimes_{m=1}^d \tilde{W}_j^{\varepsilon_m}(\omega_m) \quad (1.114)$$

munis des bases biorthogonales

$$\Psi_{j,\hat{\Omega}} = \bigcup_{\varepsilon \in \mathcal{E}} \bigotimes_{m=1}^d \Psi_{j,\omega_m}^{\varepsilon_m} \quad \text{et} \quad \tilde{\Psi}_{j,\hat{\Omega}} = \bigcup_{\varepsilon \in \mathcal{E}} \bigotimes_{m=1}^d \tilde{\Psi}_{j,\omega_m}^{\varepsilon_m}.$$

La stabilité des bases au niveau j et les estimations directes et inverses dans $V_j(\hat{\Omega})$ et $\tilde{V}_j(\hat{\Omega})$ se démontrent en dimension d avec les mêmes arguments qu'en dimension 1. On obtient donc en invoquant le corollaire 1.1 et les Théorèmes 1.3, 1.4, 1.5, les théorèmes de caractérisation des espaces de Besov par les décompositions multiéchelles dans les bases d'ondelettes biorthogonales

$$\Psi_{\hat{\Omega}} = \Phi_{j_0,\hat{\Omega}} \cup \bigcup_{j \geq j_0} \Psi_{j,\hat{\Omega}} \quad \text{et} \quad \tilde{\Psi}_{\hat{\Omega}} = \check{\Phi}_{j_0,\hat{\Omega}} \cup \bigcup_{j \geq j_0} \tilde{\Psi}_{j,\hat{\Omega}}. \quad (1.115)$$

Les bases d'ondelettes (1.115) seront, par la suite, parfois qualifiées d'*isotropes* dans la mesure où chaque ondelette de base est associée à une seule échelle j , la même dans chaque direction.

On obtient une décomposition dite *anisotrope* en redécomposant les espaces $V_j(\omega_m)$ qui figurent dans la définition des espaces $W_j(\hat{\Omega})$ (1.114) jusqu'au niveau j_0

$$V_j(\omega_m) = V_{j_0}(\omega_m) \oplus W_{j_0}(\omega_m) \oplus \dots \oplus W_{j-1}(\omega_m).$$

On obtient ainsi les bases de Riesz biorthogonales de $L^2(\hat{\Omega})$, produit tensoriel des bases monodimensionnelles sur ω_m notées $\Psi_{\omega_m} = \{\psi_{\lambda_m}^m, \lambda_m \in \nabla_m\}$, $m = 1, \dots, d$.

$$\Psi_{\hat{\Omega}} = \bigotimes_{m=1}^d \Psi_{\omega_m}, \quad \text{et} \quad \tilde{\Psi}_{\hat{\Omega}} = \bigotimes_{m=1}^d \tilde{\Psi}_{\omega_m}. \quad (1.116)$$

Proposition 1.13 *Si les bases Ψ_{ω_m} sont des bases de Riesz de $L^2(\omega_m)$ pour tout $m = 1, \dots, d$, alors la décomposition multiéchelle dans la base anisotrope (1.116) Ψ caractérise les espaces de Sobolev H^s pour les mêmes valeurs de s que la base isotrope, i.e.*

$$\|f\|_{H^s} \sim \left(\sum_{\lambda \in \Pi_{m=1}^d \nabla_m} \left(\sum_{m=1}^d 2^{|\lambda_m|} \right)^{2s} |\langle f, \bigotimes_{m=1}^d \tilde{\psi}_{\lambda_m} \rangle|^2 \right)^{1/2}. \quad (1.117)$$

Preuve. Pour $s \geq 0$, partant de l'équivalence de norme de la décomposition isotrope, celle de la décomposition anisotrope se déduit facilement de la stabilité dans $L^2(\omega_m)$ des décompositions monodimensionnelles et de l'équivalence $2^{\max_{m=1,\dots,d}(|\lambda_m|)}$ $\sim \sum_{m=1}^d 2^{|\lambda_m|}$. Pour les espaces duaux, le résultat se déduit alors de celui obtenu pour la base duale dans H^{-s} et d'un argument de dualité. \square

Remarque 1.23 *Un contre exemple simple est celui de la base hiérarchique sur $]0, 1[^d$ obtenue par produit tensoriel de l'exemple 2 du §1.1. La base isotrope caractérise les espaces $H^s(]0, 1[^d)$ pour tout $d/2 < s < 3/2$, alors que la base anisotrope est instable dans ces espaces quelques soient s et d .*

1.4.2 Décomposition de domaine

On considère de façon générale dans les méthodes de décomposition de domaine (sans recouvrement) un domaine Ω de \mathbb{R}^d , voire plus généralement une variété de dimension d qui se décompose en N sous domaines Ω_i disjoints et tels que

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^N \bar{\Omega}_i.$$

Chaque sous domaine est difféomorphe au domaine de référence $\hat{\Omega} =]0, 1[^d$ par la paramétrisation supposée de classe C^∞

$$\kappa_i : \hat{\Omega} \rightarrow \bar{\Omega}_i.$$

On notera $J_i = |\partial\kappa_i \circ \kappa_i^{-1}|$ le jacobien de cette transformation défini sur Ω_i qui vérifie en particulier

$$c \leq |\partial\kappa_i(\hat{x})| \leq C, \quad \forall \hat{x} \in \hat{\Omega}.$$

Afin de traiter de façon générique la dualité on adopte par commodité les notations suivantes. On note $\mathcal{F}^s(\Omega)$, $s \geq 0$, une classe d'espaces fonctionnels associée au domaine Ω , typiquement les espaces de Besov $B_{p,q}^s(\Omega)$ ou de Sobolev $W^{s,p}(\Omega)$, avec ou sans conditions aux limites. La classe $\tilde{\mathcal{F}}^s(\Omega)$, $s \geq 0$, désigne la classe duale i.e. $B_{p',q'}^s(\Omega)$ ou $W^{s,p'}(\Omega)$ pour $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ et $\frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Pour $s < 0$, on convient alors que

$$\mathcal{F}^s(\Omega) := (\tilde{\mathcal{F}}^{-s}(\Omega))' \quad \text{et} \quad \tilde{\mathcal{F}}^s(\Omega) := (\mathcal{F}^{-s}(\Omega))'.$$

La construction de bases d'ondelettes biorthogonales sur les sous domaines Ω_i est immédiate par le lemme classique suivant (voir par exemple [60]).

Lemme 1.3 *Pour les classes d'espaces fonctionnels \mathcal{F}^s des espaces de Besov $B_{p,q}^s$ ou de Sobolev $W^{s,p}$ on a*

$$\mathcal{F}^s(\Omega_i) = \{f \text{ telles que } f \circ \kappa_i \in \mathcal{F}^s(\hat{\Omega})\}$$

avec de plus l'équivalence de norme

$$\|f\|_{\mathcal{F}^s(\Omega_i)} \sim \|f \circ \kappa_i\|_{\mathcal{F}^s(\hat{\Omega})}.$$

Proposition 1.14 *Soient*

$$\Psi_{\hat{\Omega}}^i = \{\psi_{\lambda}^{\hat{\Omega}}, \lambda \in \nabla_i\} \text{ et } \tilde{\Psi}_{\hat{\Omega}}^i = \{\tilde{\psi}_{\lambda}^{\hat{\Omega}}, \lambda \in \nabla_i\}$$

des bases d'ondelettes biorthogonales de $L^2(\hat{\Omega})$. Alors

$$\begin{cases} \Psi_{\Omega_i} : = \{\psi_{\lambda}^{\Omega_i} = \psi_{\lambda}^{\hat{\Omega}} \circ \kappa_i^{-1}, \lambda \in \nabla_i\}, \\ \tilde{\Psi}_{\Omega_i} : = \{\tilde{\psi}_{\lambda}^{\Omega_i} = J_i^{-1} \tilde{\psi}_{\lambda}^{\hat{\Omega}} \circ \kappa_i^{-1}, \lambda \in \nabla_i\}, \end{cases} \quad (1.118)$$

définissent des bases d'ondelettes biorthogonales de $L^2(\Omega_i)$ et caractérisent, sur Ω_i , les mêmes classes d'espaces fonctionnels \mathcal{F}^s et $\tilde{\mathcal{F}}^s$ que $\Psi_{\hat{\Omega}}$ et $\tilde{\Psi}_{\hat{\Omega}}$ sur $\hat{\Omega}$. Si le produit de dualité est défini par rapport au produit scalaire équivalent

$$(f, g)_i : = \langle f \circ \kappa_i, g \circ \kappa_i \rangle_{\hat{\Omega}}, \quad (1.119)$$

alors la base duale s'écrit simplement

$$\tilde{\Psi}_{\Omega_i} = \{\tilde{\psi}_{\lambda}^{\Omega_i} = \tilde{\psi}_{\lambda}^{\hat{\Omega}} \circ \kappa_i^{-1}, \lambda \in \nabla_i\}. \quad (1.120)$$

Preuve. C'est une conséquence directe de l'isomorphisme du lemme 1.3, et la base duale s'obtient par simple changement de variable. \square

Afin de définir des bases d'ondelettes sur le domaine ou la variété Ω il faut d'une façon ou d'une autre recoller les bases définies sur les sous domaines. La technique de recollement va dépendre de façon essentielle de l'intervalle de stabilité souhaité et imposer en outre des hypothèses

- (i) géométriques sur la décomposition de domaine $(\Omega_i, \kappa_i)_{i=1, \dots, N}$,
- (ii) fonctionnelles sur le choix des bases d'ondelettes biorthogonales $\Psi_{\hat{\Omega}}^i$ et $\tilde{\Psi}_{\hat{\Omega}}^i$ sur le domaine de référence.

Un premier cas trivial repose sur l'isomorphisme bien connu, pour $p \in [1, \infty[$

$$\mathcal{F}^s(\Omega) \simeq \prod_{i=1}^N \mathcal{F}^s(\Omega_i) \text{ pour tous } |s| < \frac{1}{p}.$$

Ainsi, quelle que soit la décomposition de domaine et le choix des bases sur $\hat{\Omega}$

$$\Psi_{\Omega} : = \bigcup_{i=1}^N \chi_{\Omega_i} \Psi_{\Omega_i} \text{ et } \tilde{\Psi}_{\Omega} : = \bigcup_{i=1}^N \chi_{\Omega_i} \tilde{\Psi}_{\Omega_i} \quad (1.121)$$

définissent des bases biorthogonales de Ω et caractérisent les mêmes espaces fonctionnels que les bases sur $\hat{\Omega}$ pour $p \in [1, \infty[$ et $|s| < \frac{1}{p}$.

Ce cadre est insuffisant pour la plupart des applications en analyse numérique à l'exception de problèmes intégraux d'ordre 0.

L'objectif minimum est d'obtenir, pour s positif, la caractérisation des espaces de Sobolev H^s sur l'intervalle $0 \leq s \leq 1$ pour la résolution de problèmes aux limites d'ordre 2. Pour les ordres négatifs on souhaite atteindre $s = -1/2$ pour la résolution de problèmes intégraux d'ordre -1 (potentiel de simple couche).

De plus il faut préserver les propriétés de compression des fonctions et des opérateurs en base d'ondelettes qui reposent sur les propriétés de moments nuls des ondelettes. Notons que pour les ondelettes primales et duales définies sur les sous domaines Ω_i , les moments nuls ne portent plus sur les polynômes $\pi \in \mathbb{P}_{n-1}$ et $\pi \in \mathbb{P}_{\tilde{n}-1}$ mais sur les fonctions $J_i^{-1}\pi \circ \kappa_i^{-1}$, $\pi \in \mathbb{P}_{n-1}$ pour les ondelettes primales de Ψ_{Ω_i} et $\pi \circ \kappa_i^{-1}$, $\pi \in \mathbb{P}_{\tilde{n}-1}$ pour les ondelettes duales de $\tilde{\Psi}_{\Omega_i}$. Ces moments nuls induisent cependant les mêmes propriétés de compression, ce qui se démontre en se ramenant au sous domaine $\hat{\Omega}$ par l'isomorphisme régulier κ_i et en appliquant (1.68).

Raccord C^0 . Une technique de raccord continu aux interfaces de la décomposition de domaine va permettre de couvrir en général ces objectifs pour l'intervalle $-1/p < s < 1 + 1/p$ et pour une classe de domaines ou variétés plus restreinte, l'intervalle $|s| < 1 + 1/p$. Cette technique est issue des éléments spectraux de [77] et a été introduite pour la construction de bases d'ondelettes biorthogonales dans [65],[66] puis dans un cadre plus général dans [47] ainsi que dans [19]. Elle impose

- (i) des hypothèses géométriques de conformité C^0 sur la décomposition de domaine $(\Omega_i, \kappa_i)_{i=1, \dots, N}$ (dont une définition précise sera donnée au paragraphe suivant). Ces hypothèses couvrent la plupart des domaines et variétés rencontrés en pratique.
- (ii) Un raccord C^0 des fonctions d'échelles primales (supposées continues sur les sous domaines) aux interfaces de la décomposition. Ce procédé définit une AMR primale continue qui en outre conserve les propriétés d'approximation des AMR sur les sous domaines.

- La s'arrête le parallèle avec les éléments spectraux car il faut en outre
- (iii) définir une AMR duale (biorthogonale),
 - (iv) construire (en particulier aux interfaces) les bases d'ondelettes biorthogonales (locales) associées.

Dans [47] des AMR biorthogonales sont construites sur Ω partant d'un couple de générateurs biorthogonaux et symétriques $(\phi, \tilde{\phi})$ sur \mathbb{R} , le générateur ϕ étant supposé continu. Le point de départ est la construction des AMR biorthogonales sur l'intervalle du § 1.3, puis par produit tensoriel sur le domaine de référence $\hat{\Omega}$. L'AMR primale est obtenue par raccord continu des fonctions d'échelle sur les sous domaines comme c'est le cas pour les éléments spectraux. Moyennant les hypothèses du lemme 1.9, les mêmes conditions de raccord (et les mêmes conditions aux limites

dans [19]) sur les AMR duales et primales permettent d’obtenir des AMR biorthogonales sur Ω , quelque soit la décomposition de domaine satisfaisant les hypothèses de conformité C^0 .

L’hypothèse de symétrie des générateurs est levée dans [19] moyennant des hypothèses géométriques supplémentaires sur la décomposition de domaine qui ne sont restrictives qu’en dimension strictement supérieure à 2.

Les bases d’ondelettes associées coïncident avec (1.121) sauf aux voisinages des interfaces ou celles-ci doivent être “recollées”. La construction explicite de ces ondelettes modifiées aux interfaces est étudiée en détail dans [19] ainsi que par une technique différente dans [34].

Nous détaillons dans le paragraphe suivant cette dernière construction qui constitue l’aspect original de cet exposé et nous servira en outre au § 2.3 dans le cadre de la construction de relèvements stables.

Raccords d’ordre supérieur. Les hypothèses géométriques de conformité C^m de la décomposition de domaine $(\Omega_i, \kappa_i)_{i=1, \dots, N}$, définies précisément au paragraphe suivant, imposent des conditions très restrictives sur le domaine ou la variété Ω . Par exemple la sphère ne peut pas faire l’objet d’une telle décomposition. Si du moins ces hypothèses géométriques sont satisfaites alors

(1) le raccord C^0 (fonctionnel) précédent des AMR sur les sous domaines permet d’obtenir l’intervalle de stabilité $|s| < 1 + 1/p$ dès que $m \geq 1$.

(2) Un raccord C^m est toujours possible pour l’AMR primale. Cependant du fait de la remarque 1.22, le même raccord pour l’AMR duale ne garantit pas l’obtention d’AMR biorthogonales. Il faut en outre vérifier la non singularité de matrices indépendantes du niveau j mais néanmoins dépendantes du domaine. Une alternative consiste à se restreindre aux générateurs orthogonaux. On obtient sous ces hypothèses l’intervalle de stabilité $-(m + 1/p) < s < m + 1 + 1/p$. Il est aussi possible de renoncer au raccord continu de l’AMR duale ce qui permet d’obtenir l’intervalle de stabilité $-1/p < s < m + 1 + 1/p$.

Autres techniques de décomposition de domaine. Dans [48] une nouvelle technique de décomposition de domaine est introduite. Le principe n’est pas de chercher à recoller les bases de fonctions d’échelle des espaces discrets aux interfaces mais consiste à établir selon [25] un isomorphisme topologique

$$\mathcal{F}^s(\Omega) \simeq \prod_{i=1}^N \mathcal{F}^s(\Omega_i) \downarrow$$

où la flèche indique certaines conditions aux limites. Ces isomorphismes sont construits explicitement par le biais d’opérateurs d’extension des sous domaines Ω_i dans certains voisinages intérieurs $(\bigcup \overline{\Omega}_j)$.

Enfin mentionnons le cadre de la décomposition de domaine avec joints dont le but n'est pas de construire des bases d'ondelettes sur le domaine Ω mais qui permettent de raccorder de façon optimale en terme d'approximation et de stabilité des discrétisations en ondelettes sur chacun des sous domaines (voire des discrétisations ondelettes, éléments finis et spectrales). On réfère à [5] pour ces techniques et à [12] pour leur adaptation au cas des discrétisations en base d'ondelettes.

1.4.3 Décomposition de domaine avec raccord C^0

Hypothèses géométriques

Pour $p = 0, \dots, d-1$, on appelle p-face du sous domaine Ω_i l'image par κ_i d'une face de dimension p du domaine de référence $\hat{\Omega}$.

La décomposition en sous domaines Ω_i sera toujours supposée vérifier l'hypothèse minimale de conformité suivante. L'intersection de deux sous domaines $\bar{\Omega}_i$ et $\bar{\Omega}_l$ est soit vide soit une p-face commune aux sous domaines Ω_i et Ω_l . Ces p-faces constituent les interfaces de la décomposition.

D'autre part, la frontière Γ de Ω est divisée en deux ouverts disjoints Γ_D et Γ_N de Γ tels que $\Gamma = \bar{\Gamma}_D \cup \bar{\Gamma}_N$ et tels que pour chaque $i = 1, \dots, N$,

$$\partial\Omega_i \cap \bar{\Gamma}_D, \partial\Omega_i \cap \bar{\Gamma}_N,$$

soient les unions (éventuellement vides) de p-faces de Ω_i .

En outre, on effectue pour $m \geq 0$, l'hypothèse de conformité C^m , sur la décomposition $(\Omega_i, \kappa_i)_{i=1, \dots, N}$ au sens suivant repris de [48].

Définition 1.3 *La décomposition de domaine $(\Omega_i, \kappa_i)_{i=1, \dots, N}$ est dite C^m conforme, $m \geq 0$, si pour tout couple de sous domaines Ω_i et Ω_l ayant la $(d-1)$ -face commune $\Omega_i \cap \Omega_l$, il existe une isométrie affine ρ telle que d'une part $\bar{\hat{\Omega}} \cap \rho(\bar{\hat{\Omega}})$ est une $(d-1)$ -face de $\hat{\Omega}$ avec $\hat{\Omega} \cap \rho(\hat{\Omega}) = \emptyset$ et d'autre part*

$$\bar{\Omega}_i \cap \bar{\Omega}_l = \kappa(\bar{\hat{\Omega}} \cap \rho(\bar{\hat{\Omega}}))$$

où κ , défini par

$$\kappa|_{\bar{\hat{\Omega}}} = \kappa_i \text{ et } \kappa|_{\rho(\bar{\hat{\Omega}})} = \kappa_l \circ \rho^{-1},$$

et son inverse sont de classe C^m .

Pour $m = 0$ cette définition équivaut à la définition originale de [77] suivante. Pour toute p-face $\sigma_{i,l}$ commune aux sous domaines Ω_i et Ω_l , image de $\hat{\sigma}$ par la paramétrisation κ_i et de $\hat{\sigma}'$ par la paramétrisation κ_l , alors

$$\kappa_i^{-1} \circ \kappa_l \tag{1.122}$$

définit une isométrie affine de $\hat{\sigma}'$ dans $\hat{\sigma}$.

AMR biorthogonales sur Ω

On considère un couple de générateurs biorthogonaux sur \mathbb{R} $(\phi, \tilde{\phi})$ où ϕ est continu. On les supposera en outre de symétrie paire au point 0 ou 1/2, ce qui est par exemple le cas des ondelettes spline biorthogonales du § 1.2.1, des multiondelettes du § 1.2.4 et des ondelettes interpolantes du 1.2.3. Cette hypothèse peut être levée à condition de supposer en outre que (1.122) préserve le sens de parcours des coordonnées (voir [19]), ce qui n'est restrictif qu'en dimension $d \geq 3$.

La construction des ondelettes biorthogonales sur l'intervalle $[0, 1]$ s'effectue sous les hypothèses des propositions 1.9 et 1.10 avec le choix symétrique $\delta_0 = \delta_1$ et $\tilde{\delta}_0 = \tilde{\delta}_1$. On peut alors toujours choisir les bases de fonctions d'échelle $(\Phi_j^\delta, \tilde{\Phi}_j^\delta)$ (1.101) et d'ondelettes $(\Psi_j, \tilde{\Psi}_j)$ (1.105) du paragraphe 1.3.4 tels que les fonctions de base possèdent en outre la symétrie

$$\begin{cases} \varphi_{j,k}(1-x) = \varphi_{j,d_j-k}(x), & \tilde{\varphi}_{j,k}(1-x) = \tilde{\varphi}_{j,d_j-k}(x), & k = 0, \dots, d_j \\ \psi_{j,k}(1-x) = \psi_{j,2^j-k-1}(x), & \tilde{\psi}_{j,k}(1-x) = \tilde{\psi}_{j,2^j-k-1}(x), & k = 0, \dots, 2^j - 1 \end{cases} \quad (1.123)$$

où l'on a posé $d_j := \#\Delta_j - 1$. Les bases biorthogonales incorporant les conditions aux limites de Dirichlet aux extrémités 0 et 1 s'en déduisent par les propositions 1.9 pour les fonctions d'échelle et 1.10 pour les ondelettes. Pour

$$\text{CL} \in \mathcal{B} := \{(-1, -1), (-1, 0), (0, -1), (0, 0)\},$$

on notera ces bases $(\Phi_j^{\delta, \text{CL}}, \tilde{\Phi}_j^{\tilde{\delta}, \text{CL}})$ et $(\Psi_j^{\text{CL}}, \tilde{\Psi}_j^{\text{CL}})$.

Afin de décrire simplement le recollement des fonctions d'échelle aux interfaces, il est commode de substituer aux indices des fonctions d'échelle $k = 0, \dots, d_j$ les points distincts $\xi_{j,k} \in [0, 1]$ tels que $\xi_{j,0} = 0$ et $\xi_{j,d_j} = 1$. On notera alors les bases de fonctions d'échelle sur l'intervalle

$$\begin{cases} \Phi_j^{\delta, \text{CL}} = \left\{ \varphi_{j, \xi_{j,k}}, k \in \Delta_j^{\text{CL}} \right\} \\ \tilde{\Phi}_j^{\tilde{\delta}, \text{CL}} = \left\{ \tilde{\varphi}_{j, \xi_{j,k}}, k \in \Delta_j^{\text{CL}} \right\}. \end{cases} \quad (1.124)$$

Par produit tensoriel on obtient les bases biorthogonales sur le domaine de référence $\hat{\Omega}$ incorporant les conditions aux limites cl $= (\text{cl}^m, m = 1, \dots, d) \in \mathcal{B}^d$. Elles sont notées

$$\begin{cases} \Phi_{j, \hat{\Omega}}^{\text{cl}} = \bigotimes_{m=1}^d \Phi_j^{\delta, \text{cl}^m} = \left\{ \varphi_{j, \hat{x}_{j,k}}, k \in \Delta_j^{\text{cl}} \right\} \\ \tilde{\Phi}_{j, \hat{\Omega}}^{\text{cl}} = \bigotimes_{m=1}^d \tilde{\Phi}_j^{\tilde{\delta}, \text{cl}^m} = \left\{ \tilde{\varphi}_{j, \hat{x}_{j,k}}, k \in \Delta_j^{\text{cl}} \right\}, \end{cases} \quad (1.125)$$

où $\hat{x}_{j,k} = (\xi_{j,k_1}, \dots, \xi_{j,k_d})$ pour $k = (k_1, \dots, k_d) \in \{0, \dots, d_j\}^d$.

Les bases de fonctions d'échelle sur les sous domaines Ω_i s'en déduisent par la proposition 1.14.

$$\begin{cases} \Phi_{j,\Omega_i}^{\text{cl}} = \left\{ \varphi_{j,x_{j,k}^i}, k \in \Delta_j^{\text{cl}} \right\} \\ \tilde{\Phi}_{j,\Omega_i}^{\text{cl}} = \left\{ \tilde{\varphi}_{j,x_{j,k}^i}, k \in \Delta_j^{\text{cl}} \right\}, \end{cases} \quad (1.126)$$

où

$$x_{j,k}^i = \kappa_i(\hat{x}_{j,k}), k \in \{0, \dots, d_j\}^d$$

et

$$\varphi_{j,x_{j,k}^i}^{(i)} = \varphi_{j,\hat{x}_{j,k}} \circ \kappa_i^{-1}, \tilde{\varphi}_{j,x_{j,k}^i}^{(i)} = \tilde{\varphi}_{j,\hat{x}_{j,k}} \circ \kappa_i^{-1}.$$

Elles sont biorthogonales par rapport au produit scalaire (1.119).

Afin de tenir compte des conditions aux limites propres au domaine Ω on notera spécifiquement

$$\Delta_j^{(i)} = \{k \in \{0, \dots, d_j\}^d : x_{j,k}^i \notin \partial\Omega_i \cap \bar{\Gamma}_D\}$$

et

$$\begin{cases} \Phi_{j,\Omega_i} = \left\{ \varphi_{j,x_{j,k}^i}^{(i)}, k \in \Delta_j^{(i)} \right\} \\ \tilde{\Phi}_{j,\Omega_i} = \left\{ \tilde{\varphi}_{j,x_{j,k}^i}^{(i)}, k \in \Delta_j^{(i)} \right\}, \end{cases} \quad (1.127)$$

les bases biorthogonales correspondantes, engendrant les AMR biorthogonales

$$V_j(\Omega_i), \tilde{V}_j(\Omega_i).$$

Soient les grilles de points

$$\mathcal{G}_j = \left\{ x_{j,k}^i, k \in \{0, \dots, d_j\}^d, i = 1, \dots, N \right\}. \quad (1.128)$$

et

$$\mathcal{G}_{j,\Omega} = \left\{ x_{j,k}^i, k \in \Delta_j^{(i)}, i = 1, \dots, N \right\} \subset \mathcal{G}_j. \quad (1.129)$$

L'AMR primale sur le domaine Ω est définie par le raccord continu

$$V_j(\Omega) := (\Pi_{i=1}^N V_j(\Omega_i)) \cap C^0(\Omega). \quad (1.130)$$

Bien que le générateur $\tilde{\phi}$ ne soit pas supposé a priori continu, une AMR duale est alors définie par les mêmes conditions de raccord et les mêmes conditions aux limites. Ceci est précisé par la proposition suivante.

Proposition 1.15 *Pour tout $x \in \mathcal{G}_{j,\Omega}$ soit*

$$I(x) := \{i \in \{1, \dots, N\} : x \in \bar{\Omega}_i\}.$$

Alors la famille

$$\Phi_{j,\Omega} := \left\{ \varphi_{j,x} := \sum_{i \in I(x)} \chi_{\Omega_i} \varphi_{j,x}^{(i)}, x \in \mathcal{G}_{j,\Omega} \right\} \quad (1.131)$$

est une base de Riesz de l'AMR primale $V_j(\Omega)$ et

$$\tilde{\Phi}_{j,\Omega} := \left\{ \tilde{\varphi}_{j,x} := \frac{1}{\#I(x)} \sum_{i \in I(x)} \chi_{\Omega_i} \tilde{\varphi}_{j,x}^{(i)}, x \in \mathcal{G}_{j,\Omega} \right\} \quad (1.132)$$

définit une base de Riesz biorthogonale (engendrant l'AMR duale $\tilde{V}_j(\Omega)$), pour le produit scalaire L^2 (cf (1.119))

$$(f, g) := \sum_{i=1}^n (f|_{\Omega_i}, g|_{\Omega_i})_i, \quad (1.133)$$

équivalent au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

Preuve. La famille $\bigcup_{i=1}^N \Phi_{j,\Omega_i}$ définit par construction une base de $\prod_{i=1}^N V_j(\Omega_i)$. D'après les propriétés des bases sur l'intervalle Φ_j^ξ (i.e. une seule fonction d'échelle ne s'annule pas à chaque bord 0 et 1), la définition (1.131) de $\Phi_{j,\Omega}$ traduit exactement le raccord continu (1.130) et la famille reste génératrice.

La propriété de biorthogonalité des bases $\Phi_{j,\Omega}$ et $\tilde{\Phi}_{j,\Omega}$ pour le produit scalaire (1.133) est une conséquence immédiate des définitions. Ces bases étant locales et les normes des fonctions de base uniformément bornées dans L^2 , ce sont donc des bases de Riesz (uniformes en j) des espaces $V_j(\Omega)$ et $\tilde{V}_j(\Omega)$. \square

Les espaces duaux sont définis par rapport au produit de dualité induit par le produit scalaire $\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx$ et non le produit (f, g) ci dessus. L'application du Théorème 1.3 nécessite donc de définir la biorthogonalité par rapport à ce produit scalaire. Ceci conduit au nouveau choix de l'AMR duale engendrée par les bases de Riesz

$$\tilde{\Phi}_{j,\Omega} = \left\{ \tilde{\varphi}_{j,x} := \frac{1}{\#I(x)} \sum_{i \in I(x)} J_i^{-1} \chi_{\Omega_i} \tilde{\varphi}_{j,x}^{(i)}, x \in \mathcal{G}_{j,\Omega} \right\} \quad (1.134)$$

biorthogonales aux bases $\Phi_{j,\Omega}$ par rapport au produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On voit clairement que la régularité de cette AMR est limitée par le recollement des Jacobiens J_i des transformations κ_i et le raccord C^0 des fonctions de base. Ceci conduit, pour un raccord géométrique C^m , $m \geq 0$, à la régularité $\tilde{\alpha}(p) = \min(\tilde{\tau}(p), m + 1/p, (p+1)/p)$ où

$$\tilde{\alpha}(p) := \inf \{s : \tilde{V}_j(\Omega) \subset W^{s,p}\}. \quad (1.135)$$

La régularité de l'AMR primale est quand à elle limitée par le raccord des paramétrisations κ_i et celui des fonctions de base et donc $\alpha(p) = \min(\tau(p), (p+1)/p)$ où

$$\alpha(p) := \inf\{s : V_j(\Omega) \subset W^{s,p}\}. \quad (1.136)$$

Si l'on conserve le produit scalaire (1.133), la régularité de l'AMR biorthogonale engendrée par (1.132) est cette fois $\tilde{\alpha}(p) = \min(\tilde{\tau}(p), (p+1)/p)$. Mais la mesure de Lebesgue associée au produit scalaire (\cdot, \cdot) induit une norme $W^{s,p}$ équivalente uniquement sur l'intervalle $-(m+1/p) < s < m + (p+1)/p$ et l'on retrouve la même limitation pour les espaces duaux que précédemment.

Inégalités inverses et directes

On énonce les propriétés d'estimations directe et inverse des espaces $V_j(\Omega)$ et $\tilde{V}_j(\Omega)$ qui permettent l'application directe du Corollaire 1.1, et du Théorème 1.3, moyennant la remarque précédente concernant la dualité.

Lemme 1.4 *Soit $p \in [1, \infty]$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Si $\phi \in L^p$ et $\tilde{\phi} \in L^{p'}$ alors*

$$\left\| \sum_{x \in \mathcal{G}_{j,\Omega}} f_{j,x} \varphi_{j,x} \right\|_{L^p} \sim 2^{d(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})j} \|F_j\|_{L^p}, \quad \left\| \sum_{x \in \mathcal{G}_{j,\Omega}} \tilde{f}_{j,x} \tilde{\varphi}_{j,x} \right\|_{L^{p'}} \sim 2^{d(\frac{1}{2} - \frac{1}{p'})j} \|\tilde{F}_j\|_{L^{p'}}. \quad (1.137)$$

et les projecteurs $P_{j,\Omega}$

$$P_{j,\Omega} := \sum_{x \in \mathcal{G}_{j,\Omega}} (\cdot, \tilde{\varphi}_{j,x}) \varphi_{j,x}$$

(resp. $\tilde{P}_{j,\Omega}$) associés aux bases biorthogonales $\Phi_{j,\Omega}$, $\tilde{\Phi}_{j,\Omega}$ sont uniformément stables dans L^p (resp. $L^{p'}$).

Preuve. Elle est en tout point similaire à celle du lemme 3.5 sur la droite réelle. \square

Proposition 1.16 *Soit $p \in [1, \infty]$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Sous l'hypothèse $\tau(p) > 0$, on a l'estimation inverse*

$$\|f_j\|_{W^{s,p}} \lesssim 2^{js} \|f_j\|_{L^p}, \quad \text{pour tout } 0 \leq s < \alpha(p) \text{ et } f_j \in V_j(\Omega). \quad (1.138)$$

De même pour le choix de l'AMR duale de la proposition 1.15, si $\tilde{\tau}(p') > 0$ alors

$$\|\tilde{f}_j\|_{W^{s,p'}} \lesssim 2^{js} \|\tilde{f}_j\|_{L^{p'}}, \quad \text{pour tout } 0 \leq s < \tilde{\alpha}(p') \text{ et } \tilde{f}_j \in \tilde{V}_j(\Omega), \quad (1.139)$$

où $\tilde{\alpha}(p') = \min(\tilde{\tau}(p'), (p'+1)/p')$.

Preuve. Compte tenue de l'indépendance linéaire locale des fonctions d'échelle de $\Phi_{j,\Omega}$ (resp. $\tilde{\Phi}_{j,\Omega}$) (qui découle de la propriété des bases de fonctions d'échelle sur \mathbb{R} [76]), les bases $\Phi_{j,\Omega}$ (resp. $\tilde{\Phi}_{j,\Omega}$) sont stables dans L^p (resp. $L^{p'}$) (cf remarque 3.17. La preuve est alors en tout point similaire à celle de la proposition 3.17 établie sur la droite réelle dans l'Appendice 2. \square

On note $W_D^{s,p}(\Omega)$ la fermeture dans $W^{s,p}$ des fonctions régulières satisfaisant les conditions aux limites homogènes de Dirichlet sur Γ_D .

Proposition 1.17 *Soit $p \in [1, \infty]$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Sous les hypothèses $\phi \in L^p$ et $\tilde{\phi} \in L^{p'}$ on a les estimations directes*

$$\begin{cases} \|f - P_{j,\Omega}f\|_{L^p} \lesssim 2^{-js} \|f\|_{W^{s,p}}, \text{ pour tout } 0 \leq s \leq n \text{ et } f \in W_D^{s,p}(\Omega). \\ \|f - \tilde{P}_{j,\Omega}f\|_{L^{p'}} \lesssim 2^{-js} \|f\|_{W^{s,p'}}, \text{ pour tout } 0 \leq s \leq \tilde{n} \text{ et } f \in W_D^{s,p'}(\Omega). \end{cases} \quad (1.140)$$

Preuve. Classiquement, si l'on suppose en outre la fonction f dans $W^{s,p}$ pour $s > 1/p$ de façon à pouvoir définir la trace sur les $d-1$ interfaces de la décomposition, on peut démontrer le résultat plus fort suivant (voir [19] où la preuve est écrite pour $p = 2$ mais se généralise facilement quelque soit p): pour toute fonction f telle que $f|_{\Omega_i} \in W_D^{s,p}(\Omega_i)$, $\forall i = 1, \dots, N$ et $1/p \leq s \leq n$ alors

$$\|f - P_{j,\Omega}f\|_{L^p} \lesssim 2^{-js} \left(\sum_{i=1}^N \|f\|_{W^{s,p}(\Omega_i)} \right).$$

Pour $s = 0$, le résultat traduit simplement la stabilité des projecteurs et pour $s \in]0, 1/p]$, $p \neq 1$ il s'en déduit par interpolation. Pour $p = 1$ il faut supposer $n \geq 2$. Alors pour $s = 1$ on obtient en fait par interpolation l'espace de Besov $B_{1,1}^1$ qui diffère de l'espace $W^{1,1}$ mais ne change en rien l'application du Théorème de caractérisation 1.4. Le cas $n = 1$ ne concerne en pratique que le générateur $\phi = \chi_{]0,1]}$ pour lequel la discrétisation obtenue est constituée d'éléments finis de type \mathbb{Q}_0 pour lesquels les estimations sont classiques. \square

Les estimations directes et inverses pour $p < 1$ en norme Besov $B_{p,p}^s$ restent vraies moyennant pour les estimations directes, l'hypothèse d'injection de Sobolev: pour un r tel que $\phi \in L^r$, $\tilde{\phi} \in L^{r'}$ avec $r \in [1, \infty]$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$, alors $\frac{s}{d} + \frac{1}{p} > \frac{1}{r}$. Elles s'écrivent comme sur la droite réelle (Appendice 2) et l'on renvoie au § III de [26] pour leur démonstration. Le Théorème de caractérisation 1.4 s'applique alors directement.

Compression. Pour obtenir les propriétés de compression des fonctions dans la base d'ondelettes (par exemple primale Ψ_Ω) il n'est plus cette fois possible (au voisinage

des interfaces de la décomposition) de se ramener au domaine de référence, dans la mesure où certaines parmi les ondelettes aux interfaces seront supportées sur plusieurs sous domaines. En revanche elles vont se déduire des propriétés d'approximation locale des espaces V_j . Il ressort de la démonstration de la proposition 1.17 (cf [19]), que les projecteurs $P_{j,\Omega}$ satisfont une propriété d'approximation locale (voir aussi en Appendice 2 la preuve de la proposition 3.16) du type

$$\|f - P_{j,\Omega}f\|_{L^p(\Omega_{j,x})} \lesssim 2^{-js} \|f\|_{W^{s,p}(\bar{\Omega}_{j,x})}, \quad \forall 0 \leq s \leq n \text{ et } f \in W_D^{s,p}(\bar{\Omega}_{j,x}). \quad (1.141)$$

où $\Omega_{j,x}$ et $\bar{\Omega}_{j,x}$ sont des voisinages du point $x \in \mathcal{G}_j$ de diamètres $\sim 2^{-j}$ et qui intersectent les sous domaines Ω_i pour $i \in I(x)$.

En anticipant sur la construction présentée ci-dessous, les ondelettes $\tilde{\psi}_\lambda$, $|\lambda| = j$ sont supportées dans des voisinages du type $\Omega_{j,x}$ et sont par définition orthogonales aux espaces $V_j(\Omega)$ pour le produit scalaire (\cdot, \cdot) . On en déduit que pour $p \in [1, \infty]$ tel que $\tilde{\phi} \in L^{p'}$ et $\phi \in L^p$, on a pour tout $0 \leq s \leq n$ et $f \in W_D^{s,p}(\bar{\Omega}_{j,x})$

$$\begin{aligned} (f, \tilde{\psi}_\lambda) &= (f - P_{j,\Omega}f, \tilde{\psi}_\lambda) \\ &\lesssim \|f - P_{j,\Omega}f\|_{L^p(\Omega_{j,x})} \|\tilde{\psi}_\lambda\|_{L^{p'}} \\ &\lesssim 2^{-js} 2^{-d(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})j} \|f\|_{W^{s,p}(\bar{\Omega}_{j,x})}. \end{aligned} \quad (1.142)$$

La même propriété s'écrit symétriquement dans la base duale $\tilde{\Psi}_\Omega$, i.e. pour les produits scalaires (f, ψ_λ) , avec les mêmes hypothèses sur les conditions aux limites de la fonction f . Du fait de ces conditions aux limites, la compression des opérateurs en représentation de Galerkin dans la base Ψ_Ω ne sera pas optimale au voisinage de Γ_D .

Pour y remédier il faudrait pouvoir construire une AMR duale de $V_j(\Omega)$ sans conditions aux limites. C'est partiellement possible en renonçant au raccord C^0 de l'AMR duale, ce qui n'est restrictif du point de la stabilité de la base primale Ψ_Ω que pour un générateur $\tilde{\phi}$ continu et un raccord géométrique C^m , $m \geq 1$. Il suffit de considérer les choix d'AMR sur l'intervalle (1.99)

$$(\Phi_j^{\delta, \text{CL}}, \tilde{\Phi}_j^{\delta, \widetilde{\text{CL}}})$$

avec $\text{CL} \in \mathcal{B}$, $\tilde{\delta}_\varepsilon = \delta_\varepsilon + \text{CL}_\varepsilon + 1$, $\varepsilon = 0, 1$ et dans tous les cas $\widetilde{\text{CL}} = (-1, -1)$. La proposition 1.15 est alors inchangée. Cette fois la perte des propriétés optimales de compression ne concerne que le voisinage des p -faces de $\Gamma_D \cap \partial\Omega_i$ pour $p \leq d-2$. Ce choix est donc meilleur pour les propriétés de compression mais la construction des bases d'ondelettes associées est rendue plus délicate par la perte de symétrie, bien que la même méthodologie proposée ci-dessous s'applique.

Construction des bases d'ondelettes

Nous allons à présent introduire une nouvelle technique de construction des bases d'ondelettes biorthogonales $\Psi_{j,\Omega}$ et $\tilde{\Psi}_{j,\Omega}$ associées aux espaces complémentaires

$$W_j(\Omega) = V_{j+1}(\Omega) \cap (\tilde{V}_j(\Omega))^\perp \text{ et } \tilde{W}_j(\Omega) = \tilde{V}_{j+1}(\Omega) \cap V_j(\Omega)^\perp.$$

Le principe consiste, comme pour la construction des ondelettes sur l'intervalle, à définir dans un premier temps une complétion $\Psi_{j,\Omega}^\sharp$ de $\Phi_{j,\Omega}$ dans $V_{j+1}(\Omega)$ et à soustraire ensuite la projection grossière $P_{j,\Omega}$, de sorte que

$$\Psi_{j,\Omega} = (I - P_{j,\Omega})\Psi_{j,\Omega}^\sharp. \quad (1.143)$$

La complétion $\Psi_{j,\Omega}^\sharp$ (resp. $\tilde{\Psi}_{j,\Omega}^\sharp$) est construite à partir des fonctions d'échelles Φ_{j,Ω_i} (resp. $\tilde{\Phi}_{j,\Omega_i}$) (1.127) et des ondelettes associées Ψ_{j,Ω_i} (resp. $\tilde{\Psi}_{j,\Omega_i}$) sur chacun des sous domaines de telle façon que la correction (1.143) n'affecte que les interfaces de la décomposition.

Moyennant une construction symétrique pour la base duale on obtiendra des bases biorthogonales locales et donc des bases de Riesz.

La construction est présentée à partir de l'exemple du domaine en L figure 1.18, ce qui permettra d'alléger les notations, mais les principes dégagés s'appliquent au cas général quelque soit la dimension d . On étudie ensuite la construction de manière exhaustive dans le cas d'un domaine bidimensionnel.

La définition suivante introduit une hiérarchie naturelle dans la définition des interfaces de la décomposition qui s'avérera essentielle pour la suite.

Définition 1.4 Interfaces. *On appelle $(d - 1)$ -interface de la décomposition de domaine $(\Omega_i, \kappa_i)_{i=1,\dots,N}$, une $(d - 1)$ -face commune à deux sous domaines Ω_i et Ω_l . Par récurrence on définit alors, pour $0 \leq p \leq d - 2$, $d \geq 2$, les p -interfaces comme étant les p -face communes à au moins deux $(p + 1)$ -interfaces.*

Pour $d = 1, 2, 3$ on emploiera la terminologie usuelle suivante. Pour $d = 1$ les 0 -interfaces sont appelées faces ou sommets. Pour $d = 2$ les 1 -interfaces sont les faces et les 0 -interfaces les sommets. Pour $d = 3$ les 2 -interfaces sont les faces, les 1 -interfaces les côtés et les 0 -interfaces les sommets. Afin de compléter la hiérarchie, par abus de notations, $p = d$ indiquera les sous domaines Ω_i .

Dans l'exemple du domaine en L on adoptera les notations suivantes (voir figure 1.18).

$$\Omega_1 = I_1 \times I_4, \quad \Omega_2 = I_2 \times I_4, \quad \Omega_3 = I_2 \times I_3.$$

Ce domaine comporte 2 faces I_2 et I_4 et un sommet V . Les transformations κ_i du domaine de référence $\hat{\Omega} = \Omega_1$ sur les sous domaines Ω_2 et Ω_3 sont de simples translations. Soient $(X, Y) \in \{N, D\}^2$, on notera

$$(\Phi_{j,I}^{X,Y}, \tilde{\Phi}_{j,I}^{X,Y}), \quad (\Psi_{j,I}^{X,Y}, \tilde{\Psi}_{j,I}^{X,Y})$$

les bases biorthogonales de fonctions d'échelle et d'ondelettes sur l'intervalle I où les conditions aux limites aux extrémités gauche et droite ou basse et haute des intervalles $I = I_1, I_2, I_3, I_4$ sont indiquées par D pour Dirichlet homogène et N pour

Neumann i.e. l'absence de conditions aux limites. Les espaces correspondant seront notés $V_j^{X,Y}(I)$, $\tilde{V}_j^{X,Y}(I)$ et $W_j^{X,Y}(I)$, $\tilde{W}_j^{X,Y}(I)$. Les fonctions de bases s'écrivent conformément aux propositions 1.9, 1.10, soit par exemple pour $(X, Y) = (D, N)$

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_{j,I}^{D,N} = \{\varphi_{j,1}^I, \dots, \varphi_{j,d_j}^I\} \\ \tilde{\Phi}_{j,I}^{D,N} = \{\tilde{\varphi}_{j,1}^I, \dots, \tilde{\varphi}_{j,d_j}^I\} \end{array} \right\} \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} \Psi_{j,I}^{D,N} = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{j,0}^I - \varphi_{j,0}^I), \psi_{j,1}^I, \dots, \psi_{j,2j-1}^I\} \\ \tilde{\Psi}_{j,I}^{D,N} = \{\frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{\psi}_{j,0}^I - \tilde{\varphi}_{j,0}^I), \tilde{\psi}_{j,1}^I, \dots, \tilde{\psi}_{j,2j-1}^I\}. \end{array} \right. \quad (1.144)$$

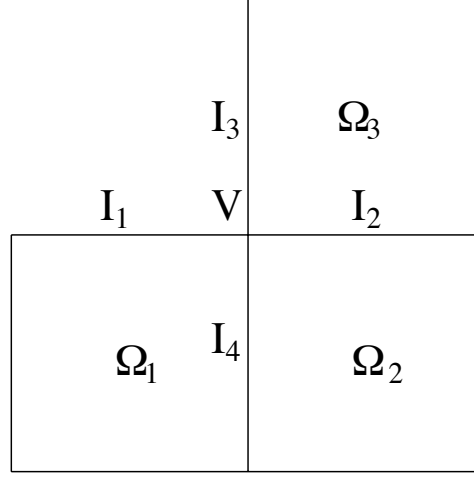


FIG. 1.18 – *Domaine en L comportant un sommet V et deux faces I₄ et I₂.*

Les constructions étant bien sûr symétriques pour les bases primales et duales, on va considérer par exemple la base primale $\Psi_{j,\Omega}$.

Etape 1. On commence par écrire la base $\Phi_{j,\Omega}$ en la décomposant en p-blocs selon la hiérarchie des p-interfaces. On considère donc tout d'abord pour $p = d$ les fonctions d'échelle qui s'annulent sur tous les p-interfaces pour $p \leq d - 1$ i.e. liés à chacun des sous domaines Ω_i , $i = 1, \dots, N$. Puis pour $p = d - 1, \dots, 0$, on considère les fonctions d'échelle non “nulles” sur les p-interfaces mais “nulles” sur les q-interfaces pour $q \leq p - 1$. Dans le cas du domaine en L on obtient la partition

$$\Phi_{j,\Omega} = \left\{ \begin{array}{l} \Phi_{j,I_1}^{N,D} \otimes \Phi_{j,I_4}^{N,N} \cup \Phi_{j,I_2}^{N,N} \otimes \Phi_{j,I_3}^{D,N} \cup \Phi_{j,I_2}^{D,N} \otimes \Phi_{j,I_4}^{N,D} \\ \cup \{\varphi_{j,d_j}^{I_1} + \varphi_{j,0}^{I_2}\} \otimes \Phi_{j,I_4}^{N,D} \cup \Phi_{j,I_2}^{D,N} \otimes \{\varphi_{j,d_j}^{I_4} + \varphi_{j,0}^{I_3}\} \\ \cup \{\varphi_{j,d_j}^{I_1} \otimes \varphi_{j,d_j}^{I_4} + \varphi_{j,0}^{I_2} \otimes \varphi_{j,d_j}^{I_4} + \varphi_{j,0}^{I_2} \otimes \varphi_{j,0}^{I_3}\}. \end{array} \right. \quad (1.145)$$

Etape 2. On applique à chacun des p-blocs précédents de $\Phi_{j+1,\Omega}$, $p = d, \dots, 0$, les décompositions canoniques tensorielles p-dimensionnelles de mêmes conditions aux limites.

Proposition 1.18 *En excluant les fonctions d'échelle, on obtient ainsi une com-*

plétion $\Psi_{j,\Omega}^\sharp$ de $\Phi_{j,\Omega}$ dans $V_{j+1}(\Omega)$. Dans notre exemple du domaine en L elle s'écrit

$$\Psi_{j,\Omega}^\sharp = \left\{ \begin{array}{l} \Psi_{j,I_1}^{N,D} \otimes \Psi_{j,I_4}^{N,N} \cup \Psi_{j,I_1}^{N,D} \otimes \Phi_{j,I_4}^{N,N} \cup \Phi_{j,I_1}^{N,D} \otimes \Psi_{j,I_4}^{N,N} \\ \cup \Phi_{j,I_2}^{N,N} \otimes \Psi_{j,I_3}^{D,N} \cup \Psi_{j,I_2}^{N,N} \otimes \Phi_{j,I_3}^{D,N} \cup \Psi_{j,I_2}^{N,N} \otimes \Psi_{j,I_3}^{D,N} \\ \cup \Phi_{j,I_2}^{D,N} \otimes \Psi_{j,I_4}^{N,D} \cup \Psi_{j,I_2}^{D,N} \otimes \Phi_{j,I_4}^{N,D} \cup \Psi_{j,I_2}^{D,N} \otimes \Psi_{j,I_4}^{N,D} \\ \cup \{\varphi_{j,d_j}^{I_1} + \varphi_{j,0}^{I_2}\} \otimes \Psi_{j,I_4}^{N,D} \cup \Psi_{j,I_2}^{D,N} \otimes \{\varphi_{j,d_j}^{I_4} + \varphi_{j,0}^{I_3}\}. \end{array} \right. \quad (1.146)$$

Preuve. Par construction on obtient une famille libre de $V_{j+1}(\Omega)$ telle que

$$\#\Psi_{j,\Omega}^\sharp = \#\Phi_{j+1,\Omega} - \#\Phi_{j,\Omega}.$$

Montrons que la famille $\Phi_{j,\Omega} \cup \Psi_{j,\Omega}^\sharp$ est génératrice de $V_{j+1}(\Omega)$. On commence par constater que l'on génère les fonctions d'échelle de $V_{j+1}(\Omega)$ qui "s'annulent" aux p-interfaces pour tous $p = d-1, \dots, 0$, simplement en considérant la décomposition des d-blocs sur chacun des sous domaines Ω_i indépendamment.

On poursuit avec les p-interfaces successivement pour $p = d-1, \dots, 0$ en montrant que l'on génère les fonctions de $V_{j+1}(\Omega)$ "s'annulant" sur les q-interfaces pour $q \leq p-1$. L'argument se voit clairement en considérant l'exemple de la face I_4 du domaine en L ($p = d-1 = 1$). Il faut montrer que l'on génère les fonctions $(\varphi_{j+1,d_j}^{I_1} + \varphi_{j+1,0}^{I_2}) \otimes V_{j+1}^{N,D}(I_4)$. On remarque alors que

$$(\varphi_{j+1,d_j}^{I_1} - \sqrt{2}\varphi_{j,d_j}^{I_1} + \varphi_{j+1,0}^{I_2} - \sqrt{2}\varphi_{j,0}^{I_2}) \otimes V_{j+1}^{N,D}(I_4)$$

"s'annule" aux q-interfaces pour $q \leq p$ et sont donc engendrées. Il reste donc à engendrer les fonctions $(\varphi_{j,d_j}^{I_1} + \varphi_{j,0}^{I_2}) \otimes V_{j+1}^{N,D}(I_4)$ qui sont justement obtenues par la 1-décomposition canonique

$$(\varphi_{j,d_j}^{I_1} + \varphi_{j,0}^{I_2}) \otimes V_{j+1}^{N,D}(I_4) = (\varphi_{j,d_j}^{I_1} + \varphi_{j,0}^{I_2}) \otimes V_j^{N,D}(I_4) \oplus (\varphi_{j,d_j}^{I_1} + \varphi_{j,0}^{I_2}) \otimes W_j^{N,D}(I_4).$$

L'argument est le même pour $1 \leq p \leq d-1$. Enfin aux sommets, considérant la fonction d'échelle $\varphi_{j+1,V}$ au niveau $j+1$ associée à un sommet V , on retranche la fonction d'échelle $\sqrt{2}\varphi_{j,V}$ au niveau j et la différence "s'annule" à toutes les 0-interfaces et est donc générée. \square

Etape 3. La construction de la complétion $\tilde{\Psi}_{j,\Omega}^\sharp$ de $\tilde{\Phi}_{j,\Omega}$ dans $\tilde{V}_{j+1}(\Omega)$ s'effectue de façon entièrement symétrique ($\tilde{\Psi}_{j,\Omega}^\sharp$ s'écrit comme $\Psi_{j,\Omega}^\sharp$ en rajoutant les indices $\tilde{}$). On a alors la proposition suivante.

Proposition 1.19 *Les bases*

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_{j,\Omega} = (I - P_{j,\Omega}) \Psi_{j,\Omega}^\sharp, \\ \tilde{\Psi}_{j,\Omega} = (I - \tilde{P}_{j,\Omega}) \tilde{\Psi}_{j,\Omega}^\sharp, \end{array} \right. \quad (1.147)$$

sont des bases de Riesz (uniformes) locales des espaces $W_j(\Omega)$ et $\widetilde{W}_j(\Omega)$. En outre, il va suffire d'effectuer les corrections grossières (1.147) et les biorthogonalisations de ces bases sur un nombre fini de fonctions, indépendant de j , pour chaque p -interface, $p = d - 1, \dots, 0$. Pour une p -interface, le calcul se ramène en effet par produit tensoriel à celui d'une 0 -interface en dimension $d - p$.

Preuve. La preuve est constructive.

La hiérarchie des p -interfaces pour $p = d, \dots, 0$ définit une partition de la grille \mathcal{G}_j (1.128). Pour une p -interface F , on notera $\mathcal{G}_j(F)$ le sous ensemble de \mathcal{G}_j associé à cette partition. Il sera commode d'associer à chaque ondelette $\psi_{j,k}$ (ou $\tilde{\psi}_{j,k}$), $k = 0, \dots, 2^j - 1$, sur l'intervalle de référence, un point $\eta_{j,k}$ de l'intervalle $[0, 1]$. Dans la mesure où seuls les interfaces nous intéressent, on imposera ici seulement $\eta_{j,0} = 0$, $\eta_{j,2^j-1} = 1$, alors que les autres $2^j - 2$ points sont choisis arbitrairement dans $]0, 1[$. Ainsi on peut associer, par produit et par les difféomorphismes k_i , à chaque fonction de $\Psi_{j,\Omega}^\sharp$ (ou $\tilde{\Psi}_{j,\Omega}^\sharp$), un point de Ω . Bien sûr, plusieurs fonctions distinctes peuvent être associées au même point.

Soient \mathcal{F}_p l'ensemble des p -interfaces et

$$\mathcal{F} = \bigcup_{p=0}^{d-1} \mathcal{F}_p.$$

On a alors les propriétés suivantes: seules les fonctions de $\Psi_{j,\Omega}^\sharp$ associées aux points de

$$\bigcup_{F \in \mathcal{F}} \mathcal{G}_j(F) / \bar{\Gamma}_D$$

font l'objet d'une correction de grille grossière. Soit x un point de $\bigcup_{F \in \mathcal{F}} \mathcal{G}_j(F) / \bar{\Gamma}_D \subset \mathcal{G}_{j,\Omega}$ et $\varphi_{j,x}$, $\tilde{\varphi}_{j,x}$ les fonctions d'échelle biorthogonales associées au point x . La correction des fonctions f de $\Psi_{j,\Omega}^\sharp$ concernées s'écrit simplement

$$f - (f, \tilde{\varphi}_{j,x}) \varphi_{j,x}. \quad (1.148)$$

En particulier cette correction est bien sûr locale.

Après correction, seules les ondelettes primales et duales associées aux points de la grille

$$\bigcup_{F \in \mathcal{F}} \mathcal{G}_j(F)$$

doivent être biorthogonalisées. En outre la biorthogonalisation découple pour chaque interface i.e. pour chacun des sous ensembles de fonctions associées aux points de $\mathcal{G}_j(F)$. Les ondelettes correspondantes seront dites associées à l'interface F .

On note $\Psi_{j,F}$ et $\tilde{\Psi}_{j,F}$ les ondelettes (avant biorthogonalisation) associées au p -interface F , avec $\#\Psi_{j,F} = \#\tilde{\Psi}_{j,F} \sim 2^{jp}$. Leur construction se réduit par tensorisation

dans les directions de l'interface, à la construction des ondelettes associées à un 0-interface en dimension $d - p$ (i.e dans les directions orthogonales à l'interface). De même l'inversion de la matrice de biorthogonalisation $C_F = (\Psi_{j,F}, \tilde{\Psi}_{j,F})$ se réduit à inverser une matrice de dimension indépendante de j qui n'est autre que la matrice de biorthogonalisation des ondelettes du 0-interface précédent. Noter que ces matrices sont nécessairement inversibles car les espaces d'ondelettes $W_j(\Omega)$ et $\tilde{W}_j(\Omega)$ sont biorthogonaux (cf lemme 1.2).

Ces propriétés prouvent en particulier que les bases $\Psi_{j,\Omega}$ et $\tilde{\Psi}_{j,\Omega}$ sont des bases de Riesz locales et que la biorthogonalisation conserve la localité. In fine on obtient - les ondelettes (par exemple primales) associées aux interfaces qui se déduisent par produit tensoriels de calculs faisant intervenir uniquement les ondelettes et fonctions d'échelle sur l'intervalle de référence $[0, 1]$ $\varphi_{j,0}$, φ_{j,d_j} , $\psi_{j,0}$, $\psi_{j,2^j-1}$ et les paramétrisations κ_i .
- Les ondelettes restantes associées à chaque sous domaine Ω_i et appartenant à Ψ_{j,Ω_i} .
□

Remarque 1.24 *Le choix des ondelettes aux interfaces n'est pas unique. En particulier, la biorthogonalisation des ondelettes primales $\Psi_{j,F}$ et duales $\tilde{\Psi}_{j,F}$ laisse une latitude de choix que l'on peut exploiter afin d'imposer des propriétés supplémentaires comme celle de symétrie ou de support minimum (voir [20] pour une étude détaillée). Si l'on note K_F et \tilde{K}_F les matrices de changement de base telles que $\Psi_{j,F}^{new} = K_F \Psi_{j,F}$ et $\tilde{\Psi}_{j,F}^{new} = \tilde{K}_F \tilde{\Psi}_{j,F}$, alors elles doivent vérifier la relation*

$$K_F C_F (\tilde{K}_F)^T = I_F.$$

Noter qu'il est toujours en particulier possible de définir les ondelettes primales et duales par les mêmes formules (à l'indice \sim près) dans la mesure où la matrice C_F est symétrique et où les formules sont bien sûr identiques avant l'étape de biorthogonalisation.

Preuve. La matrice C_F peut s'exprimer comme la matrice des produits scalaires (f_i, \tilde{f}_l) , où les fonctions f_i et \tilde{f}_l sont des combinaisons linéaires $f_i = \sum_{\alpha} c_{\alpha}^i \psi_{\alpha}$ et $\tilde{f}_l = \sum_{\alpha} \tilde{c}_{\alpha}^l \tilde{\psi}_{\alpha}$ avec la propriété $(\psi_{\alpha}, \tilde{\psi}_{\alpha'}) = (\tilde{\psi}_{\alpha}, \psi_{\alpha'}) = 0$ ou 1. On en déduit que la matrice C_F est symétrique. □

Exemple du domaine en L. Afin d'illustrer la preuve constructive précédente, on va construire les ondelettes associées à la face I_4 et au sommet V du domaine en L. On considère tout d'abord les conditions aux limites $\Gamma_N = \Gamma$ puis ensuite $\Gamma_D = \Gamma$.

La construction pour la face I_4 se ramène à considérer dans un premier temps le 0-interface en dimension $2 - 1 = 1$ constitué par l'union des intervalles I_1 et I_2

qui s'intersectent au sommet V . Deux ondelettes de $\Psi_{j,I_1 \cup I_2}^\sharp$ sont concernées par la correction de grille grossière à savoir celles qui s'écrivent à l'aide des fonctions d'échelle et des ondelettes $\varphi_{j,d_j}^{I_1}, \varphi_{j,0}^{I_2}, \psi_{j,2^j-1}^{I_1}, \psi_{j,0}^{I_2}$.

$$\psi_{j,2^j-1}^{I_1} - \varphi_{j,2^j-1}^{I_1} \text{ et } \psi_{j,0}^{I_2} - \varphi_{j,0}^{I_2}.$$

La correction de grille grossière de l'une quelconque f de ces fonctions s'écrit simplement

$$f - \frac{1}{2}(f, \tilde{\varphi}_{j,d_j}^{I_1} + \tilde{\varphi}_{j,0}^{I_2})(\varphi_{j,d_j}^{I_1} + \varphi_{j,0}^{I_2}).$$

On obtient donc les ondelettes primales

$$\psi_{j,2^j-1}^{I_1} + \frac{1}{2}(\varphi_{j,0}^{I_2} - \varphi_{j,d_j}^{I_1}) \text{ et } \psi_{j,0}^{I_2} + \frac{1}{2}(\varphi_{j,d_j}^{I_1} - \varphi_{j,0}^{I_2})$$

et de même pour les ondelettes duales avec les indices $\tilde{\cdot}$. La matrice de biorthogonalisation est symétrique et admet comme vecteurs propres $(1, 1)$ et $(1, -1)$ ce qui conduit au choix des ondelettes biorthogonales

$$\begin{cases} \psi_{j,0}^{I_1, I_2} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{j,2^j-1}^{I_1} + \psi_{j,0}^{I_2}) \\ \psi_{j,1}^{I_1, I_2} = \frac{1}{2}(\psi_{j,2^j-1}^{I_1} - \varphi_{j,d_j}^{I_1} - \psi_{j,0}^{I_2} + \varphi_{j,0}^{I_2}) \end{cases} \quad (1.149)$$

pour les primales et de même pour les duales avec l'indice $\tilde{\cdot}$.

Il est alors facile d'en déduire les ondelettes associées à la face I_4 par tensorisation des ondelettes précédentes $\psi_{j,0}^{I_1, I_2}, \psi_{j,1}^{I_1, I_2}$ et de la fonction d'échelle $\frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_{j,d_j}^{I_1} + \varphi_{j,0}^{I_2})$ avec les bases $\Phi_{j,I_4}^{N,D}$ et $\{\psi_{j,k}^{I_4}, k = 0, \dots, 2^j - 2\}$. On obtient les ondelettes primales

$$\begin{cases} \psi_{j,0}^{I_1, I_2} \otimes \varphi_{j,k}^{I_4} \text{ et } \psi_{j,1}^{I_1, I_2} \otimes \varphi_{j,k}^{I_4}, k = 0, \dots, d_j - 1, \\ \psi_{j,0}^{I_1, I_2} \otimes \psi_{j,k}^{I_4}, \psi_{j,1}^{I_1, I_2} \otimes \psi_{j,k}^{I_4} \text{ et } \frac{1}{\sqrt{2}}(\varphi_{j,d_j}^{I_1} + \varphi_{j,0}^{I_2}) \otimes \psi_{j,k}^{I_4}, k = 0, \dots, 2^j - 2. \end{cases} \quad (1.150)$$

et de même pour les ondelettes duales avec l'indice $\tilde{\cdot}$.

La même démarche s'applique à la construction des ondelettes associées au sommet V . On retient tout d'abord les 7 fonctions de $\Psi_{j,\Omega}^\sharp$ qui s'écrivent exclusivement à l'aide des fonctions $\varphi_{j,0}^{I_2}, \psi_{j,0}^{I_2}, \varphi_{j,0}^{I_3}, \psi_{j,0}^{I_3}, \varphi_{j,d_j}^{I_1}, \psi_{j,2^j-1}^{I_1}, \varphi_{j,d_j}^{I_4}, \psi_{j,2^j-1}^{I_4}$ à savoir

$$\begin{aligned} & (\psi_{j,0}^{I_2} - \varphi_{j,0}^{I_2}) \otimes (\psi_{j,2^j-1}^{I_4} - \varphi_{j,d_j}^{I_4}), \\ & (\psi_{j,2^j-1}^{I_1} - \varphi_{j,d_j}^{I_1}) \otimes \varphi_{j,d_j}^{I_4}, (\psi_{j,2^j-1}^{I_1} - \varphi_{j,d_j}^{I_1}) \otimes \psi_{j,2^j-1}^{I_4}, \\ & \varphi_{j,0}^{I_2} \otimes (\psi_{j,0}^{I_3} - \varphi_{j,0}^{I_3}), \psi_{j,0}^{I_2} \otimes (\psi_{j,0}^{I_3} - \varphi_{j,0}^{I_3}), \\ & (\psi_{j,0}^{I_2} - \varphi_{j,0}^{I_2}) \otimes (\varphi_{j,0}^{I_3} + \varphi_{j,d_j}^{I_4}), (\varphi_{j,d_j}^{I_1} + \varphi_{j,0}^{I_2}) \otimes (\psi_{j,2^j-1}^{I_4} - \varphi_{j,d_j}^{I_4}) \end{aligned}$$

La correction de grille grossière appliquée à l'une quelconque f de ces fonctions s'écrit

$$f - (f, \tilde{\varphi}_{j,V}) \varphi_{j,V},$$

où $\varphi_{j,V}$ et $\tilde{\varphi}_{j,V}$ sont les fonctions d'échelle biorthogonales associées au sommet V. Après correction et biorthogonalisation on obtient par exemple les expressions suivantes identiques des ondelettes primales et duales (moyennant l'indice \sim pour ces dernières).

$$\left\{ \begin{array}{l} \bullet \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\psi_{j,2^j-1}^{I_1} \otimes \psi_{j,2^j-1}^{I_4} + \psi_{j,0}^{I_2} \otimes \psi_{j,2^j-1}^{I_4} + \psi_{j,0}^{I_2} \otimes \psi_{j,0}^{I_3} \right) \\ \bullet \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\psi_{j,2^j-1}^{I_1} \otimes \varphi_{j,d_j}^{I_4} + \psi_{j,0}^{I_2} \otimes \varphi_{j,d_j}^{I_4} + \psi_{j,0}^{I_2} \otimes \varphi_{j,0}^{I_3} \right) \\ \bullet \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\varphi_{j,d_j}^{I_1} \otimes \psi_{j,2^j-1}^{I_4} + \varphi_{j,0}^{I_2} \otimes \psi_{j,2^j-1}^{I_4} + \varphi_{j,0}^{I_2} \otimes \psi_{j,0}^{I_3} \right) \\ \bullet \frac{1}{4} \left((\psi_{j,0}^{I_2} - \varphi_{j,0}^{I_2}) \otimes (\psi_{j,0}^{I_3} + \varphi_{j,0}^{I_3}) + (\psi_{j,0}^{I_2} - \varphi_{j,0}^{I_2}) \otimes (\psi_{j,2^j-1}^{I_4} + \varphi_{j,d_j}^{I_4}) \right. \\ \quad \left. - 2(\psi_{j,2^j-1}^{I_1} - \varphi_{j,d_j}^{I_1}) \otimes (\psi_{j,2^j-1}^{I_4} + \varphi_{j,d_j}^{I_4}) \right) \\ \bullet \frac{1}{4} \left(-2(\psi_{j,0}^{I_2} - \varphi_{j,0}^{I_2}) \otimes (\psi_{j,0}^{I_3} + \varphi_{j,0}^{I_3}) + (\psi_{j,0}^{I_2} + \varphi_{j,0}^{I_2}) \otimes (\psi_{j,2^j-1}^{I_4} - \varphi_{j,d_j}^{I_4}) \right. \\ \quad \left. + (\psi_{j,2^j-1}^{I_1} + \varphi_{j,d_j}^{I_1}) \otimes (\psi_{j,2^j-1}^{I_4} - \varphi_{j,d_j}^{I_4}) \right) \\ \bullet \frac{1}{4} \left((\psi_{j,0}^{I_2} - \varphi_{j,0}^{I_2}) \otimes (\psi_{j,0}^{I_3} - \varphi_{j,0}^{I_3}) - 2(\psi_{j,0}^{I_2} - \varphi_{j,0}^{I_2}) \otimes (\psi_{j,2^j-1}^{I_4} - \varphi_{j,d_j}^{I_4}) \right. \\ \quad \left. + (\psi_{j,2^j-1}^{I_1} - \varphi_{j,d_j}^{I_1}) \otimes (\psi_{j,2^j-1}^{I_4} - \varphi_{j,d_j}^{I_4}) \right) \\ \bullet \frac{1}{\sqrt{8}} \left(-(\psi_{j,0}^{I_2} - \varphi_{j,0}^{I_2}) \otimes (\psi_{j,0}^{I_3} - \varphi_{j,0}^{I_3}) + (\psi_{j,2^j-1}^{I_1} - \varphi_{j,d_j}^{I_1}) \otimes (\psi_{j,2^j-1}^{I_4} - \varphi_{j,d_j}^{I_4}) \right) \end{array} \right.$$

On termine l'exemple du domaine en L par le cas des ondelettes associées au sommet V avec conditions aux limites de Dirichlet sur $\Gamma_D = \Gamma$. Cette fois la base $\Phi_{j,\Omega}$ s'écrit

$$\Phi_{j,\Omega} = \left\{ \begin{array}{l} \Phi_{j,I_1}^{D,D} \otimes \Phi_{j,I_4}^{D,D} \cup \Phi_{j,I_2}^{D,D} \otimes \Phi_{j,I_3}^{D,D} \cup \Phi_{j,I_2}^{D,D} \otimes \Phi_{j,I_4}^{D,D} \\ \cup \{ \varphi_{j,d_j}^{I_1} + \varphi_{j,0}^{I_2} \} \otimes \Phi_{j,I_4}^{D,D} \cup \Phi_{j,I_2}^{D,D} \otimes \{ \varphi_{j,d_j}^{I_4} + \varphi_{j,0}^{I_3} \}. \end{array} \right. \quad (1.151)$$

La complétion $\Psi_{j,\Omega}^{0,\sharp}$ s'en déduit comme précédemment

$$\Psi_{j,\Omega}^{0,\sharp} = \left\{ \begin{array}{l} \Psi_{j,I_1}^{D,D} \otimes \Psi_{j,I_4}^{D,D} \cup \Psi_{j,I_1}^{D,D} \otimes \Phi_{j,I_4}^{D,D} \cup \Phi_{j,I_1}^{D,D} \otimes \Psi_{j,I_4}^{D,D} \\ \cup \Phi_{j,I_2}^{D,D} \otimes \Psi_{j,I_3}^{D,D} \cup \Psi_{j,I_2}^{D,D} \otimes \Phi_{j,I_3}^{D,D} \cup \Psi_{j,I_2}^{D,D} \otimes \Psi_{j,I_3}^{D,D} \\ \cup \Phi_{j,I_2}^{D,D} \otimes \Psi_{j,I_4}^{D,D} \cup \Psi_{j,I_2}^{D,D} \otimes \Phi_{j,I_4}^{D,D} \cup \Psi_{j,I_2}^{D,D} \otimes \Psi_{j,I_4}^{D,D} \\ \cup \{ \varphi_{j,d_j}^{I_1} + \varphi_{j,0}^{I_2} \} \otimes \Psi_{j,I_4}^{D,D} \cup \Psi_{j,I_2}^{D,D} \otimes \{ \varphi_{j,d_j}^{I_4} + \varphi_{j,0}^{I_3} \}. \end{array} \right. \quad (1.152)$$

Au sommet V on retient à nouveau les fonctions de $\Psi_{j,\Omega}^\sharp$ qui s'écrivent exclusivement à l'aide des fonctions $\varphi_{j,0}^{I_2}$, $\psi_{j,0}^{I_2}$, $\varphi_{j,0}^{I_3}$, $\psi_{j,0}^{I_3}$, $\varphi_{j,d_j}^{I_1}$, $\psi_{j,2^j-1}^{I_1}$, $\varphi_{j,d_j}^{I_4}$, $\psi_{j,2^j-1}^{I_4}$ à savoir ici les 5 fonctions

$$\left\{ \begin{array}{l} (\psi_{j,0}^{I_2} - \varphi_{j,0}^{I_2}) \otimes (\psi_{j,2^j-1}^{I_4} - \varphi_{j,d_j}^{I_4}) \\ (\psi_{j,2^j-1}^{I_1} - \varphi_{j,d_j}^{I_1}) \otimes (\psi_{j,2^j-1}^{I_4} - \varphi_{j,d_j}^{I_4}) \\ (\psi_{j,0}^{I_2} - \varphi_{j,0}^{I_2}) \otimes (\psi_{j,0}^{I_3} - \varphi_{j,0}^{I_3}) \\ (\psi_{j,0}^{I_2} - \varphi_{j,0}^{I_2}) \otimes (\varphi_{j,0}^{I_3} + \varphi_{j,d_j}^{I_4}) \\ (\varphi_{j,d_j}^{I_1} + \varphi_{j,0}^{I_2}) \otimes (\psi_{j,2^j-1}^{I_4} - \varphi_{j,d_j}^{I_4}) \end{array} \right. \quad (1.153)$$

En l'absence de fonction d'échelle associée au sommet V, il n'y a bien sûr pas de correction de grille grossière et il reste seulement à biorthogonaliser ces ondelettes et les ondelettes duales. Notre choix (voir figure 1.21 et § 2.1.3 pour le préconditionnement du laplacien) est de conserver les ondelettes primales (1.153) et donc de modifier en conséquence les ondelettes duales.

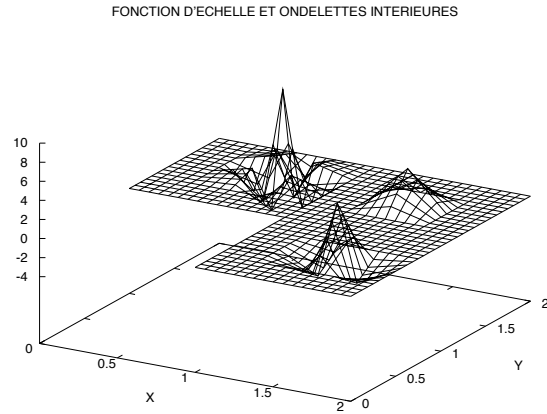


FIG. 1.19 – Pour les générateurs sur \mathbb{R} ($\phi^2, \psi^{2,2}$) et $j = 4$, fonction d'échelle $\phi_{j,k} \otimes \phi_{j,k}$ et ondelettes intérieures $\phi_{j,k} \otimes \psi_{j,k}, \psi_{j,k} \otimes \psi_{j,k}$ (pour $k = 2^{j-1}$).

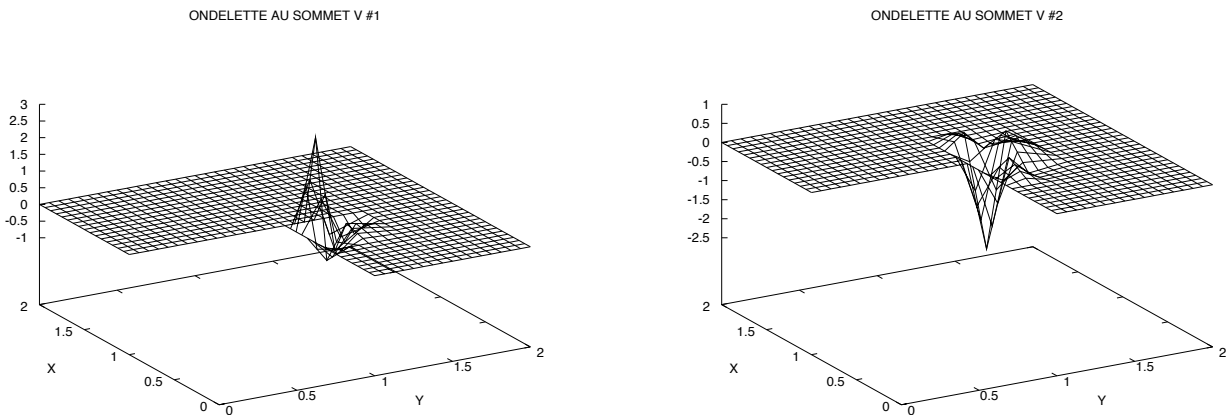


FIG. 1.20 – Pour les générateurs sur \mathbb{R} ($\phi^2, \psi^{2,2}$) et $j = 4$, deux des ondelettes (1.153) au sommet V avec conditions aux limites D-D, les 3 autres s'en déduisent par isométrie.

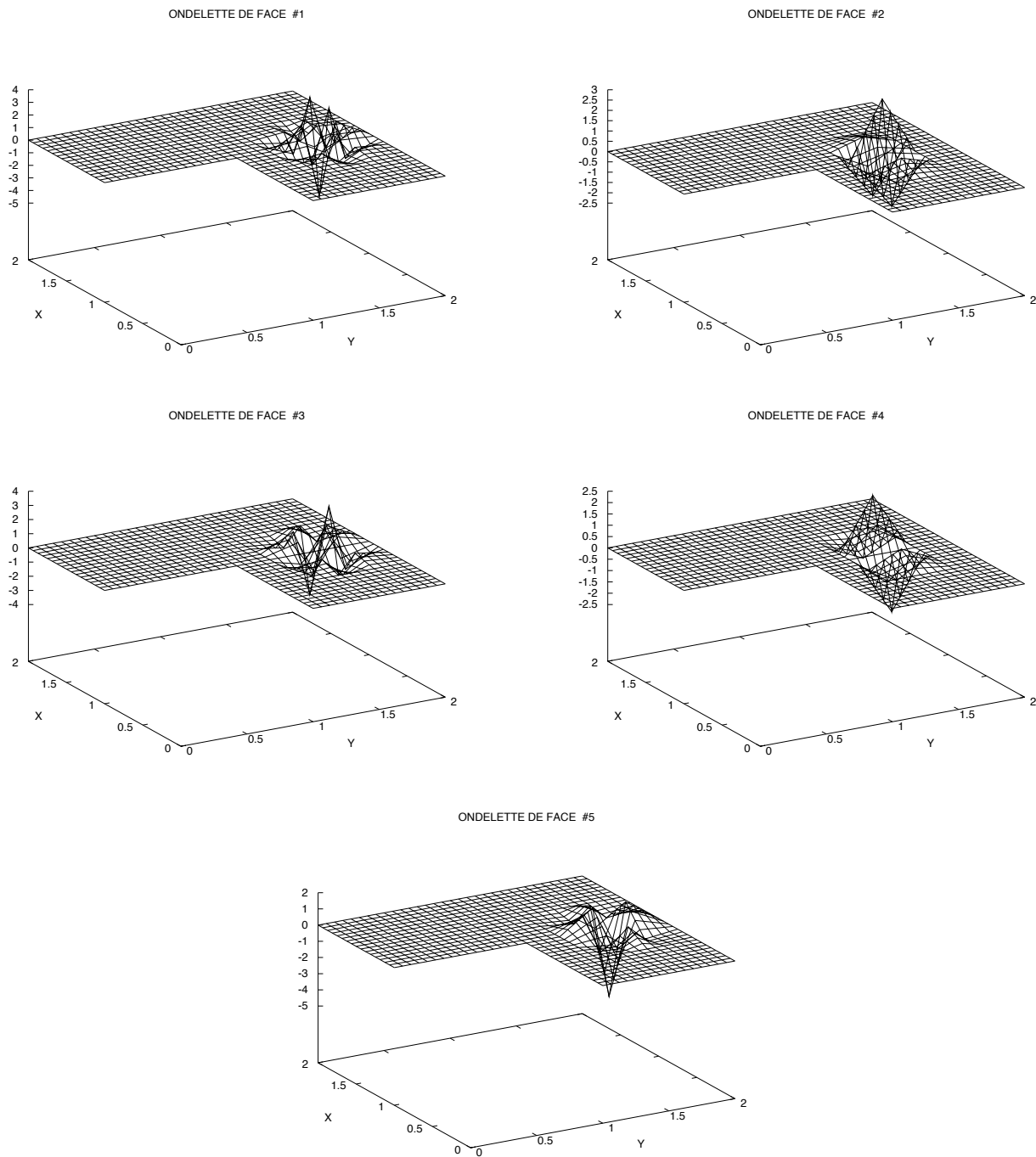


FIG. 1.21 – Pour les générateurs sur \mathbb{R} ($\phi^2, \psi^{2,2}$) et $j = 4$, les 5 ondelettes (1.150) de la face I_4 (pour $k = 2^{j-1}$).

Ondelettes aux interfaces d'un domaine bidimensionnel. Il nous faut construire les ondelettes aux 1-interfaces (faces F) et aux 0-interfaces (sommets V). Pour ces dernières on distinguera les *sommets intérieurs* $V \in \Omega$, des sommets frontières $V \in \Gamma$

pour lesquels il y a trois cas de figure: $V \in \Gamma_N$ (sommet $N - N$), $V \in \Gamma_D$ (sommet $D - D$) et $V \in \bar{\Gamma}_D \cap \bar{\Gamma}_N$ (sommet $N - D$).

Pour visualiser les ondelettes d'interfaces (cf figures 1.22 à 1.26) on convient cette fois, suivant [19], d'associer aux ondelettes sur l'intervalle de référence $[0, 1]$ les points $\eta_{j,k}$, $k = 0, \dots, 2^j - 1$ distincts des points $\xi_{j,k'}$, $k' = 0, \dots, d_j$ et tels que

$$\xi_{j,0} = 0 < \eta_{j,0} < \xi_{j,1} < \eta_{j,1} < \eta_{j,2} \dots < \eta_{j,2^j-2} < \eta_{j,2^j-1} < \xi_{j,d_j} = 1.$$

Noter que l'on associe le même point aux ondelettes $\psi_{j,0}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{j,0} - \phi_{j,0})$ (et de même au bord 1) i.e. indépendamment des conditions aux limites. On peut ainsi associer aux fonctions de $\Psi_{j,\Omega}^{\sharp}$ (donc aux ondelettes) et aux fonctions d'échelle, des points distincts de $\bar{\Omega}$.

Ondelettes de face. Sur le domaine de référence $\hat{\Omega} =]0, 1[^2$, on note $O = (0, 0)$, $A = (1, 0)$, $B = (0, 1)$ et \hat{I} l'intervalle OA . Etant donnée la décomposition de domaine $(\Omega_i, \kappa_i)_{i=1, \dots, N}$, on suppose que les sous domaines Ω_1 et Ω_2 ont la face commune $I = \bar{\Omega}_1 \cap \bar{\Omega}_2$. Par commodité d'écriture on peut convenir que

$$\kappa_1(\hat{I}) = \kappa_2(\hat{I}) = I.$$

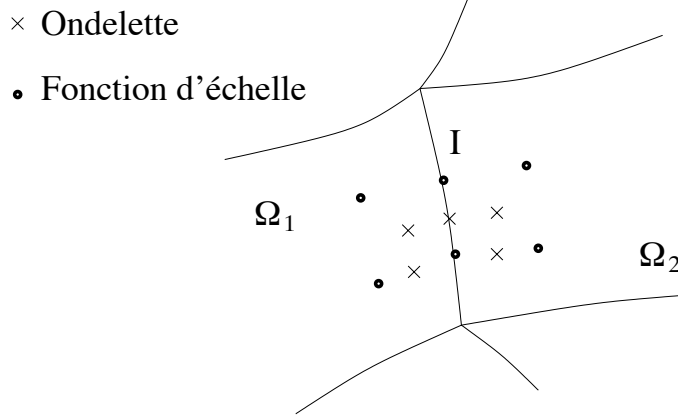


FIG. 1.22 – Face I

La construction des ondelettes associées à l'interface I se ramène au calcul du sommet en dimension 1 déjà effectué. Pour le choix (1.149) on déduit alors les ondelettes biorthogonales à l'interface I par simple tensorisation, soit pour les primales

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\psi_{j,k} \otimes \varphi_{j,0} \circ \kappa_1^{-1} + \psi_{j,k} \otimes \varphi_{j,0} \circ \kappa_2^{-1} \right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\varphi_{j,k} \otimes \psi_{j,0} \circ \kappa_1^{-1} + \varphi_{j,k} \otimes \psi_{j,0} \circ \kappa_2^{-1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\varphi_{j,k} \otimes (\psi_{j,0} - \varphi_{j,0}) \circ \kappa_1^{-1} - \varphi_{j,k} \otimes (\psi_{j,0} - \varphi_{j,0}) \circ \kappa_2^{-1} \right) \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\psi_{j,k} \otimes \psi_{j,0} \circ \kappa_1^{-1} + \psi_{j,k} \otimes \psi_{j,0} \circ \kappa_2^{-1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\psi_{j,k} \otimes (\psi_{j,0} - \varphi_{j,0}) \circ \kappa_1^{-1} - \psi_{j,k} \otimes (\psi_{j,0} - \varphi_{j,0}) \circ \kappa_2^{-1} \right) \end{array} \right. \quad (1.154)$$

et les mêmes formules pour les duales avec l'indice \sim .

Sommet intérieur.

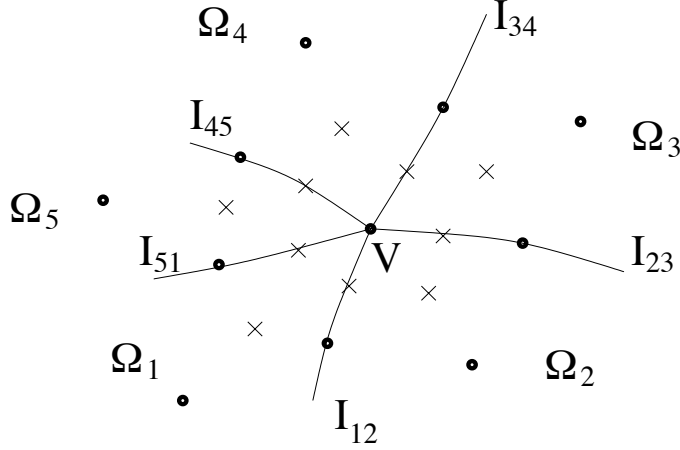


FIG. 1.23 – *Sommet intérieur V .*

On considère un sommet intérieur V commun aux M sous domaines Ω_i , $i = 1, \dots, M$ (voir figure 1.23). On note $I_{i,i+1} = \bar{\Omega}_i \cap \bar{\Omega}_{i+1}$, $i = 1, \dots, M$, les interfaces où par convention d'écriture $M + 1$ est identifié à 1. Soit \hat{J} le segment OB , afin d'alléger l'écriture on peut convenir que pour $i = 1, \dots, M$,

$$V = \kappa_i(O) \text{ et } \kappa_i(\hat{J}) = \kappa_{i+1}(\hat{I}) = I_{i,i+1}$$

Les fonctions de la complétion $\Psi_{j,\Omega}^\sharp$ associées au sommet V comportent pour chaque sous domaine Ω_i , $i = 1, \dots, M$, la fonction

$$f_{j,\Omega_i} = (\psi_{j,0} - \varphi_{j,0}) \otimes (\psi_{j,0} - \varphi_{j,0}) \circ \kappa_i^{-1}, \quad (1.155)$$

et pour chaque interface $I_{i,i+1}$, $i = 1, \dots, M$, la fonction

$$f_{j,I_{i,i+1}} = \varphi_{j,0} \otimes (\psi_{j,0} - \varphi_{j,0}) \circ \kappa_i^{-1} + (\psi_{j,0} - \varphi_{j,0}) \otimes \varphi_{j,0} \circ \kappa_{i+1}^{-1}, \quad (1.156)$$

soit un total de $2M$ fonctions et donc d'ondelettes associées au sommet V (les croix de la figure 1.23). La correction de grille grossière appliquée à l'une quelconque de ces fonctions f se réduit à

$$f - \frac{1}{M} \left(\sum_{l=1}^M \int_{\hat{\Omega}} f|_{\Omega_l} \circ \kappa_l \tilde{\varphi}_{j,0} \otimes \tilde{\varphi}_{j,0} d\hat{x} \right) \sum_{l=1}^M \varphi_{j,0} \otimes \varphi_{j,0} \circ \kappa_l^{-1}, \quad (1.157)$$

et conduit aux $2M$ ondelettes primales, pour $i = 1, \dots, M$

$$\begin{aligned} \psi_{j,\Omega_i} &= (\psi_{j,0} - \varphi_{j,0}) \otimes (\psi_{j,0} - \varphi_{j,0}) \circ \kappa_i^{-1} - \frac{1}{M} \sum_{l=1}^M \varphi_{j,0} \otimes \varphi_{j,0} \circ \kappa_l^{-1}. \\ \psi_{j,I_{i,i+1}} &= \varphi_{j,0} \otimes (\psi_{j,0} - \varphi_{j,0}) \circ \kappa_i^{-1} + (\psi_{j,0} - \varphi_{j,0}) \otimes \varphi_{j,0} \circ \kappa_{i+1}^{-1} \\ &\quad + \frac{2}{M} \sum_{l=1}^M \varphi_{j,0} \otimes \varphi_{j,0} \circ \kappa_l^{-1}. \end{aligned}$$

Un simple changement de base permet de mieux localiser ces ondelettes sur les M sous domaines. Les combinaisons linéaires $\psi_{j,\Omega_i} + \psi_{j,\Omega_{i+1}} + \psi_{j,I_{i,i+1}}$ pour $i = 1, \dots, M$ et $\psi_{j,\Omega_i} + \psi_{j,\Omega_{i+1}}$ pour $i = 1, \dots, M-1$ donnent $2M-1$ fonctions linéairement indépendantes à supports sur deux sous domaines. On les complète par la combinaison linéaire $\sum_{i=1}^M (\psi_{j,\Omega_i} + \psi_{j,I_{i,i+1}})$ à support sur les M sous domaines.

$$\Psi_{j,V} = \begin{cases} \sum_{l=0}^1 (-1)^l (\psi_{j,0} - \varphi_{j,0}) \otimes (\psi_{j,0} - \varphi_{j,0}) \circ \kappa_{i+l}^{-1}, & i = 1, \dots, M-1, \\ \psi_{j,0} \otimes (\psi_{j,0} - \varphi_{j,0}) \circ \kappa_i^{-1} - (\psi_{j,0} - \varphi_{j,0}) \otimes \psi_{j,0} \circ \kappa_{i+1}^{-1}, & i = 1, \dots, M, \\ \sum_{i=1}^M \psi_{j,0} \otimes \psi_{j,0} \circ \kappa_i^{-1}. \end{cases} \quad (1.158)$$

Les $2M$ ondelettes duales s'écrivent simplement en rajoutant l'indice $\tilde{\cdot}$. La matrice de biorthogonalisation

$$(\Psi_{j,V}, \tilde{\Psi}_{j,V})$$

se calcule facilement et ne dépend que du nombre de sous domaines M . La biorthogonalisation laisse une latitude de choix des ondelettes primales et duales qui permet d'imposer des propriétés supplémentaires comme celles de support minimum ou de symétrie. Ces choix sont étudiés en détail dans [20].

Sommet Neumann-Neumann

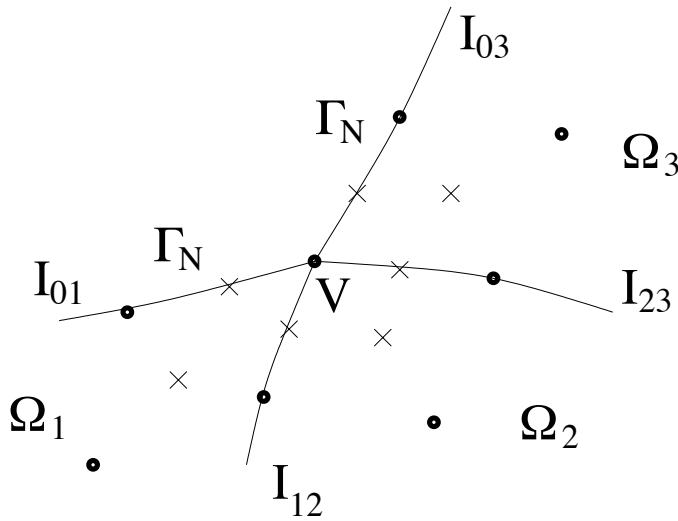


FIG. 1.24 – *Sommet Neumann-Neumann V.*

On considère M sous domaines ayant le sommet commun $V \in \Gamma_N$. On note Ω_1 et Ω_M les sous domaines intersectant Γ_N et $I_{0,1} = \bar{\Omega}_1 \cap \Gamma_N$, $I_{0,M} = \bar{\Omega}_M \cap \Gamma_N$ leurs interfaces avec la frontière Γ_N . Les sous domaines partagent les interfaces communs $I_{i,i+1} = \bar{\Omega}_i \cap \bar{\Omega}_{i+1}$, $i = 1, \dots, M-1$. On supposera à nouveau par commodité d'écriture que

$$\begin{cases} V = k_i(O), & i = 1, \dots, M, \\ k_1(\hat{I}) = I_{0,1}, & k_M(\hat{J}) = I_{0,M}, \\ k_i(\hat{J}) = k_{i+1}(\hat{I}) = I_{i,i+1}, & i = 1, \dots, M-1. \end{cases}$$

Les notations sont les mêmes que précédemment. Les fonctions de la complétion $\Psi_{j,\Omega}^\sharp$ associées au sommet V comportent pour chaque sous domaine Ω_i , $i = 1, \dots, M$, la fonction (1.155) et pour chaque interface $I_{i,i+1}$, $i = 1, \dots, M - 1$, la fonction (1.156). Cette fois il n'y a pas de correction de grille grossière dans la mesure où il n'y a pas de fonction d'échelle au sommet V . On obtient donc directement les $2M - 1$ ondelettes primales (et de même duales) qu'il s'agit seulement de biorthogonaliser.

$$\Psi_{j,V_{D-D}} = \begin{cases} (\psi_{j,0} - \varphi_{j,0}) \otimes (\psi_{j,0} - \varphi_{j,0}) \circ \kappa_i^{-1}, & i = 1, \dots, M, \\ \varphi_{j,0} \otimes (\psi_{j,0} - \varphi_{j,0}) \circ \kappa_i^{-1} + (\psi_{j,0} - \varphi_{j,0}) \otimes \varphi_{j,0} \circ \kappa_{i+1}^{-1}, & i = 1, \dots, M - 1. \end{cases}$$

Sommet Neumann-Dirichlet

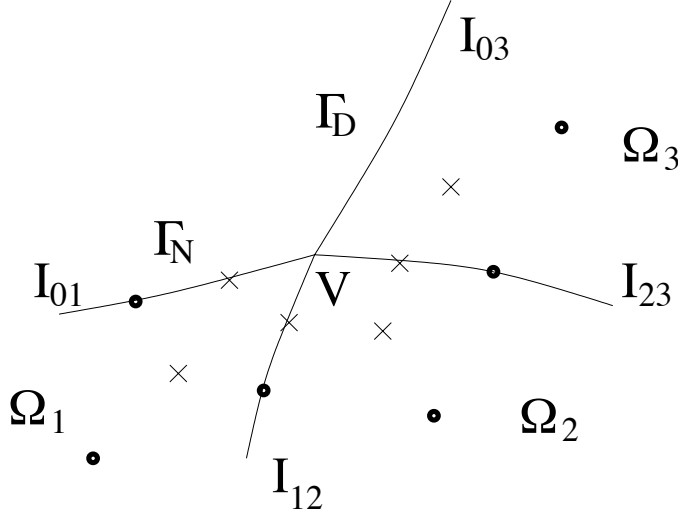


FIG. 1.26 – *Sommet Neumann-Dirichlet V.*

A nouveau les notations sont identiques. Les fonctions de la complétion $\Psi_{j,\Omega}^\sharp$ associées au sommet V comportent pour chaque sous domaine Ω_i , $i = 1, \dots, M$, la fonction (1.155), pour la face $I_{0,1}$ la fonction (1.159) et pour chaque interface $I_{i,i+1}$, $i = 1, \dots, M - 1$, la fonction (1.156). Cette fois encore il n'y a pas de correction de grille grossière dans la mesure où il n'y a pas ici non plus de fonction d'échelle au sommet V . On obtient donc directement les $2M$ ondelettes primales (et de même duales) qu'il s'agit de biorthogonaliser.

$$\Psi_{j,V_{N-D}} = \begin{cases} (\psi_{j,0} - \varphi_{j,0}) \otimes \psi_{j,0} \circ \kappa_1^{-1}, \\ (\psi_{j,0} - \varphi_{j,0}) \otimes (\psi_{j,0} - \varphi_{j,0}) \circ \kappa_i^{-1}, & i = 1, \dots, M \\ \varphi_{j,0} \otimes (\psi_{j,0} - \varphi_{j,0}) \circ \kappa_i^{-1} + (\psi_{j,0} - \varphi_{j,0}) \otimes \varphi_{j,0} \circ \kappa_{i+1}^{-1}, & i = 1, \dots, M - 1. \end{cases}$$

Programmation des algorithmes de décomposition et recomposition. La méthode de construction des ondelettes aux interfaces de la décomposition suggère naturellement une programmation parallèle des algorithmes de décomposition et recomposition qui en outre tienne compte de la nature essentiellement tensorielle de

ces transformations sur chacun des blocs de la hiérarchie des interfaces. Ces algorithmes (par exemple pour les bases primales) itèrent sur l'échelle j les changements de bases à deux niveaux

$$\Phi_{j+1,\Omega} \leftrightarrow \Phi_{j,\Omega} \cup \Psi_{j,\Omega}.$$

L'idée consiste à procéder en deux étapes. Par exemple pour la décomposition (et en sens inverse pour la recombinaison)

- (i) Décomposition correspondant au changement de base

$$\Phi_{j+1,\Omega} \rightarrow \Phi_{j,\Omega} \cup \Psi_{j,\Omega}^\sharp$$

qui "découple" sur chacun des p -interfaces pour $p = d, \dots, 0$ et équivaut sur chacun de ces p -blocs, dans les directions du p -interface, à une décomposition canonique tensorielle en dimension p .

- (ii) Correction aux p -interfaces pour $p = d - 1, \dots, 0$ selon les formules de correction de grille grossière et de biorthogonalisation.

Décompositions multiéchelles anisotropes sur le domaine Ω . Certaines classes de singularités anisotropes peuvent être comprimées plus efficacement par des ondelettes permettant de combiner des échelles fines suivant certaines directions et des échelles plus grossières selon les autres directions. C'est en particulier le cas des couches limites le long de la frontière du domaine ainsi que des singularités d'arêtes en dimension 3.

Dans ces exemples, les directions privilégiées se ramènent par les difféomorphismes κ_i^{-1} aux axes du domaine de référence, et il est donc naturel de chercher à étendre la construction des bases anisotropes du §1.4.1, au cadre de la décomposition de domaine.

L'idée consiste à partir de la décomposition isotrope

$$\Phi_{j+1,\Omega} \rightarrow \Phi_{j,\Omega} \cup \Psi_{j,\Omega}$$

et à effectuer une décomposition tensorielle anisotrope jusqu'au niveau j_0 des bases de fonctions d'échelle apparaissant dans la décomposition en p -blocs, $p = d, \dots, 1$ de $\Psi_{j,\Omega}$. Si ces décompositions sont stables dans L^2 (avec des constantes indépendantes de j), la nouvelle décomposition aura les mêmes propriétés de stabilité dans $H^s(\Omega)$ que la décomposition isotrope.

Nous allons illustrer les différentes possibilités de telles décompositions dans le cas du domaine en L précédent. Il est commode d'avoir en tête la base $\Psi_{j,\Omega}$ rappelée ci-dessous.

Les 2-blocs de $\Psi_{j,\Omega}$. Associé au sous domaine $\Omega_1 = I_1 \otimes I_4$ on a retenu

$$\Psi_{j,I_1}^{N,*} \otimes \Psi_{j,I_4}^{N,N}, \quad \Psi_{j,I_1}^{N,*} \otimes \Phi_{j,I_4}^{N,N}, \quad \Phi_{j,I_1}^{N,D} \otimes \Psi_{j,I_4}^{N,N}, \quad (1.162)$$

où la notation $*$ indique que l'ondelette correspondant à l'extrémité 0 ou 1 a été otée. De même associé au sous domaine $\Omega_2 = I_2 \otimes I_4$ on a

$$\Psi_{j,I_2}^{*,N} \otimes \Psi_{j,I_4}^{N,*}, \Psi_{j,I_2}^{*,N} \otimes \Phi_{j,I_4}^{N,D}, \Phi_{j,I_2}^{D,N} \otimes \Psi_{j,I_4}^{N,*}, \quad (1.163)$$

et au sous domaine $\Omega_3 = I_2 \otimes I_3$,

$$\Psi_{j,I_2}^{N,N} \otimes \Psi_{j,I_3}^{*,N}, \Psi_{j,I_2}^{N,N} \otimes \Phi_{j,I_3}^{D,N}, \Phi_{j,I_2}^{N,N} \otimes \Psi_{j,I_3}^{*,N}. \quad (1.164)$$

Les 1-blocs de $\Psi_{j,\Omega}$. Associées à la face I_4 on a les ondelettes d'interface

$$(\varphi_{j,d_j}^{I_1} + \varphi_{j,0}^{I_2}) \otimes \Psi_{j,I_4}^{N,*} \text{ et } \{\psi_{j,(\varepsilon)}^{I_1,I_2}, \varepsilon = 0, 1\} \otimes (\Psi_{j,I_4}^{N,*} \cup \Phi_{j,I_4}^{N,D}), \quad (1.165)$$

et de même pour la face I_2

$$\Psi_{j,I_2}^{*,N} \otimes (\varphi_{j,d_j}^{I_4} + \varphi_{j,0}^{I_3}) \text{ et } (\Psi_{j,I_2}^{*,N} \cup \Phi_{j,I_2}^{D,N}) \otimes \{\psi_{j,(\varepsilon)}^{I_3,I_4}, \varepsilon = 0, 1\}. \quad (1.166)$$

Les 0-bloc de $\Psi_{j,\Omega}$. Ce sont les 7 ondelettes (1.151) calculées au sommet V .

Le plus simple est de redécomposer uniquement les bases de fonctions d'échelle $\Phi_{j,I}^{X,Y}$ apparaissant dans les d -blocs (1.162, 1.163, 1.164)

$$\Phi_{j,I}^{X,Y} \rightarrow \Phi_{j_0,I}^{X,Y} \cup \bigcup_{l=j_0}^{j-1} \Psi_{l,I}^{X,Y}.$$

Ces décompositions sont bien sûr uniformément stables dans L^2 .

L'alternative consiste à redécomposer aussi les bases aux interfaces I_4 et I_2 . Pour se faire la seule difficulté consiste, par exemple pour la face I_4 , à associer le terme d'interface $(\varphi_{j,d_j}^{I_1} + \varphi_{j,0}^{I_2}) \otimes \Psi_{j,I_4}^{N,*}$ avec les 2-blocs $\Phi_{j,I_1}^{N,D} \otimes \Psi_{j,I_4}^{N,N}$ et $\Phi_{j,I_2}^{D,N} \otimes \Psi_{j,I_4}^{N,*}$. Ces termes se réécrivent alors sous la forme

$$(\Phi_{j,I_1 \cup I_2}^{N,N} \otimes \Psi_{j,I_4}^{N,*}) \cup (\Phi_{j,I_1}^{N,D} \otimes \{\psi_{j,2^j-1}^{I_4}\}),$$

et l'on remplace les bases de fonctions d'échelle $\Phi_{j,I_1 \cup I_2}^{N,N}$ et $\Phi_{j,I_1}^{N,D}$ par les bases multiéchelles ad-hoc, ces transformations étant uniformément stables dans L^2 .

Chapitre 2

Problèmes elliptiques

Ce chapitre traite du cadre des opérateurs elliptiques linéaires \mathcal{A} adaptés
(1) au préconditionnement diagonal en base d'ondelettes
(2) à la compression en base d'ondelettes.
La combinaison de ces deux propriétés donne lieu, sous certaines conditions, à des algorithmes optimaux à la fois pour l'approximation linéaire et l'approximation adaptative.

Ce cadre comprend les opérateurs différentiels fortement elliptiques d'ordre $2m$ sur un domaine de $\Omega \subset \mathbb{R}^d$:

$$\begin{cases} \mathcal{A}u := \sum_{|\alpha|, |\beta| \leq m} a_{\alpha, \beta} \partial^\alpha \partial^\beta u = f, & \text{sur } \Omega, \\ \mathcal{B} = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

où l'opérateur \mathcal{B} représente des conditions aux limites ad-hoc et où le symbole principal

$$P(\omega) := \sum_{|\alpha|, |\beta| = m} a_{\alpha, \beta} \omega^{\alpha + \beta} \quad (2.2)$$

vérifie la condition d'ellipticité uniforme

$$P(\omega) \geq \gamma > 0, \quad \forall \omega \in \mathbb{R}^d, \quad \forall x \in \Omega. \quad (2.3)$$

Sous l'hypothèse d'injectivité, l'opérateur \mathcal{A} définit un isomorphisme de $H^s(\Omega)$ dans H^{s-2m} pour un certain intervalle de s , selon la régularité du domaine et des coefficients $a_{\alpha, \beta}$.

$$\|\mathcal{A}u\|_{H^{s-2m}} \sim \|u\|_{H^s}.$$

Parmi les cas particuliers on trouve les opérateurs coercifs pour lesquels la forme bilinéaire

$$a(u, v) := \langle \mathcal{A}u, v \rangle \quad (2.4)$$

définit une norme équivalente

$$a(u, u) \sim \|u\|_{H^m}^2. \quad (2.5)$$

Dans les exemples numériques on considérera

- (i) les opérateurs du second ordre à coefficients variables $\nabla \cdot A(x) \nabla$ (dont en particulier le laplacien $-\Delta$) avec conditions aux limites de Dirichlet, où A est une matrice définie positive uniformément en x .
- (ii) L'opérateur bilaplacien du quatrième ordre Δ^2 avec conditions aux limites homogènes H_0^2 .

Le deuxième cadre d'application est celui des opérateurs intégraux coercifs dans une norme de Sobolev H^t d'indice positif ou négatif et dont la représentation dans une base d'ondelettes Ψ satisfait les propriétés de décroissance

$$2^{-(|\lambda|+|\lambda'|)t} \langle \mathcal{A}\psi_\lambda, \psi_{\lambda'} \rangle \lesssim 2^{-\|\lambda\|+\|\lambda'\|^\sigma} (1 + d(\lambda, \lambda'))^{-\beta}$$

où $\sigma > d/2$, $\beta > d$ et

$$d(\lambda, \lambda') := 2^{\min(|\lambda|, |\lambda'|)} \text{dist}(\text{Supp}(\psi_\lambda), \text{Supp}(\psi_{\lambda'})).$$

Ces propriétés sont vérifiées pour une large classe d'opérateurs, en particulier parmi les opérateurs pseudo-différentiels et ceux de Calderón-Zygmund. Elles sont à la base de leur compression dans la base d'ondelettes Ψ . Le paramètre σ est fonction de la régularité des ondelettes alors que β dépend de l'ordre d'approximation de l'AMR duale (cf 1.142) et de l'ordre t de l'opérateur (voir sur ces sujets [81], [13], [89],[46], [95], [88]). Les exemples les plus classiques sont les opérateurs de simple couche et de double couche pour la formulation intégrale du laplacien.

Les apports de ce chapitre concernent le préconditionnement du système linéaire obtenu après discrétisation (§2.1) et la résolution adaptative de l'équation (1) (§2.2 et §2.3). La compression des opérateurs en base d'ondelettes est rappelée en Appendice 3 sur l'exemple modèle de l'opérateur laplacien. Le lecteur trouvera un exposé détaillé de ces techniques dans [46], [89] pour une discrétisation uniforme et dans [28] dans le cadre des algorithmes adaptatifs.

On introduit en particulier au §2.1.2 un préconditionnement presque diagonal, dont l'idée consiste à exploiter les propriétés de compression de l'inverse de l'opérateur \mathcal{A}^{-1} en base d'ondelettes. Les techniques SPAI ("sparse approximate inverse"), qui calculent un inverse approché de la matrice sur un sous ensemble creux, sont donc naturellement plus performantes dans de telles bases qu'en bases de fonctions d'échelle.

On présente dans la suite du §2.1 une étude numérique des performances du préconditionnement en base d'ondelettes. L'approche adoptée pour la construction des bases d'ondelettes est celle de la décomposition de domaine exposée au §1.4 pour divers choix de générateurs parmi la famille des ondelettes splines biorthogonales.

L'étude porte sur une comparaison des performances du préconditionnement en bases d'ondelettes selon le choix des générateurs, la nature du préconditionnement

(diagonal, SPAI, décomposition isotrope ou anisotrope pour des domaines tensoriels) et le type de discrétisation (Galerkin ou Petrov-Galerkin). Afin d'évaluer la robustesse du préconditionnement en base d'ondelettes on va considérer quatre exemples d'opérateurs: (1) l'opérateur laplacien, (2) les opérateurs différentiels du second ordre à coefficients variables, (3) l'opérateur bilaplacien et (4) un exemple d'opérateur d'ordre -1 , l'opérateur de bord $\psi - \omega$.

Le paragraphe 2.2 traite de l'approximation adaptative de l'équation (1). Ces algorithmes reposent sur la détermination itérative d'une suite de sous ensembles d'ondelettes $\Lambda_n \subset \nabla$ et de solutions approchées \tilde{u}_{Λ_n} de la projection de Galerkin de u sur l'espace d'approximation $V_{\Lambda_n} = S(\{\psi_\lambda, \lambda \in \Lambda_n\})$. Le passage du couple $(\Lambda_n, \tilde{u}_{\Lambda_n})$ au suivant nécessite (1) une stratégie de raffinement de l'ensemble Λ_n , (2) le calcul de la solution approchée $\tilde{u}_{\Lambda_{n+1}}$ par un nombre fixé d'itérations du schéma itératif et moyennant la compression du produit matrice-vecteur dans la base d'ondelettes $\{\psi_\lambda, \lambda \in \Lambda_{n+1}\}$ et (3) un procédé de seuillage des petits coefficients de la solution $\tilde{u}_{\Lambda_{n+1}}$ de façon à contrôler la croissance des ensembles d'ondelettes successifs.

L'algorithme est alors optimal si la suite $(\Lambda_n, \tilde{u}_{\Lambda_n})$ satisfait l'estimation

$$\|u - \tilde{u}_{\Lambda_n}\|_{H^t} \lesssim (\#\Lambda_n)^{-s} \quad (2.6)$$

dès lors que la meilleure approximation de la solution u par une combinaison linéaire de N ondelettes dans la base Ψ produit une telle estimation en $\mathcal{O}(N^{-s})$. En outre le calcul de \tilde{u}_{Λ_n} doit idéalement s'effectuer globalement en $\mathcal{O}(\#\Lambda_n)$ opérations.

Un tel algorithme optimal a été récemment conçu dans [28] pour une large classe d'opérateurs elliptiques et nous en dégagerons les principaux ingrédients.

On se contente par ailleurs dans ce paragraphe d'illustrer numériquement l'optimalité d'une stratégie adaptative simplifiée pour l'exemple modèle de l'opérateur laplacien sur le domaine $\Omega =]0, 1[^2$.

Le paragraphe 2.3 introduit un cadre général qui permettra en particulier d'étendre les algorithmes adaptatifs précédents dans le cas de conditions aux limites de Dirichet non homogènes pour les problèmes du second ordre. Notre approche est adaptative à la fois sur la donnée de Dirichlet au bord et sur la "partie homogène" de la solution à l'intérieur du domaine.

Ce problème se ramène à la construction d'une base d'ondelettes sur le domaine Ω , stable dans $H^1(\Omega)$, et dont les traces sur le bord du domaine $\Gamma = \partial\Omega$ (ou une partie Γ_D de celui-ci), définissent une base d'ondelettes stable dans $H^{1/2}(\Gamma)$. Cette approche conduit naturellement à la construction d'opérateurs de relèvement \mathcal{R} stables de $B_{p,q}^s(\Gamma_D)$ dans $B_{p,q}^{s+1/p}(\Omega)$.

Sa réalisation pratique est étudiée dans le cadre de la décomposition de domaine exposée au §1.4.

2.1 Préconditionnement

2.1.1 Préconditionnement diagonal en base d'ondelettes

On considère des bases d'ondelettes biorthogonales

$$\Psi = \{\psi_\lambda, \lambda \in \nabla\}, \quad \tilde{\Psi} = \{\tilde{\psi}_\lambda, \lambda \in \nabla\}.$$

Ces bases seront toujours supposées caractériser les normes de Sobolev H^s considérées par les normes l^2 pondérées des coefficients d'ondelettes (cf (1.50)). On note Ψ_Λ et $\tilde{\Psi}_\Lambda$ les collections correspondant au sous ensemble d'ondelettes Λ et

$$V_\Lambda := S(\Psi_\Lambda), \quad \tilde{V}_\Lambda := S(\tilde{\Psi}_\Lambda)$$

les espaces engendrés. En particulier le sous ensemble

$$\Lambda_J := \Delta_0 \cup \nabla_0 \cup \dots \cup \nabla_{J-1}$$

engendre les espaces de discrétisation uniforme V_J et \tilde{V}_J , pour lesquels on dispose aussi des bases de fonctions d'échelle biorthogonales Φ_J et $\tilde{\Phi}_J$.

Soit \mathcal{A} un opérateur d'ordre $2t$ appartenant à l'une des classes définies ci-dessus. On va considérer deux types de discrétisation de l'équation

$$\mathcal{A}u = f.$$

La première est la discrétisation de Galerkin pour l'espace de fonctions test V_Λ :

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_\Lambda \in V_\Lambda \text{ tel que} \\ \langle \mathcal{A}u_\Lambda, v_\Lambda \rangle = \langle f, v_\Lambda \rangle, \quad \forall v_\Lambda \in V_\Lambda. \end{cases} \quad (2.7)$$

La seconde est une formulation de Petrov-Galerkin pour des espaces de fonctions test et d'essai biorthogonales:

$$\begin{cases} \text{Trouver } u_\Lambda \in V_\Lambda \text{ tel que} \\ \langle \mathcal{A}u_\Lambda, \tilde{v}_\Lambda \rangle = \langle f, \tilde{v}_\Lambda \rangle, \quad \forall \tilde{v}_\Lambda \in \tilde{V}_\Lambda. \end{cases} \quad (2.8)$$

On notera dans le premier cas $A_{\Psi_\Lambda} := \langle \mathcal{A}\Psi_\Lambda, \Psi_\Lambda \rangle$ et dans le deuxième cas $A_{\tilde{\Psi}_\Lambda, \Psi_\Lambda} := \langle \mathcal{A}\Psi_\Lambda, \tilde{\Psi}_\Lambda \rangle$ la matrice de rigidité résultant de la discrétisation de l'opérateur dans les bases d'ondelettes $\Psi_\Lambda, \tilde{\Psi}_\Lambda$. Pour $\Lambda = \Lambda_J$ les matrices dans les bases de fonctions d'échelle seront elles notées A_{Φ_J} et $A_{\tilde{\Phi}_J, \Phi_J}$.

Méthode d'approximation de Galerkin

Dans le cas d'un opérateur associé à une forme bilinéaire a symétrique coercive en norme H^t , l'optimalité du preconditionnement diagonal en base d'ondelettes de la matrice A_{Ψ_Λ} est une conséquence facile de la caractérisation de la norme H^t par

la norme l^2 pondérée des coefficients d'ondelettes (cf [63], [41]). Soit D_Λ la matrice diagonale

$$D_\Lambda := (2^{|\lambda|} \delta_{\lambda, \lambda'})_{\lambda, \lambda' \in \Lambda}.$$

Pour $u_\Lambda = U_\Lambda^T \Psi_\Lambda$ il suffit d'écrire les équivalences de normes

$$\begin{aligned} \langle A_{\Psi_\Lambda} U_\Lambda, U_\Lambda \rangle &= a(u_\Lambda, u_\Lambda) \\ &\sim \|u_\Lambda\|_{H^t}^2 \\ &\sim \langle D_\Lambda^{2t} U_\Lambda, U_\Lambda \rangle, \end{aligned}$$

pour conclure que la matrice A_{Ψ_Λ} est spectralement équivalente à la matrice diagonale D_Λ^{2t} , ou encore que la matrice $D_\Lambda^{-t} A_{\Psi_\Lambda} D_\Lambda^{-t}$ est spectralement équivalente à l'identité. Le nombre de conditionnement de $D_\Lambda^{-t} A_{\Psi_\Lambda} D_\Lambda^{-t}$, égal pour une matrice symétrique au rapport des valeurs propres maximale et minimale, est donc borné indépendamment de l'ensemble Λ . Il est facile de voir qu'une borne est donnée par

$$\frac{\|a\| C_\Psi}{\alpha_a c_\Psi} \quad (2.9)$$

où $\alpha_a := \inf_{u \in H^t} a(u, u) / \|u\|_{H^t}^2$ est la constante d'ellipticité de la forme bilinéaire a , $\|a\| := \sup_{u, v \in H^t} a(u, v) / (\|u\|_{H^t} \|v\|_{H^t})$ sa norme et C_Ψ, c_Ψ les constantes de l'équivalence de norme (1.50) dans la base Ψ pour $s = t$.

De même, la diagonale de l'opérateur en base d'ondelettes

$$D_{A_{\Psi_\Lambda}} := (\langle \mathcal{A} \psi_\lambda, \psi_\lambda \rangle \delta_{\lambda, \lambda'})_{\lambda, \lambda' \in \Lambda}$$

est aussi spectralement équivalente à A_{Ψ_Λ} et en pratique ce choix est meilleur dans la mesure où il prend en compte les variations locales de l'opérateur. En particulier dans le cas d'un opérateur différentiel à coefficients variables, il devrait permettre, sous des hypothèses de régularité des coefficients, de s'affranchir de la dépendance en $\frac{\|a\|}{\alpha_a}$. Des résultats numériques abondant dans ce sens seront présentés au §2.1.4, bien qu'aucun résultat théorique ne soit pour l'heure établi.

Dans le cas général il faut disposer en outre d'une propriété de stabilité discrète qui s'écrit sous la forme d'une condition inf-sup

$$\inf_{u_\Lambda \in V_\Lambda} \sup_{v_\Lambda \in V_\Lambda} \frac{\langle \mathcal{A} u_\Lambda, v_\Lambda \rangle}{\|u_\Lambda\|_{H^t} \|v_\Lambda\|_{H^t}} \gtrsim 1 \quad (2.10)$$

supposée vérifiée uniformément en Λ . Soient Q_Λ et \tilde{Q}_Λ les projecteurs biorthogonaux $\langle \cdot, \tilde{\Psi}_\Lambda \rangle^T \Psi_\Lambda$ et $\langle \cdot, \Psi_\Lambda \rangle^T \tilde{\Psi}_\Lambda$. Il est facile de voir que cette condition est équivalente à la propriété de stabilité

$$\|\tilde{Q}_\Lambda \mathcal{A} u_\Lambda\|_{H^{-t}} \sim \|u_\Lambda\|_{H^t}, \quad \forall u_\Lambda \in V_\Lambda. \quad (2.11)$$

Celle-ci est immédiate dans le cas d'une forme bilinéaire coercive (même non symétrique). Sur le tore \mathbb{T}^d , et pour une discrétisation uniforme $\Lambda = \Lambda_J$, elle est

démontrée dans [45] dans le cas général d'un opérateur pseudo différentiel injectif, borné et de symbole principal coercif. En revanche, l'extension de ce résultat à des conditions aux limites non périodiques n'est pas établie. On notera $\|\cdot\|$ la norme l^2 pour les vecteurs ainsi que la norme matricielle associée pour les matrices. La proposition suivante est alors démontrée dans [45].

Proposition 2.1 *On suppose $V_\Lambda \subset H^t$ et la stabilité H^t de la base primale Ψ et donc H^{-t} de la base duale $\tilde{\Psi}$. Sous l'hypothèse de stabilité discrète (2.11), le nombre de conditionnement de la matrice $B_\Lambda = D_\Lambda^{-t} A_{\Psi_\Lambda} D_\Lambda^{-t}$*

$$\mathcal{K}(B_\Lambda) : = \|B_\Lambda\| \|B_\Lambda^{-1}\| \quad (2.12)$$

est borné indépendamment de Λ .

Preuve. En utilisant les équivalences de normes primale $\|X_\Lambda^T \Psi_\Lambda\|_{H^t} \sim \|D_\Lambda^t X_\Lambda\|$ et duale $\|Y_\Lambda^T \tilde{\Psi}_\Lambda\|_{H^{-t}} \sim \|D_\Lambda^{-t} Y_\Lambda\|$, il est facile de réécrire la condition de stabilité (2.11) en terme matriciel. Pour tout U_Λ

$$\|D_\Lambda^{-t} A_{\Psi_\Lambda} U_\Lambda\| \sim \|D_\Lambda^t U_\Lambda\|,$$

et donc pour tout $X_\Lambda (= D_\Lambda^t U_\Lambda)$

$$\|D_\Lambda^{-t} A_{\Psi_\Lambda} D_\Lambda^{-t} X_\Lambda\| \sim \|X_\Lambda\|$$

qui traduit que la matrice B_Λ est uniformément bornée ainsi que son inverse. \square

Méthode d'approximation de Petrov-Galerkin

L'intérêt des schémas de Petrov-Galerkin utilisant des fonctions tests et d'essais biorthogonales réside dans le fait que l'opérateur identité \mathcal{I} est alors représenté par les matrices identités.

$$\langle \Psi_\Lambda, \tilde{\Psi}_\Lambda \rangle = I_\Lambda \text{ ou } \langle \Phi_J, \tilde{\Phi}_J \rangle = I_{\Delta_J}.$$

Cette propriété est particulièrement intéressante dans le cas de schémas en temps explicites où l'opérateur en espace se réduit à l'identité. On évite ainsi d'avoir recours à la condensation de masse. On en tire aussi parti dans le cas d'une discrétisation implicite de problèmes paraboliques ou l'opérateur en espace après discrétisation en temps est du type $\mathcal{I} - \nu \mathcal{A}$ avec $\nu \ll 1$ pour des petits pas de temps ou des grands nombre de Reynolds dans le cas des équations de Navier Stokes.

L'aspect délicat de ce type de discrétisation est que même dans le cas d'un opérateur coercif autoadjoint, la stabilité du schéma n'est pas assurée. Soit un opérateur \mathcal{A} d'ordre $2t$ que l'on suppose définir un isomorphisme de H^s dans H^{s-2t} sur un

certain intervalle de s (incluant $s = t$). La condition de stabilité de la discrétisation (2.8) prend à nouveau la forme d'une condition inf-sup discrète

$$\inf_{u_\Lambda \in V_\Lambda} \sup_{\tilde{v}_\Lambda \in \tilde{V}_\Lambda} \frac{\langle \mathcal{A}u_\Lambda, \tilde{v}_\Lambda \rangle}{\|u_\Lambda\|_{H^s} \|\tilde{v}_\Lambda\|_{H^{2t-s}}} \gtrsim 1 \quad (2.13)$$

supposée vérifiée uniformément en Λ . En particulier ceci suppose $V_\Lambda \subset H^s$ et $\tilde{V}_\Lambda \subset H^{2t-s}$. Le choix le plus naturel est bien sûr $s = t$ mais la faible régularité des fonctions test de \tilde{V}_Λ nécessite souvent d'augmenter s . Un cas extrême est celui de la collocation où les fonctions tests sont des distributions de Dirac et les fonctions d'essai des fonctions d'échelle interpolantes (voir [10], [89]).

Grace à la biorthogonalité des espaces V_Λ et \tilde{V}_Λ et à l'isomorphisme, cette condition est équivalente à la propriété de stabilité

$$\|Q_\Lambda \mathcal{A}u_\Lambda\|_{H^{s-2t}} \sim \|u_\Lambda\|_{H^s}, \quad \forall u_\Lambda \in V_\Lambda. \quad (2.14)$$

Celle-ci est à nouveau démontrée dans [45] sur le tore \mathbb{T}^d , pour une discrétisation uniforme et dans le cas général d'un opérateur pseudo différentiel injectif, borné et de symbole principal coercif. On prouve alors de façon similaire à précédemment la proposition suivante.

Proposition 2.2 *On suppose $V_\Lambda \subset H^s$ et $\tilde{V}_\Lambda \subset H^{2t-s}$ et la stabilité H^s de la base primale Ψ et H^{2t-s} de la base duale $\tilde{\Psi}$. Sous l'hypothèse de stabilité discrète (2.14) le nombre de conditionnement de la matrice $B_\Lambda = D_\Lambda^{s-2t} A_{\tilde{\Psi}_\Lambda, \Psi_\Lambda} D_\Lambda^{-s}$*

$$\mathcal{K}(B_\Lambda) := \|B_\Lambda\| \|B_\Lambda^{-1}\| \quad (2.15)$$

est borné indépendamment de Λ .

Schémas itératifs

Matrices symétriques. Pour des matrices A creuses la résolution du système linéaire $AU = F$ s'effectue le plus efficacement (en terme de stockage et de temps de calcul) par des méthodes itératives.

Les plus simples de ces méthodes sont les méthodes de descente selon le gradient de la fonctionnelle $\mathcal{F}(U) := \|F - AU\|^2$ qui calculent la solution du système comme point fixe de la suite récurrente

$$U_{k+1} - U_k = \alpha_k R_k, \quad R_k := (F - AU_{k-1}).$$

Le paramètre α_k est choisi par exemple de façon à minimiser localement l'erreur $e_k = \langle A(U - U_k), U - U_k \rangle$. Pour des matrices symétriques définies positives ce schéma admet pour taux de convergence du résidu

$$\rho := \frac{\mathcal{K}(A) - 1}{\mathcal{K}(A) + 1},$$

tel que $\|R_k\| \lesssim \rho^k \|R_0\|$ et où $\mathcal{K}(A)$ est le nombre de conditionnement de A .

Le gradient conjugué CG est une méthode d'ordre 2 où la direction de descente P_k telle que $U_{k+1} - U_k = \alpha_k P_k$ est cette fois une combinaison linéaire du résidu R_k et de P_{k-1} , choisie à nouveau de façon à minimiser localement l'erreur en norme d'énergie (voir [73]). Il converge pour des matrices symétriques définies positives au taux $\rho := \frac{\mathcal{K}(A)^{1/2}-1}{\mathcal{K}(A)^{1/2}+1}$ pour un coût inchangé par itération.

Pour un problème elliptique d'ordre $2t$, le conditionnement de la matrice A_{Ψ_Λ} est de l'ordre de $2^{2|t|j_{max}}$ où j_{max} est l'échelle la plus fine de la discrétisation V_Λ . De même, en base de fonctions d'échelle Φ_J , le conditionnement de A_{Φ_J} est de l'ordre de $2^{2|t|J}$. Il est donc indispensable de préconditionner au préalable le système i.e. trouver une matrice C creuse, symétrique, définie positive telle que $C \sim A^{-1}$. On applique alors le schéma itératif précédent au nouveau système équivalent

$$(C^{1/2}AC^{1/2})(C^{-1/2}U) = (C^{1/2}F).$$

Après substitution le gradient conjugué préconditionné ou PCG admet comme nouvelle direction de descente

$$U_{k+1} - U_k = \alpha_k CP_k.$$

Le taux de convergence est cette fois

$$\rho := \frac{\mathcal{K}^{1/2}(C^{1/2}AC^{1/2}) - 1}{\mathcal{K}^{1/2}(C^{1/2}AC^{1/2}) + 1}$$

et le prix à payer est le calcul à chaque itération du produit matrice-vecteur CP_k en sus du produit AU_k .

On voit que l'efficacité des schémas itératifs est fonction

- (i) du conditionnement de la matrice $C^{1/2}AC^{1/2}$,
- (ii) de la complexité du produit matrice-vecteur AU_k ,
- (iii) de la complexité du préconditionnement CP_k .

Il nous faut maintenant distinguer le cas des discrétisations uniformes V_J des discrétisations adaptatives V_Λ où Λ est un ensemble a priori quelconque d'ondelettes. Dans le deuxième cas les calculs s'effectuent bien sûr en base d'ondelettes. Le préconditionnement est alors simplement la diagonale

$$C = D_\Lambda^{-2t} \text{ ou } D_{A_{\Psi_\Lambda}}^{-1}$$

qui fournit d'après la proposition 2.1 un taux de convergence $\rho \leq \rho_{lim} < 1$ où ρ_{lim} est indépendant de la discrétisation Λ . Le produit matrice-vecteur nécessite une compression en base d'ondelettes qui tient compte à la fois de la décroissance des termes de la matrice et de celle des coefficients du vecteur. Ces techniques sont analysées dans [28] dans le cadre de l'étude de l'optimalité des méthodes adaptatives et

seront rappelées brièvement au §2.2.2.

Dans le cas d'une discrétisation uniforme, il faut distinguer le cas des opérateurs différentiels où le produit matrice-vecteur est toujours plus économique en base de fonction d'échelle Φ_J qu'en base d'ondelettes Ψ_{Λ_J} , du fait de l'absence d'interaction entre les échelles. Dans ce cas le calcul du résidu $R_k = F_k - AU_k$ s'effectue dans la base Φ_J et l'étape de préconditionnement nécessite deux transformées en ondelettes rapides. Soit M_j l'opérateur de recomposition à deux échelles défini au §1.1.2 qui s'exprime à l'aide des filtres primaux H^j et G^j . L'opérateur de recomposition multiéchelle s'écrit alors

$$T_J^* = M_0 \dots M_{J-1}.$$

L'opérateur transposé T_J est l'opérateur de décomposition sur les composantes du résidu i.e. sur les produits scalaires $\langle \cdot, \Phi_J \rangle \rightarrow \langle \cdot, \Psi_{\Lambda_J} \rangle$ ou encore sur les coefficients dans les bases duales. Rappelons aussi que l'inverse T_J^{-1} n'est autre que l'opérateur de recomposition des coefficients dans les bases duales qui s'exprime à l'aide des filtres duaux \tilde{H}^j et \tilde{G}^j i.e.

$$T_J^{-1} = \tilde{T}_J^*$$

et \tilde{T}_J est l'opérateur de décomposition sur les coefficients dans les bases primales. L'algorithme du gradient conjugué s'applique ici au système

$$\left(D_{\Lambda}^{-t} T_J A_{\Phi_J} T_J^* D_{\Lambda}^{-t} \right) D_{\Lambda}^t T_J^{-*} U = D_{\Lambda}^{-t} T_J F.$$

Après substitution, l'étape de préconditionnement se réduit au calcul de

$$C P_k = T_J^* D_{\Lambda_J}^{-2t} T_J P_k \text{ ou mieux } T_J^* D_{A_{\Psi_{\Lambda_J}}}^{-1} T_J P_k$$

Pour des filtres primaux H^j et G^j creux (i.e. des ondelettes et fonctions d'échelle primales à supports compacts $\sim 2^{-j}$), la complexité du préconditionnement est donc $\mathcal{O}(N_J)$ où

$$N_J : = \#\Delta_J$$

et la constante est proportionnelle à la largeur des filtres. On voit en particulier que les filtres duaux n'interviennent pas dans le préconditionnement des discrétisations de Galerkin et peuvent donc être des matrices pleines sans pénaliser la complexité du préconditionnement. C'est le cas en particulier des pré-ondelettes orthogonales (ou quasi orthogonales) construites sur des triangulations dans [90].

Le produit matrice-vecteur dans la base Φ_J s'effectue bien sûr en $\mathcal{O}(N_J)$ opérations et donc chaque itération a pour complexité $\mathcal{O}(N_J)$. Le nombre d'itérations dépend lui de façon logarithmique de la précision. Pour une fonction de régularité H^r et un ordre d'approximation $n \geq r$, l'estimation d'erreur du schéma de Galerkin donne classiquement

$$\|u - u_J\|_{H^t} \lesssim 2^{-(r-t)J} \|u\|_{H^r} \quad (2.16)$$

de sorte que $\mathcal{O}(\log N_J)$ itérations sont nécessaires pour obtenir la précision optimale. La complexité du calcul est donc

$$\mathcal{O}(N_J \log N_J).$$

Remarque 2.1 *Il est possible de recouvrer classiquement une complexité $\mathcal{O}(N_J)$ par un algorithme de type “nested iterations” ou “full multigrid”. Celui consiste à calculer successivement les solutions approchées correspondant aux discrétisations des espaces emboîtés*

$$V_0, V_1, \dots, V_J$$

à l’aide du schéma itératif PCG précédent. La solution initiale du schéma itératif à l’étape j est injectée comme solution initiale du schéma itératif à l’étape $j + 1$. Ainsi à chaque étape j , seul un nombre constant, indépendant de j , d’itérations est nécessaire pour atteindre la précision optimale (2.16) sur V_j . Les complexités de chaque étape j croissant exponentiellement en $\mathcal{O}(N_j)$, la complexité globale est donnée par le coût de la dernière itération soit $\mathcal{O}(N_J)$.

Les opérateurs intégraux ont en revanche généralement une représentation pleine dans les bases Φ_J et Ψ_{Λ_J} . D’après les propriétés de décroissance de leur noyau et les moments nuls des ondelettes ils peuvent par contre être comprimés efficacement en base d’ondelettes i.e. sans perdre la précision de la méthode et pour une complexité du produit matrice comprimée vecteur ramenée à $\mathcal{O}(N_J(\log N_J)^\alpha)$ pour un paramètre entier α fixé (voir [81], [13], [46], [89]). Dans ce cas le préconditionnement diagonal se réduit à $C = D_{\Lambda_J}$ et la complexité du calcul de la solution approchée est de même $\mathcal{O}(N_J(\log N_J)^{\alpha+1})$ voire $\mathcal{O}(N_J(\log N_J)^\alpha)$ en “full multigrid”.

Matrices non symétriques. Pour les problèmes non symétriques, la bornitude de (2.15) ne suffit pas à garantir la convergence des algorithmes itératifs classiques comme GMRES ou BiCGstab. Néanmoins, la réalisation de la condition de stabilité discrète implique le plus souvent des propriétés supplémentaires de la matrice A_{Ψ_Λ} qui assurent la convergence du GMRES. Si tel n’est pas le cas, une solution consiste à stabiliser le système de façon à le rendre défini positif sans détériorer la précision. Une nouvelle approche de ces techniques de stabilisation est introduite dans [9] dans le cadre d’AMR ou de discrétisations en ondelettes. En désespoir de cause, on peut toujours considérer les équations normales pour se ramener à une matrice définie positive.

Dans nos expériences numériques à suivre, les opérateurs seront toujours symétriques définis positifs et la disymétrie provient de la discrétisation de type Petrov-Galerkin. On appliquera un simple algorithme du second ordre “Conjugate Residual” CR où la direction de descente $U_{k+1} - U_k = \alpha_k P_k$, $P_k = R_k + \beta_k P_{k-1}$ est choisie cette fois de façon à minimiser localement le résidu $\|R_k\|$ (voir [73]). Cet algorithme converge au même taux que le gradient conjugué pour la classe plus large des matrices dont la partie symétrique est définie positive. Selon la proposition 2.2 il doit

s'appliquer au système

$$(D_\Lambda^{s-2t} A_{\tilde{\Psi}_\Lambda, \Psi_\Lambda} D_\Lambda^{-s}) D_\Lambda^s U = D_\Lambda^{s-2t} F$$

si on exprime la matrice et le vecteur en base d'ondelettes et à

$$\left(D_\Lambda^{s-2t} \tilde{T}_J A_{\tilde{\Phi}_J, \Phi_J} T_J^* D_\Lambda^{-s} \right) D_\Lambda^s \tilde{T}_J^{-*} U = D_\Lambda^{s-2t} \tilde{T}_J F$$

dans le cas d'un opérateur différentiel en discrétisation uniforme où l'on exprime la matrice et le vecteur en base de fonctions d'échelle $\Phi_J, \tilde{\Phi}_J$. Contrairement aux schémas de Galerkin, il est donc essentiel que les fonctions d'échelles et les ondelettes duales soient à supports compacts.

L'étape de préconditionnement se réduit comme pour l'algorithme PCG à

$$C P_k = D_\Lambda^{-2t} P_k$$

dans le premier cas et à

$$C P_k = T_J^* D_\Lambda^{-2t} \tilde{T}_J P_k$$

dans le second cas. Pour ce schéma itératif, le calcul de α_k et β_k est cependant plus commode dans le cas d'un préconditionnement à droite du système initial

$$(AC)C^{-1}U = F$$

que l'on obtient ici pour $s = 2t$. C'est donc ce choix que l'on adoptera en pratique, sous réserve que la stabilité soit vérifiée pour cette valeur de s .

Sous les hypothèses, ondelettes primales et duales à supports compacts, stabilité du schéma selon la proposition 2.2, convergence optimale du schéma itératif, compression du produit matrice-vecteur (sauf dans le cas d'une discrétisation uniforme d'opérateurs différentiels), on obtiendra comme précédemment un algorithme de résolution optimal (éventuellement à un facteur logarithmique près) en termes de complexité et de stockage.

2.1.2 Préconditionnement presque diagonal en base d'ondelettes

Les performances du préconditionnement diagonal dépendent de l'opérateur (essentiellement du ratio $\|a\|/\alpha_a$ dans le cas d'une forme bilinéaire coercive) et de la base d'ondelettes choisie par le biais des constantes de l'équivalence de norme. On verra en particulier au §2.1.3, pour l'opérateur laplacien (et l'identité en formulation de Galerkin) que les conditionnements obtenus dans le cas des ondelettes splines biorthogonales [29] se dégradent très vite avec l'ordre des splines. D'autre part dans le cas des opérateurs à coefficients variables il n'est pas clair que le choix du préconditionnement $D_{A_\Lambda}^{-1}$, bien que prenant en compte les variations locales des coefficients,

suffise à obtenir des nombres de conditionnement indépendants des coefficients $A(x)$.

Dans le but d'améliorer la robustesse du préconditionnement en base d'ondelettes, on propose naturellement de prendre en compte des termes non diagonaux. (voir [95]). Pour se faire on exploite le fait, qu'en base d'ondelettes, une large classe d'opérateurs parmi les opérateurs intégraux, les opérateurs différentiels et sous certaines conditions leurs inverses admettent une structure presque diagonale. Cette propriété, fautive en base de fonctions d'échelle, est issue de la décroissance du noyau de l'opérateur hors de la diagonale combinée aux moments nuls et à la régularité des ondelettes.

A titre d'exemple, soit l'opérateur de dérivée seconde avec conditions aux limites homogène sur l'intervalle $]0, 1[$

$$\begin{cases} \mathcal{A}u : = u'' = f \\ u(0) = u(1) = 0 \end{cases}$$

On montre facilement que sa représentation A_Ψ dans la base d'ondelettes Ψ telle que $(A_\Psi)_{\lambda, \lambda'} = \langle \mathcal{A}\psi_\lambda, \psi_{\lambda'} \rangle$, satisfait

$$|(A_\Psi)_{\lambda, \lambda'}| \lesssim 2^{j+j'} 2^{-\alpha_a |j-j'|} \chi_{I_\lambda \cap I_{\lambda'}},$$

où $\alpha_a \geq \inf(\sigma - 1, \tilde{n} + 1)$ et I_λ est le support de ψ_λ .

Les propriétés de décroissance des termes de la représentation en base d'ondelettes de l'opérateur \mathcal{A} sont stables par multiplication et addition (Algèbre) mais n'entraînent pas systématiquement les mêmes propriétés pour les termes de la matrice inverse. Ceci nécessite des hypothèses supplémentaires sur l'opérateur (voir [95]). C'est par exemple le cas des opérateurs différentiels à coefficients réguliers sur un domaine régulier ainsi que de l'opérateur laplacien sur un domaine polygonal (en dimension 2).

C'est aussi le cas de exemple simple ci-dessus où l'opérateur inverse \mathcal{A}^{-1} admet une représentation creuse dans la base duale $\tilde{\Psi}$. On a précisément dans ce cas l'estimation

$$|(A_\Psi^{-1})_{\lambda, \lambda'}| = |\langle \mathcal{A}^{-1}\tilde{\psi}_\lambda, \tilde{\psi}_{\lambda'} \rangle| \lesssim 2^{-j-j'} \frac{2^{-\alpha_{a-1} |j-j'|}}{(1 + 2^{\min(j, j')} |2^{-j} k - 2^{-j'} k'|)^\beta},$$

où $\alpha_{a-1} \geq \inf(\tilde{\sigma} + 2, n)$, $\beta \geq 2n - 1$.

Moyennant ces hypothèses, les propriétés de décroissance de l'inverse A_Ψ^{-1} suggèrent fortement le recours aux techniques de préconditionnement connues sous le nom de "Sparse Approximated Inverse" ou SPAI (voir par exemple [62]). On va considérer ci-dessous une discrétisation uniforme, qui est plus adaptée au calcul de tels préconditionnements, bien que ces techniques s'appliquent aussi dans le cas d'une discrétisation non uniforme.

Soit S un sous ensemble d'indices (λ, λ') de $\Lambda_J \times \Lambda_J$. L'idée de ces méthodes consiste à calculer une inverse approchée G_S de la matrice de Galerkin $A_{\Psi_{\Lambda_J}}$ (resp.

Petrov-Galerkin $A_{\tilde{\Psi}_{\Lambda_J}, \Psi_{\Lambda_J}}$) dont tous les termes sont nuls hors de l'ensemble d'indices (creux) S . La matrice G_S est uniquement déterminée en résolvant le problème de minimisation

$$\inf_{G_S} \|I - G_S A_{\Psi_{\Lambda_J}}\|_F$$

où

$$\|M\|_F = \sum_{i,l} M_{i,l}^2$$

est la norme de Frobenius.

L'avantage de cette stratégie est qu'elle s'adapte parfaitement au calcul parallèle dans la mesure où chaque ligne de la matrice G_S se calcule indépendamment en résolvant le problème de minimisation

$$\inf_{(G_S)_{i,\cdot}} \left(\sum_l |\delta_{i,l} - \sum_k (G_S)_{i,k} (A_{\Psi_{\Lambda_J}})_{k,l}|^2 \right).$$

La difficulté principale de ces méthodes réside dans le choix de l'ensemble S . Cet ensemble peut être fixé à l'avance selon des règles heuristique mais il existe aussi des techniques adaptatives où l'ensemble S est raffiné de façon itérative de façon à faire décroître la norme de Frobenius (voir [62]).

L'intérêt des ondelettes est ici double. Tout d'abord la matrice inverse est comprimée en base d'ondelettes bien plus qu'elle ne l'est en base de fonctions d'échelle, ce qui légitime la recherche d'une inverse creuse. De plus nous proposons de tirer simplement avantage des structures similaires de la matrice et de son inverse en choisissant S à partir de la compression de la matrice $A_{\Psi_{\Lambda_J}}$ (resp. $A_{\tilde{\Psi}_{\Lambda_J}, \Psi_{\Lambda_J}}$).

Une alternative consiste à exploiter aussi dans un premier temps le préconditionnement diagonal. Soit $A_{\Psi_{\Lambda_J}}$ symétrique définie positive, on note

$$B_J = D_{A_{\Psi_{\Lambda_J}}}^{-1/2} A_{\Psi_{\Lambda_J}} D_{A_{\Psi_{\Lambda_J}}}^{-1/2},$$

λ_M, λ_m ses valeurs propres extrémales et $\kappa = \lambda_M/\lambda_m$ son conditionnement. Alors la norme de $R_J := I_J - \frac{2}{\lambda_m + \lambda_M} B_J$ satisfait l'estimation

$$\|R_J\| \leq \frac{1 - \kappa}{1 + \kappa}$$

et $K_J := \frac{\lambda_M + \lambda_m}{2} \sum_{l=0}^k R_J^l$ l'estimation

$$\|M_J^{-1} - K_J\| \leq \frac{\lambda_M + \lambda_m}{2} \left(\frac{1 - \kappa}{1 + \kappa} \right)^{k+1}.$$

Soit \tilde{R}_J une compression (cf Appendice 3) de la matrice R_J , l'ensemble S est alors défini comme l'ensemble des indices des termes non nuls de $\tilde{R}_J, \tilde{R}_J^2, \dots, \tilde{R}_J^k$. Dans ce cas le préconditionnement en base d'ondelettes s'écrit $G_S D_{A_{\Psi_{\Lambda_J}}}^{-1}$. Si l'on suppose κ

suffisamment petit et indépendant de J , on obtient une bonne approximation de la matrice inverse.

L'idée d'associer les techniques SPAI à la représentation de l'opérateur en base d'ondelettes afin de bénéficier des propriétés de compression de l'inverse est aussi développée indépendamment dans [21]. Dans ces travaux une transformée en ondelettes orthogonales est appliquée à des matrices éléments finis avant le calcul de l'inverse creuse approchée. La différence principale est que les auteurs ne tiennent pas compte de l'interaction entre les niveaux dans leurs expériences numériques, afin de simplifier le calcul de la matrice G_S . Dans notre contexte, nos expériences numériques montrent que la prise en compte de ces interactions est cruciale pour améliorer de façon significative le préconditionnement diagonal.

Une stratégie assez proche dans l'esprit de la notre bien que conceptuellement différente est proposée dans [74] pour le préconditionnement d'opérateurs elliptiques à coefficients variables. Elle repose, suivant les travaux théoriques de [94], sur l'utilisation de "vaguelettes" et une méthode de type "gel des coefficients" dans le cadre d'ondelettes périodiques.

Dans nos expériences numériques, on considérera toujours le choix issu de la compression d'un opérateur différentiel en discrétisation de Galerkin $A_{\Psi_{\Lambda_J}}$ ou de Petrov-Galerkin $A_{\tilde{\Psi}_J, \Psi_J}$, ce qui revient à définir l'ensemble S comme suit. Soit la renumérotation des indices d'ondelettes selon la bijection $\lambda : \{1, \dots, N_J\} \rightarrow \Lambda_J$, on définit pour $\varepsilon > 0$ l'ensemble

$$S_\varepsilon = \{(k, l), |A_{k,l}| \geq \varepsilon A_{k,k}\} \cup \{(k, l) : (\lambda(k), \lambda(l)) \in \Delta_{j_0}^2\},$$

qui comprend $\mathcal{O}(N_J)$ termes pour ε fixé (voir figure 2.1).

L'inverse approchée G_{S_ε} sera calculée selon la technique introduite dans [69], qui minimise la norme de Frobenius de poids $A_{\Psi_{\Lambda_J}}$ (resp. $A_{\tilde{\Psi}_J, \Psi_J}$).

$$\text{Petrov-Galerkin: } \forall i \in S_\varepsilon \text{ résoudre } \sum_{k:(k,l) \in S_\varepsilon} (A_{\tilde{\Psi}_J, \Psi_J})_{i,k} (G_{S_\varepsilon})_{k,l} = \delta_i^l, \quad \forall l : (i, l) \in S_\varepsilon,$$

$$\text{Galerkin: } \forall i \in S_\varepsilon \text{ résoudre } \sum_{l:(k,l) \in S_\varepsilon, l \geq k} \hat{G}_{k,l} (A_{\Psi_J})_{l,i} = \delta_i^l, \quad \forall k : (k, i) \in S_\varepsilon, i \geq k,$$

$$(G_{S_\varepsilon})_{k,l} = \frac{\hat{G}_{k,l}}{\sqrt{\hat{G}_{k,k}}}, \quad \forall l : (k, l) \in S_\varepsilon, l \geq k.$$

Pour la discrétisation de Galerkin, on obtient le préconditionneur à gauche $G_{S_\varepsilon}^T G_{S_\varepsilon}$, alors que pour la discrétisation de Petrov-Galerkin, on obtient le préconditionneur à droite G_{S_ε} .

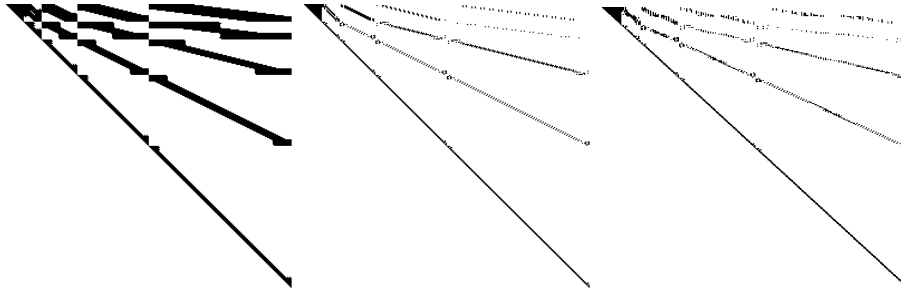


FIG. 2.1 – Pour le générateur $\tilde{\psi}^{1,5}$ et l'opérateur $\nabla \cdot \nu \nabla$ sur l'intervalle $[0, 1]$ discrétisé en formulation de Galerkin avec $J = 8$, (i) termes non nuls de la matrice de rigidité $A_{\Psi_{\Lambda_J}}$ avec $\nu = 1$, (partie triangulaire supérieure 7398 coefficients non nuls). Termes non nuls du SPAI G_{S_ε} pour $\varepsilon = .1$ pour: (ii) $\nu(x) = 1$ donnant $\#S_\varepsilon = 1400$, $\mathcal{K}(G_{S_\varepsilon}^T A_{\Psi_{\Lambda_J}} G_{S_\varepsilon}) = 1,81$, et (iii) $\nu(x) = 1 + 10^{-3} - \sin \pi x$, donnant $\#S_\varepsilon = 1439$, $\mathcal{K}(G_{S_\varepsilon}^T A_{\Psi_{\Lambda_J}} G_{S_\varepsilon}) = 2,33$.

Complexité du calcul de G_{S_ε} . La difficulté du calcul de G_{S_ε} provient de la prise en compte de l'interaction entre les niveaux. Cependant les calculs restent de l'ordre de N_J et la constante peut être maintenue petite pour les raisons suivantes.

Tout d'abord on ne prend en compte que les termes comprimés de la matrice en base d'ondelettes, soit $\mathcal{O}(N_J)$ termes avec une constante dépendant de ε . Ensuite, pour chaque ligne, la détermination des éléments de G_{S_ε} implique le calcul supplémentaire d'un nombre indépendant de N_J de termes non nuls de la matrice. De plus dans le cas d'opérateurs différentiels à coefficients constants il faut tenir compte de l'invariance par translation de la matrice en dehors des bords. Soit L_ε , le nombre de niveaux d'interactions de la matrice comprimée. En dehors d'un voisinage des bords dépendant de ε , les blocs $\langle W_j, W_j \rangle, \dots, \langle W_j, W_{j+L_\varepsilon} \rangle$ ont une structure de type Toeplitz et les lignes correspondantes de G_{S_ε} sont donc simplement déduites l'une de l'autre par translation. Dans ce cas le calcul de G_{S_ε} est simplement proportionnel au nombre de niveaux i.e. $\mathcal{O}(\log(N_J))$. Dans le cas d'opérateurs différentiels à coefficients variables, un gel local des coefficients peut être envisagé pour réduire la complexité du calcul de G_{S_ε} . Dans tous les cas le calcul parallèle des lignes de G_{S_ε} s'applique naturellement (voir [62]).

2.1.3 Exemple 1: opérateur laplacien

Dimension 1: tore \mathbb{T}^1 et intervalle $[0, 1]$.

A. Galerkin

On présente dans ce paragraphe, pour la famille des splines biorthogonales, les nombres de conditionnement des matrices de masse $M_{\Psi_{\Lambda_J}} := \langle \Psi_{\Lambda_J}, \Psi_{\Lambda_J} \rangle$ et de rigidité $A_{\Psi_{\Lambda_J}} := \langle \Psi'_{\Lambda_J}, \Psi'_{\Lambda_J} \rangle$ preconditionnées par la "diagonale". Le premier objectif est de vérifier numériquement le bien fondé du choix des ondelettes de bords de la construction sur l'intervalle du §1.3, en comparant les résultats obtenus sur

l'intervalle à ceux obtenus sur le tore \mathbb{T}^1 . Le second objectif est d'évaluer l'efficacité du préconditionnement diagonal pour différents générateurs choisis parmi la famille des ondelettes splines biorthogonales et de leurs duales. On se restreint ici au cas d'une discrétisation uniforme dans la mesure où les performances du préconditionnement diagonal ne dépendent que des constantes d'équivalence de norme et donc, à la limite, sont indépendantes de l'ensemble Λ .

Selon les notations du §1.3 pour la famille des splines biorthogonales, on va considérer pour l'espace d'approximation et les bases d'ondelettes, les générateurs duaux $(\tilde{\phi}^{1,\tilde{n}}, \tilde{\psi}^{1,\tilde{n}})$ pour $\tilde{n} = 3, 5, 7, 9$ et les générateurs splines $(\phi^2, \psi^{2,2})$, $(\phi^2, \psi^{2,4})$, $(\phi^3, \psi^{3,3})$, $(\phi^3, \psi^{3,5})$ et $(\phi^4, \psi^{4,8})$.

On notera j_0 le niveau minimal imposé par la construction sur l'intervalle et $A_{\Phi_{j_0}}$ la matrice de rigidité dans la base Φ_{j_0} . Pour

$$\Lambda_J^\dagger = \Lambda_J / \Delta_{j_0}$$

les matrices diagonales $D = (2^{|\lambda|} \delta_{\lambda,\lambda'})_{\lambda,\lambda' \in \Lambda_J^\dagger}$ et $D_a = (\langle \nabla \psi_\lambda, \nabla \psi_{\lambda'} \rangle \delta_{\lambda,\lambda'})_{\lambda,\lambda' \in \Lambda_J^\dagger}$ sont cette fois restreintes aux indices des ondelettes Λ_J^\dagger . De façon à s'affranchir du choix des ondelettes de bord sur l'intervalle $[0, 1]$, on va aussi considérer la matrice diagonale par blocs D_b confondue avec D_a pour les ondelettes intérieures et égale au bord 0 (et symétriquement au bord 1) à $2^{2j} B_0$ à chaque niveau j , où $B_0 = \{2^{-2j} (\psi_{j,\alpha}, \psi_{j,\beta})\}_{\alpha,\beta=0}^{M-1}$. On définit ainsi trois préconditionneurs de la matrice de rigidité:

$$C_J^D = \begin{pmatrix} A_{\Phi_{j_0}}^{-1} & 0 \\ 0 & D^{-2} \end{pmatrix}, \quad C_J^{D_a} = \begin{pmatrix} A_{\Phi_{j_0}}^{-1} & 0 \\ 0 & D_a^{-1} \end{pmatrix}, \quad C_J^{D_b} = \begin{pmatrix} A_{\Phi_{j_0}}^{-1} & 0 \\ 0 & D_b^{-1} \end{pmatrix}.$$

Au niveau j_0 , on a ici simplement retenu l'inverse exacte $A_{\Phi_{j_0}}^{-1}$. Il est clair qu'en dimension supérieure, selon la taille de cette matrice, il peut être souhaitable de la remplacer par une inverse approchée, issue par exemple d'une factorisation incomplète LL^T .

Les tables 2.2, 2.3, 2.4 présentent les nombres de conditionnement sur l'intervalle $[0, 1]$

$$\begin{cases} \mathcal{K}_M = \mathcal{K}(M_{\Psi_J}) \\ \mathcal{K}_D = \mathcal{K}((C_J^D)^{\frac{1}{2}} A_{\Psi_J} (C_J^D)^{\frac{1}{2}}) \\ \mathcal{K}_{D_a} = \mathcal{K}((C_J^{D_a})^{\frac{1}{2}} A_{\Psi_J} (C_J^{D_a})^{\frac{1}{2}}) \\ \mathcal{K}_{D_b} = \mathcal{K}((C_J^{D_b})^{\frac{1}{2}} A_{\Psi_J} (C_J^{D_b})^{\frac{1}{2}}). \end{cases}$$

Noter que les ondelettes aux extrémités 0 et 1 étant par construction choisies orthogonales, elles sont d'ores et déjà optimales pour le conditionnement de la matrice de masse et il s'avère inutile de préconditionner celle-ci par l'inverse de sa diagonale.

Les résultats doivent être comparés à ceux obtenus dans le cadre idéal des ondelettes périodiques où d'une part aucune adaptation aux extrémités 0 et 1 n'est

nécessaire et d'autre part la décomposition s'effectue jusqu'au niveau $j_0 = 0$ (avec $V_0 = \text{Span}\{1\}$, le mode constant étant bien sûr filtré dans le cas de la matrice de rigidité).

La table 2.1 présente, sur le tore \mathbb{T}^1 , les nombres de conditionnement \mathcal{K}_M de la matrice de masse et \mathcal{K}_D de la matrice de rigidité préconditionnée par la diagonale $2^{-2|\lambda|}\delta_{\lambda,\lambda'}$, pour différents générateurs parmi la famille des ondelettes splines biorthogonales $\psi^{n,\tilde{n}}$ et leurs duales $\tilde{\psi}^{n,\tilde{n}}$. Noter que d'après les relations de biorthogonalité $\langle \Psi_\nabla, \tilde{\Psi}_\nabla \rangle = I_\nabla$, on a

$$\lim_{J \rightarrow \infty} \mathcal{K}_{M_{\Psi_{\Lambda_J}}} = \lim_{J \rightarrow \infty} \mathcal{K}_{M_{\tilde{\Psi}_{\Lambda_J}}}$$

D'autre part, les relations de dérivation/intégration sur la famille des ondelettes splines biorthogonales (cf §3.2) $\frac{d}{dx}\psi^{n,\tilde{n}} = -4\psi^{n-1,\tilde{n}+1}$ (resp. $\frac{d}{dx}\tilde{\psi}^{n,\tilde{n}} = 4\tilde{\psi}^{n+1,\tilde{n}-1}$) impliquent sur le tore \mathbb{T}^1 l'égalité des conditionnements \mathcal{K}_M associé au générateur $\psi^{n-1,\tilde{n}+1}$ (resp. $\tilde{\psi}^{n+1,\tilde{n}-1}$) et \mathcal{K}_D associé au générateur $\psi^{n,\tilde{n}}$ (resp. $\psi^{n-1,\tilde{n}+1}$).

Ces deux observations étant faites, pour interpréter les conditionnements obtenus sur le tore, il va suffire de considérer ceux des matrices de masse associées au générateur $\psi^{n,\tilde{n}}$. Tous les autres cas de figure, générateur dual $\tilde{\psi}^{n,\tilde{n}}$ ou matrice de rigidité, s'y ramènent. Heuristiquement, on distingue alors le cas $n = 1$ des autres cas $n \geq 2$. Dans le premier cas, plus \tilde{n} augmente, plus on s'éloigne de la base de Haar orthogonale obtenue pour $\tilde{n} = 1$. On s'attend donc à voir augmenter le nombre de conditionnement de la matrice de masse. Au contraire, pour $n \geq 2$, plus \tilde{n} augmente, plus on stabilise dans L^2 la base d'ondelettes et on s'attend donc à voir diminuer le nombre de conditionnement de la matrice de masse. On constate aussi que lorsque n augmente le conditionnement de la matrice de masse augmente très rapidement à \tilde{n} "fixé".

TAB. 2.1 – Sur le tore \mathbb{T}^1 , pour $J = 8$ et différents générateurs, nombres de conditionnement de la matrice de masse \mathcal{K}_M et de la matrice de rigidité préconditionnée par la diagonale \mathcal{K}_D .

générateur	$\psi^{2,2}$	$\psi^{2,4}$	$\psi^{3,3}$	$\psi^{3,5}$	$\psi^{4,6}$	$\psi^{4,8}$	$\psi^{6,12}$	$\tilde{\psi}^{1,3}$	$\tilde{\psi}^{1,5}$	$\tilde{\psi}^{1,7}$
\mathcal{K}_M	8.1	4.1	56	19	105	69	1100	2.9	4.0	5.0
\mathcal{K}_D	2.9	4.3	4.1	4.0	16	16	260	8.3	4.1	4.0

TAB. 2.2 – Pour les générateurs $(\tilde{\phi}^{1,\tilde{n}}, \tilde{\psi}^{1,\tilde{n}})$, sur l'intervalle, nombres de conditionnement $\mathcal{K}_M, \mathcal{K}_D, \mathcal{K}_{D_a}, \mathcal{K}_{D_b}$.

\tilde{n}	J	\mathcal{K}_D	\mathcal{K}_{D_a}	\mathcal{K}_{D_b}	\mathcal{K}_M	\tilde{n}	J	\mathcal{K}_D	\mathcal{K}_{D_a}	\mathcal{K}_{D_b}	\mathcal{K}_M
3	$j_0 = 3$	1	1	1	1,20	5	$j_0 = 4$	1	1	1	1.20
	7	116	7.08	7.06	3.40		7	66	4.77	4.04	3.67
	8	123	7.61	7.59	3.80		8	69	4.96	4.10	4.25
7	$j_0 = 5$	1	1	1	1.49	9	$j_0 = 5$	1	1	1	2.27
	7	92	5.37	4.76	4.02		7	255	16.05	11.52	9.98
	8	106	6.19	5.62	5.04		8	301	18.5	13.1	12.1

TAB. 2.3 – Pour les générateurs $(\phi^2, \psi^{2,2})$ et $(\phi^2, \psi^{2,4})$, sur l'intervalle, nombres de conditionnement $\mathcal{K}_M, \mathcal{K}_D, \mathcal{K}_{D_a}, \mathcal{K}_{D_b}$.

ψ	J	\mathcal{K}_M	\mathcal{K}_D	\mathcal{K}_{D_a}	\mathcal{K}_{D_b}	ψ	J	\mathcal{K}_M	\mathcal{K}_D	\mathcal{K}_{D_a}	\mathcal{K}_{D_b}
$\psi^{2,2}$	$j_0 = 2$	2.1	1	1	1	$\psi^{2,4}$	$j_0 = 4$	2.9	1	1	1
	7	7.6	40	3.7	2.75		7	4.3	68	6.1	5.1
	8	8.2	41	3.8	2.9		8	4.5	73	6.7	5.9

TAB. 2.4 – Pour les générateurs $(\phi^3, \psi^{3,3})$, $(\phi^3, \psi^{3,5})$ et $(\phi^4, \psi^{4,8})$, sur l'intervalle, nombres de conditionnement \mathcal{K}_M et \mathcal{K}_{D_a} .

ψ	J	\mathcal{K}_{D_a}	\mathcal{K}_M	ψ	\mathcal{K}_{D_a}	\mathcal{K}_M	ψ	J	\mathcal{K}_{D_a}	\mathcal{K}_{D_b}	\mathcal{K}_M
$\psi^{3,3}$	$j_0 = 4$	1	8.0	$\psi^{3,5}$	1	8.0	$\psi^{4,8}$	$j_0 = 5$	1	1	21
	7	5.41	31		5.67	17.7		7	22.2	15	67
	8	5.42	38		5,71	18		8	22.3	16	68

De ces résultats numériques, on conclut tout d'abord que les nombres de conditionnement obtenus sur l'intervalle $[0, 1]$ sont quasi optimaux comparés à ceux du cadre "ideal" périodique pour la matrice de masse et la matrice de rigidité préconditionnée par l'inverse de la véritable diagonale de l'opérateur D_a . En revanche les facteurs d'échelle $2^{-2|\lambda|}\delta_{\lambda,\lambda'}$ donnent des résultats médiocres qui se dégradent très vite avec l'ordre d'approximation (i.e. aussi le nombre d'ondelettes de bords).

D'autre part, on constate dans le cas des ondelettes spline $\psi^{n,\tilde{n}}$ que les nombres de conditionnement obtenus aussi bien sûr l'intervalle que sur le tore \mathbb{T}^1 se dégradent très vite avec l'ordre des splines. En pratique ils sont déjà médiocres pour $n \geq 3$ pour la matrice de masse et $n \geq 4$ pour la matrice de rigidité. Au contraire, les ondelettes duales $\tilde{\psi}^{1,\tilde{n}}$ donnent de bons résultats pour des ordres d'approximation \tilde{n} jusqu'à 7,9.

B. Petrov-Galerkin

Étant données les AMR biorthogonales (V_j, \tilde{V}_j) telles que $V_j \subset H_0^1 \cap H^{2-\alpha}$ et $\tilde{V}_j \subset H_0^\alpha$, pour un certain $0 \leq \alpha \leq 1$, on considère la discrétisation de Petrov Galerkin du laplacien avec conditions aux limites homogènes. On supposera un domaine suffisamment régulier tel que l'opérateur laplacien définisse un isomorphisme de $H^{-\alpha}$ dans $H_0^1(\Omega) \cap H^{2-\alpha}$. Pour $f \in H^{-\alpha}$, u_J est solution du système

$$\begin{cases} u_J \in V_J, \\ \langle -\Delta u_J, \tilde{v}_J \rangle_{H^{-\alpha}, H_0^\alpha} = \langle f, \tilde{v}_J \rangle_{H^{-\alpha}, H_0^\alpha} \quad \forall \tilde{v}_J \in \tilde{V}_J. \end{cases} \quad (2.17)$$

L'existence, l'unicité et l'obtention d'estimations d'erreurs optimales sont assujéties à la condition inf-sup

$$\inf_{u_J \in V_J} \sup_{\tilde{v}_J \in \tilde{V}_J} \frac{\langle -\Delta u_J, \tilde{v}_J \rangle_{H^{-\alpha}, H_0^\alpha}}{\|u_J\|_{H^{2-\alpha}} \|\tilde{v}_J\|_{H_0^\alpha}} \geq \beta > 0, \quad (2.18)$$

avec une constante β indépendante de J .

Soient $A_{\tilde{\Psi}_{\Lambda_J}, \Psi_{\Lambda_J}} = -\langle \Psi''_{\Lambda_J}, \tilde{\Psi}_{\Lambda_J} \rangle_{H^{-\alpha}, H_0^\alpha}$ la matrice de rigidité en bases d'ondelettes, D_a la diagonale de $A_{\tilde{\Psi}_{\Lambda_J}, \Psi_{\Lambda_J}}$ restreinte aux indices d'ondelettes Λ_J^+ et $A_{\tilde{\Phi}_{j_0}, \Phi_{j_0}}$ la matrice de rigidité au niveau j_0 en bases de fonctions d'échelle.

Selon la proposition 2.2, la condition inf-sup (2.18) équivaut à une borne uniforme sur le nombre de conditionnement

$$\mathcal{K}_{D_a}(\alpha) = \mathcal{K}\left((C_J^{D_a})^{\alpha/2} A_{\tilde{\Psi}_J, \Psi_J} (C_J^{D_a})^{1-\alpha/2}\right), \quad \text{où } C_J^{D_a} = \begin{pmatrix} A_{\tilde{\Phi}_{j_0}, \Phi_{j_0}}^{-1} & 0 \\ 0 & D_a^{-1} \end{pmatrix},$$

que l'on va donc calculer numériquement pour plusieurs valeurs de α et J .

Pour les générateurs spline $\psi^{3,3}$ and $\psi^{3,5}$ des fonctions d'essais, les conditionnements obtenus table 2.5 sont similaires aux conditionnement des matrices de masse de Galerkin. A nouveau, on constate à la lecture de la table 2.6, que les résultats sont meilleurs pour le choix des générateurs duaux $\tilde{\psi}^{1, \tilde{n}}$, $\tilde{n} = 5, 7, 9$ (la valeur $\tilde{n} = 3$ est à rejeter dans ce cas car $\tilde{\phi}^{1, \tilde{n}} \notin H^{3/2+\varepsilon}$) comme générateurs des fonctions d'essai.

TAB. 2.5 – Pour les générateurs $(\phi^3, \psi^{3, \tilde{n}})$ (fonctions d'essai) et $(\tilde{\phi}^3, \tilde{\psi}^{3, \tilde{n}})$ (fonctions test), $\tilde{n} = 3, 5$, nombres de conditionnement $\mathcal{K}_{D_a}(0)$ de la matrice de rigidité pré-conditionnée sur l'intervalle.

ψ	J	$\mathcal{K}_{D_a}(0)$	ψ	J	$\mathcal{K}_{D_a}(0)$
	$j_0 = 4$	1		$j_0 = 4$	1
$\psi^{3,3}$	6	29.5	$\psi^{3,5}$	6	17.7
	7	32.8		7	20.4
	8	34.9		8	21.9

TAB. 2.6 – Pour les générateurs $(\tilde{\phi}^{1,\tilde{n}}, \tilde{\psi}^{1,\tilde{n}})$ (fonctions d’essai) et $(\phi^1, \psi^{1,\tilde{n}})$ (fonctions test), $\tilde{n} = 5, 7, 9$, nombres de conditionnement $\mathcal{K}_{D_a}(0)$ de la matrice de rigidité préconditionnée sur l’intervalle.

\tilde{n}	J	$\mathcal{K}_{D_a}(0)$	$\mathcal{K}_{D_a}(.2)$	$\mathcal{K}_{D_a}(.5)$
5	$j_0 = 4$	1	1	1
	6	7.55	7.31	7.86
	7	9.69	9.27	10.3
	8	11.1	10.5	12.3
\tilde{n}	J	$\mathcal{K}_{D_a}(0)$	$\mathcal{K}_{D_a}(.15)$	$\mathcal{K}_{D_a}(.5)$
7	$j_0 = 5$	1	1	1
	6	5.01	4.92	5.01
	7	8.08	7.96	8.56
8	8	10.0	9.95	11.24
	\tilde{n}	J	$\mathcal{K}_{D_a}(0)$	$\mathcal{K}_{D_a}(.2)$
9	$j_0 = 5$	1	1	1
	6	7.36	6.98	6.86
	7	11.5	11.0	11.4
	8	14.4	13.9	15.1

C. Préconditionnement presque diagonal.

Les tables 2.7 et 2.8 indiquent les conditionnements obtenus sur l’intervalle $[0, 1]$ pour le préconditionnement presque diagonal des matrices de rigidité et de masse (Galerkin) ainsi que la complexité du préconditionnement $\#S_\varepsilon = C(\varepsilon)N_J$ qui correspond au coût d’une application de la matrice G_{S_ε} . Les conditionnements obtenus par préconditionnement diagonal \mathcal{K}_{D_a} et \mathcal{K}_M sont rappelés à titre de comparaison.

TAB. 2.7 – Conditionnements des matrices de masse et de rigidité préconditionnées sur l’intervalle pour les générateurs $\psi^{4,8}$ et $\tilde{\psi}^{1,\tilde{n}}$ et le taux de compression $\varepsilon = .1$.

ψ	J	\mathcal{K}_{D_a}	\mathcal{K}_M	$C_M(.1)$	$\mathcal{K}(G^T M_{\Psi_{\Lambda_J}} G)$	$C_A(.1)$	$\mathcal{K}(G^T A_{\Psi_{\Lambda_J}} G)$
$\psi^{4,8}$	8	22.3	68	5	6.80	7	4.41
$\tilde{\psi}^{1,3}$	8	7.61	3.80	2	2.47	11	2.15
$\tilde{\psi}^{1,5}$	8	4.96	4.25	4	2.36	5	1.81
$\tilde{\psi}^{1,7}$	8	6.19	5.04	5	2.70	5	1.84
$\tilde{\psi}^{1,9}$	8	18.5	12.1	5	3.26	6	2.25

TAB. 2.8 – Conditionnements des matrices de masse et de rigidité préconditionnées sur l'intervalle pour les générateurs $\psi^{4,8}$ et $\tilde{\psi}^{1,\tilde{n}}$ et le taux de compression $\varepsilon = .01$.

ψ	J	\mathcal{K}_{D_a}	\mathcal{K}_M	$C_M(.01)$	$\mathcal{K}(G^T M_{\Psi_{\Lambda_J}} G)$	$C_A(.01)$	$\mathcal{K}(G^T A_{\Psi_{\Lambda_J}} G)$
$\psi^{4,8}$	8	22.3	68	11	4.60	15	2.32
$\tilde{\psi}^{1,3}$	8	7.61	3.80	7	1.29	15	1.70
$\tilde{\psi}^{1,5}$	8	4.96	4.25	9	1.19	14	1.23
$\tilde{\psi}^{1,7}$	8	6.19	5.04	10	1.23	13	1.30
$\tilde{\psi}^{1,9}$	8	18.5	12.1	11	1.88	15	1.40

On observe par rapport au préconditionnement diagonal une diminution considérable du nombre de conditionnement, en particulier dans le cas du générateur spline $\psi^{4,8}$. D'autre part, le coût du préconditionnement reste toujours bien inférieur au coût cumulé du produit matrice-vecteur en base de fonctions d'échelle et des transformés en ondelettes.

La figure 2.2 étudie la dépendance, vis à vis du taux de compression ε et de l'échelle maximale J , de la complexité $C(\varepsilon)$ ($\sim \max(\log(\frac{1}{\varepsilon}), \log(N_J))$) et du conditionnement $\mathcal{K}(G_{S_\varepsilon}^T A_{\Psi_{\Lambda_J}} G_{S_\varepsilon})$ (par le biais du nombre d'itérations nécessaire pour obtenir un taux de décroissance du résidu de 10^{-6} par l'algorithme PCG).

Le générateur sur \mathbb{R} est $(\tilde{\phi}^{1,\tilde{n}}, \tilde{\psi}^{1,\tilde{n}})$ pour $\tilde{n} = 5$. On constate d'une part que la dépendance en J du conditionnement est quasi inexistante et d'autre part que le nombre d'itération minimal est quasiment atteint dès $\varepsilon = 0,1$ à $0,01$.

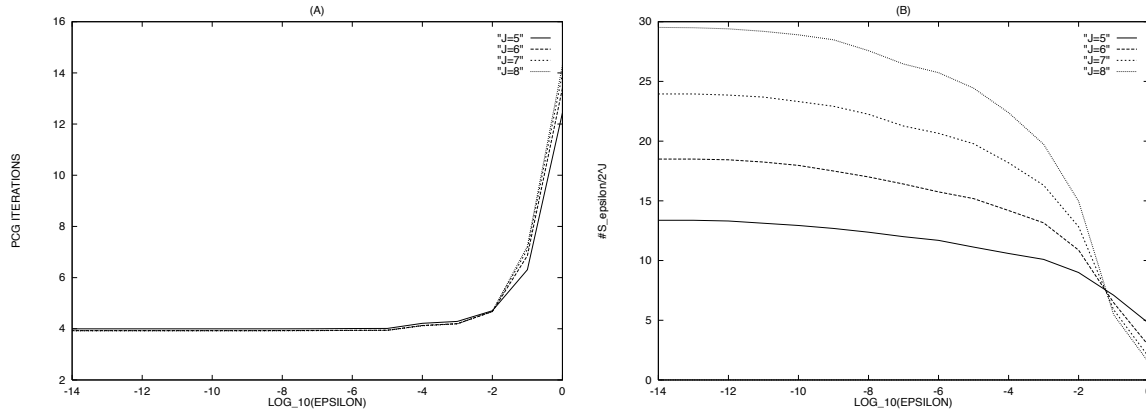


FIG. 2.2 – (A) Nombre d'itérations pour un taux de décroissance du résidu de 10^{-6} par l'algorithme PCG. (B) complexité $C(\varepsilon)$ du préconditionnement presque diagonal. Le générateur sur \mathbb{R} pour la construction sur l'intervalle est $(\tilde{\phi}^{1,\tilde{n}}, \tilde{\psi}^{1,\tilde{n}})$ pour $\tilde{n} = 5$.

Dimension 2: domaines tensoriels et décomposition de domaine

Les figures 2.3, 2.4 représentent la convergence des gradients conjugués préconditionnés pour les schémas de Galerkin et de Petrov-Galerkin sur le carré $]0, 1[^2$. Pour de tels domaines tensoriels, on considère les décompositions isotrope ou anisotrope et le préconditionnement est soit diagonal ($C_J^{D_a}$), soit presque diagonal. Les générateurs pour l'espace d'approximation $V_J(]0, 1[^2)$ sont sur \mathbb{R} l'ondelette duale d'ordre 5 de la fonction boîte ($\tilde{\phi}^{1,5}, \tilde{\psi}^{1,5}$) ou les ondelettes splines affines ($\phi^2, \psi^{2,\tilde{n}}$) pour $\tilde{n} = 2, 4$.

La figure 2.5 représente la courbe des résidus de l'algorithme PCG avec préconditionnement diagonal ($C_J^{D_a}$) dans le cas du domaine en L. Les générateurs sur \mathbb{R} sont les ondelettes affines ($\phi^2, \psi^{2,\tilde{n}}$) pour $\tilde{n} = 2, 4$ et la construction des ondelettes d'interfaces est celle décrite dans le §1.4.3. Comme c'est le cas aux extrémités de l'intervalle, le choix des ondelettes aux interfaces est déterminant pour préserver l'efficacité du préconditionnement diagonal en base d'ondelettes. Ici les ondelettes sont celles du §1.4.3 dans l'exemple du domaine en L avec conditions aux limites homogènes (voir figures 1.20 et 1.21). En particulier, le choix aux faces I_2 et I_4 d'une ondelette symétrique et d'une ondelette antisymétrique (1.149) induit localement des matrices de masse et de rigidité 2 – 2 diagonales, ce qui semble naturellement avantageux pour le préconditionnement diagonal.

Les résultats obtenus sont conformes à ceux sur l'intervalle du point de vue des ordres de grandeur obtenus ainsi que de la comparaison des performances des générateurs testés. En particulier, heuristiquement, pour les générateurs $\tilde{\psi}^{1,5}$ et $\psi^{2,2}$, le préconditionnement isotropique est meilleur que l'anisotropique, dans la mesure où la matrice de rigidité (préconditionnée) sur l'intervalle est mieux conditionnée que la matrice de masse.

Le préconditionnement presque diagonal améliore de façon significative les résultats mais est cependant beaucoup moins spectaculaire qu'en dimension 1 sur l'intervalle $[0, 1]$. Ceci est dû au fait que l'inverse de l'opérateur en base d'ondelettes a une structure moins proche de l'opérateur lui-même dans le cas d'un domaine polygonal en raison de la présence de coins. Il faudrait en tenir compte dans le choix de l'ensemble S .

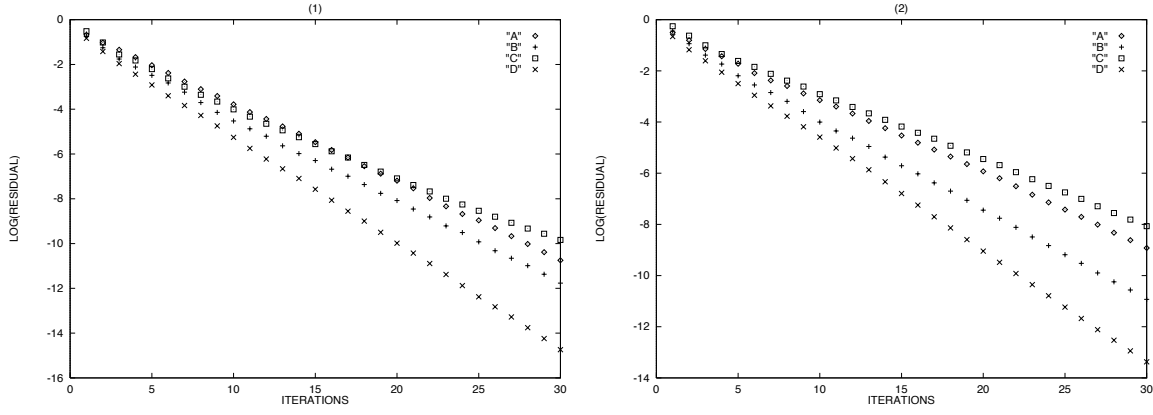


FIG. 2.3 – Résidus de l'algorithme PCG (Galerkin) ou PCR (Petrov-Galerkin) sur l'espace des fonctions d'essai $V_J([0, 1]^2)$ avec les générateurs sur \mathbb{R} ($\tilde{\phi}^{1,5}, \tilde{\psi}^{1,5}$) et la solution exacte $u = \sin 40\pi x \sin 40\pi y$. (A) Préconditionnement diagonal anisotropique (Galerkin), (B) Préconditionnement diagonal isotropique (Galerkin), (C) Préconditionnement diagonal anisotropique (Petrov-Galerkin), (D) Préconditionnement presque diagonal isotropique (Galerkin) avec $\varepsilon = .05$ donnant $\#S_\varepsilon \sim 6.2^{2 \cdot J}$ pour $J = 7$ et $\#S_\varepsilon \sim 12.2^{2 \cdot J}$ pour $J = 6$. (1) $J = 6$, (2) $J = 7$.

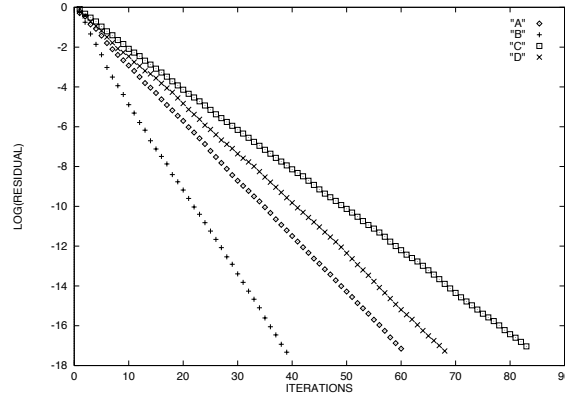
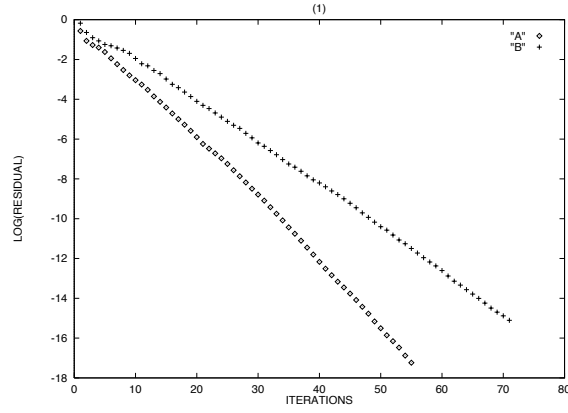


FIG. 2.4 – Résidus de l'algorithme PCG en discrétisation de Galerkin sur $V_J([0, 1]^2)$, $J = 8$, les générateurs sur \mathbb{R} ($\phi^2, \psi^{2, \tilde{n}}$), et la solution exacte $u = \sin 40\pi x \sin 40\pi y$. (A) préconditionnement diagonal anisotropique pour $\tilde{n} = 2$, (B) préconditionnement diagonal isotropique pour $\tilde{n} = 2$, (C) préconditionnement diagonal anisotropique pour $\tilde{n} = 4$, (D) préconditionnement diagonal isotropique pour $\tilde{n} = 4$.



(2) SOLUTION APPROCHEE

(3) ERREUR D'APPROXIMATION

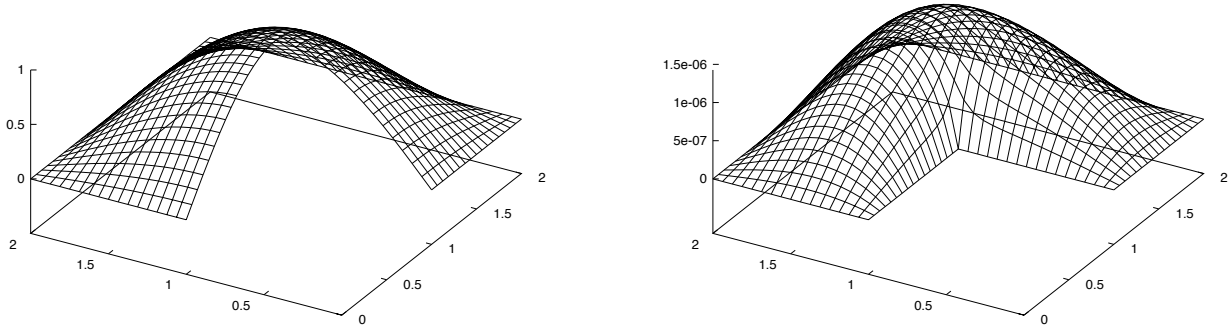


FIG. 2.5 – Pour la solution exacte $u = \sin(\frac{\pi}{2}x) \sin(\frac{\pi}{2}y)$: (1) résidus de l'algorithme PCG avec préconditionnement diagonal ($C_J^{D_a}$) sur le domaine en L en discrétisation de Galerkin à l'échelle $J = 8$ et le choix de générateurs sur \mathbb{R} ($\phi^2, \psi^{2, \tilde{n}}$); (A) $\tilde{n} = 2$, (B) $\tilde{n} = 4$. (2) solution approchée et (3) erreur d'approximation pour $J = 8$.

2.1.4 Exemple 2: opérateur elliptique du second ordre à coefficients variables

Dans ce paragraphe, on teste numériquement les préconditionnements diagonaux $C_J^{D_a}$ et C_J^D , et presque diagonaux $G_{S_\varepsilon}^T G_{S_\varepsilon}$ dans le cas d'opérateurs d'ordre 2 à coefficients variables

$$\mathcal{A} = -\nabla \cdot \nu(x) \nabla$$

avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes. On suppose $\nu \in L^\infty$ et $\alpha = \sup_{x \in \Omega} \nu(x) > 0$, de sorte que la forme bilinéaire associée a soit elliptique de constante d'ellipticité α . On note $\|a\|$ la norme de la forme bilinéaire. Les facteurs d'échelle $2^{-2|N|}$ ne prenant pas en compte les variations locales de ν le conditionnement de $(C_J^D)^{\frac{1}{2}} A \Psi_J (C_J^D)^{\frac{1}{2}}$ va se comporter pour J suffisamment grand comme $\|a\|/\alpha$. En revanche, le préconditionnement diagonal D_a^{-1} et plus encore le préconditionnement presque diagonal $G_{S_\varepsilon}^T G_{S_\varepsilon}$, prend en compte ces variations en les moyennant à l'échelle

du support des ondelettes ψ_λ . On s'attend donc, pour des coefficients assez réguliers, à un conditionnement indépendant à la fois de l'échelle maximale J et du ratio $\|a\|/\alpha$, bien que cette conjecture soit pour l'heure toujours ouverte.

On considère sur l'intervalle $[0, 1]$ les coefficients réguliers $\nu(x) = 1 + \mu - \sin(\pi x)$ pour lesquels le rapport $\|a\|/\alpha$ est de l'ordre de μ et de dérivée bornée indépendamment de μ . Le générateur sur \mathbb{R} est l'ondelette spline duale d'ordre 5 ($\tilde{\phi}^{1,5}, \tilde{\psi}^{1,5}$). Les tables 2.9, 2.10, 2.11 montrent que la dépendance en $\|a\|/\alpha$ est très faible dans les deux derniers cas contrairement au premier. A nouveau sur l'intervalle, le préconditionnement presque diagonal améliore de façon spectaculaire le conditionnement, comme le montre aussi la figure 2.6.

En dimension 2 sur le carré $]0, 1[^2$ 2.7, on obtient des résultats similaires à ceux présentés sur l'intervalle, bien que moins spectaculaires en ce qui concerne le préconditionnement presque diagonal, comme c'était le cas pour l'opérateur laplacien.

TAB. 2.9 – Nombres de conditionnement de $\mathcal{K}((C_J^D)^{\frac{1}{2}} A_{\Psi_J} (C_J^D)^{\frac{1}{2}})$.

J	$\mu = 1$	$\mu = 10^{-1}$	$\mu = 10^{-2}$	$\mu = 10^{-3}$	$\mu = 10^{-4}$
7	127	69	381	2768	8311
8	136	74	438	3802	21455

TAB. 2.10 – Nombres de conditionnement de $\mathcal{K}((C_J^{D_a})^{\frac{1}{2}} A_{\Psi_J} (C_J^{D_a})^{\frac{1}{2}})$.

J	$\mu = 1$	$\mu = 10^{-1}$	$\mu = 10^{-2}$	$\mu = 10^{-3}$	$\mu = 10^{-4}$
7	5.5	7.5	8.5	14.0	24.0
8	5.7	7.6	8.7	14.4	25.4

TAB. 2.11 – Nombres de conditionnement de $\mathcal{K}(G_{\mathbb{S}_\varepsilon}^T A_{\Psi_J} G_{\mathbb{S}_\varepsilon})$ avec $\varepsilon = .1$ donnant $\#S_\varepsilon \sim 6.2^J$.

J	$\mu = 1$	$\mu = 10^{-1}$	$\mu = 10^{-2}$	$\mu = 10^{-3}$	$\mu = 10^{-4}$
7	1.8	2.0	2.2	2.3	3.7
8	1.9	2.1	2.2	2.3	3.9

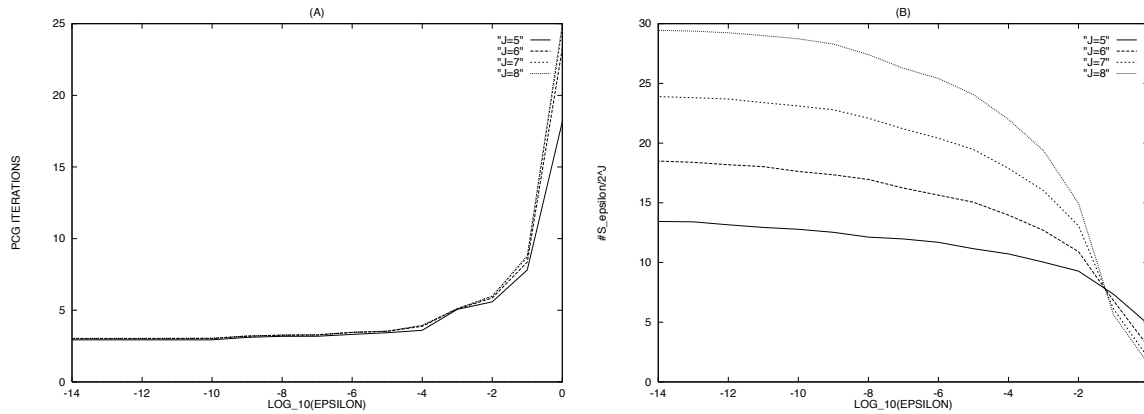


FIG. 2.6 – Opérateur sur l'intervalle pour $\mu = 10^{-3}$. (A) Nombre d'itérations pour un taux de décroissance du résidu de 10^{-6} par l'algorithme PCG. (B) complexité $C(\epsilon)$ du préconditionnement presque diagonal. Le générateur sur \mathbb{R} pour la construction sur l'intervalle est $(\tilde{\phi}^{1,\tilde{n}}, \tilde{\psi}^{1,\tilde{n}})$ pour $\tilde{n} = 5$.

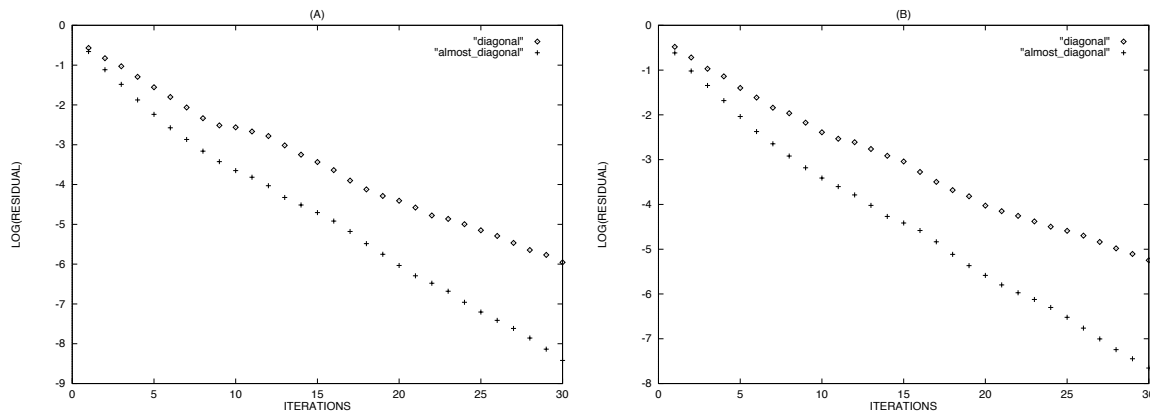


FIG. 2.7 – Résidus de l'algorithme PCG sur $V_J(]0,1[^2)$ pour le générateur sur \mathbb{R} $(\tilde{\phi}^{1,5}, \tilde{\psi}^{1,5})$, la solution exacte $u = \sin 40\pi x \sin 40\pi y$, et les coefficients variables $\nu(x, y) = 1 + 10^{-3} - \sin \pi x$. Le préconditionnement est diagonal ($C_J^{D^a}$) ou presque diagonal avec $\epsilon = .05$ donnant $\#S_\epsilon \sim 13.2^{.J}$ pour $J = 6$ et $\#S_\epsilon \sim 8.2^{.J}$ pour $J = 7$. (A): $J = 6$, (B): $J = 7$.

2.1.5 Exemple 3: opérateur bilaplacien

Il est particulièrement intéressant de tester la robustesse du préconditionnement diagonal en base d'ondelettes pour des problèmes d'ordres plus élevés que 2. On considère dans ce paragraphe l'opérateur biplacien

$$\mathcal{A} = \Delta^2$$

avec conditions aux limites homogènes H_0^2 sur le carré $]0,1[^2$. On peut envisager des domaines plus généraux comme le domaine en L dans le cadre de la décomposition

de domaine avec raccord C^1 (voir §1.4.2).

Pour ce problème, un choix commode de générateur sur \mathbb{R} est la famille des ondelettes interpolantes du §1.2.3 ($\tilde{\phi}^{0,2\tilde{n}}, \tilde{\psi}^{0,2\tilde{n}}$) d'ordre d'approximation $2\tilde{n}$. La décomposition est stable dans H^s pour $d/2 < s < \tilde{\tau}$ où $\tilde{\tau}$ est la borne supérieure de la régularité de $\tilde{\phi}^{0,2\tilde{n}}$ qui est strictement supérieure à 2 dès que $\tilde{n} \geq 2$.

Pour ce générateur, la construction sur l'intervalle est particulièrement aisée (voir [10], [56]). Il suffit de retenir comme AMR duale V_j l'espace engendré par les distributions de Dirac aux points $2^{-j}k$ pour $k = 0, \dots, 2^j$. Une base biorthogonale (interpolante) de l'AMR primale est alors directement obtenue en considérant les polynômes de Lagrange aux points entiers $0, \dots, 2\tilde{n} - 1$ au lieu des monômes, dans la définition des fonctions d'échelle de bord (cf §1.3.2). On vérifie sans peine que les ondelettes sont naturellement les fonctions d'échelle

$$\tilde{\varphi}_{j+1,2k+1} \text{ pour } k = 0, \dots, 2^j - 1,$$

i.e. celles associées aux points de la grille complémentaire Δ_{j+1}/Δ_j . Ces ondelettes satisfont par définition les conditions aux limites $H_0^1(]0, 1[)$. Dans notre cadre, il nous faut imposer les conditions aux limites $H_0^2(]0, 1[)$. Pour se faire, le plus simple est d'opter pour l'AMR duale

$$V_j = \text{S}\{\delta'(x), \delta(x - 2^{-j}k), k = 0, \dots, 2^j, \delta'(x - 1)\}$$

de telle façon que les ondelettes soient à nouveau obtenues en retenant les fonctions d'échelle associées à la grille complémentaire Δ_{j+1}/Δ_j . La base biorthogonale de \tilde{V}_j est cette fois définie par les fonctions d'échelle

$$\tilde{\varphi}_{j,\alpha} := \sum_{k=-2\tilde{n}+2}^{2\tilde{n}-2} H_{2\tilde{n}}^\alpha(k) \tilde{\phi}_{j,k}^{0,2\tilde{n}}, \quad \alpha = 0, \dots, 2\tilde{n} - 1, \quad (2.19)$$

au bord 0 et symétriquement au bord 1 et les fonctions d'échelle intérieures

$$\tilde{\varphi}_{j,k} := \tilde{\phi}_{j,k}^{0,2\tilde{n}}, \quad k = 2\tilde{n} - 1, \dots, 2^j - 2\tilde{n} + 1. \quad (2.20)$$

où $H_{2\tilde{n}}^\alpha$ désigne les polynômes d'interpolation de Lagrange aux points entiers $0, \dots, 2\tilde{n} - 2$ et d'Hermite au point 0.

Les conditions aux limites H_0^2 s'obtiennent par restriction

$$\tilde{V}_j^0 = \tilde{V}_j \cap H_0^2(]0, 1[) = \text{S}\{\tilde{\varphi}_{j,k}, k = 1, \dots, 2^j - 1\}.$$

Le choix de l'AMR duale

$$V_j^0 = \text{S}\{\delta(x - 2^{-j}k), k = 1, \dots, 2^j - 1\}$$

assure une stabilité dans $H^s(]0, 1[)$ pour $1/2 < s < \tilde{\tau}$ et les ondelettes associées sont par construction inchangées i.e. $\tilde{\varphi}_{j+1, 2k+1}$ pour $k = 0, \dots, 2^j - 1$.

La construction sur $]0, 1[^d$ s'obtient par produit tensoriel (cf §1.4.1) et la décomposition isotrope est stable dans $H^s(]0, 1[^d)$ pour $d/2 < s < \tilde{\tau}$.

Il faut noter dans le cadre de la remarque 1.23 que la décomposition anisotrope n'est pas stable dans la mesure où la décomposition sur l'intervalle est instable dans $L^2(]0, 1[)$.

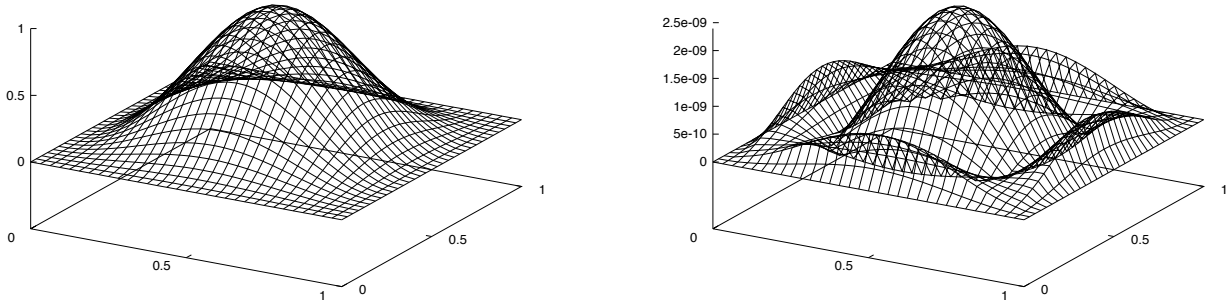
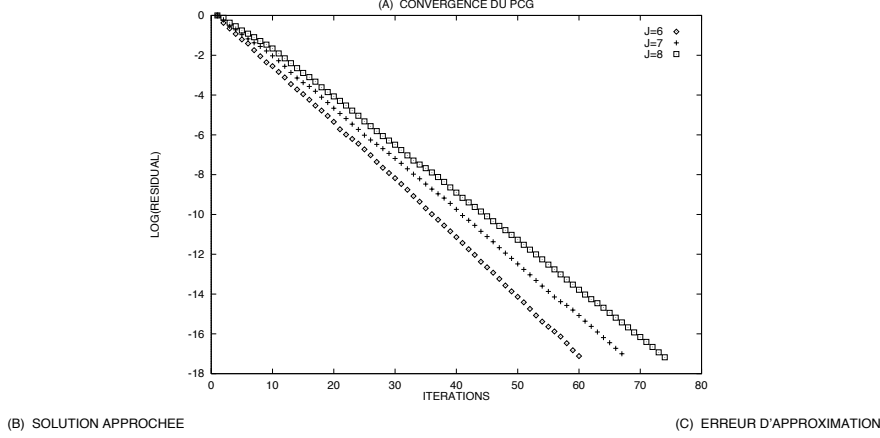


FIG. 2.8 – Pour la solution exacte $u = \sin^2(\pi x) \sin^2(\pi y)$: (A) résidus de l'algorithme PCG avec préconditionnement diagonal ($C_J^{D\alpha}$) sur le carré en discrétisation de Galerkin et les générateurs sur \mathbb{R} d'ordre 6 ($\phi^{0,6}, \tilde{\psi}^{0,6}$). (B) solution approchée et (C) erreur d'approximation pour $J = 6$.

Les résultats obtenus sont comparables à ceux des opérateurs d'ordre 2. Ce n'est guère surprenant dans la mesure où pour ce générateur

$$(\tilde{\psi}^{0,2\tilde{n}})'' = \frac{1}{16} \tilde{\psi}^{2,2\tilde{n}-2}$$

et donc la matrice dérivée 4ième préconditionnée par la diagonale admet sur le tore \mathbb{T}^1 le même conditionnement que la matrice de masse pour le générateur $\tilde{\psi}^{2,2\tilde{n}-2}$ (donc à la limite $J \rightarrow \infty$ aussi pour le générateur $\psi^{2,2\tilde{n}-2}$).

2.1.6 Exemple 4: un opérateur $H^{-1/2}(\Gamma)$ elliptique, l'opérateur de bord $\psi - \omega$

On termine cette série d'exemples par un problème elliptique en norme négative. En dimension 2, on considère le problème de Stokes en formulation $\psi - \omega$

$$\begin{cases} \Delta\psi = \omega \text{ sur } \Omega \\ -\Delta\omega = f \text{ sur } \Omega \\ \psi = g, \partial_n\psi = h \text{ sur } \Gamma = \partial\Omega, \end{cases}$$

pour $g \in H^{3/2}(\Gamma)$, $h \in H^{1/2}(\Gamma)$, $f \in L^2(\Omega)$ et Ω un domaine régulier ou polygonal convexe. Sa formulation variationnelle conduit à un problème mixte qui se discrétise par une méthode de Galerkin (voir [58]). Soient $V_J \subset H^1(\Omega)$, $V_J^0 := V_J \cap H_0^1(\Omega)$, $V_J(\Gamma) := \gamma V_J$ et g_J une projection de la trace g sur $V_J(\Gamma)$. On cherche $\omega_J, \psi_J \in V_J$ solution unique du système

$$\begin{cases} \langle \nabla\psi_J, \nabla\theta_J \rangle + \langle \omega_J, \theta_J \rangle = \langle h, \gamma\theta_J \rangle, \forall \theta_J \in V_J \\ \langle \nabla\omega_J, \nabla\varphi_J \rangle = \langle f, \varphi_J \rangle, \forall \varphi_J \in V_J^0 \\ \gamma\psi_J = g_J. \end{cases}$$

La difficulté de résolution de ce système consiste dans l'absence de donnée de Dirichlet pour la trace de ω_J . Une méthode introduite dans [59] consiste à trouver dans un premier temps cette trace manquante k_J . Soient r_J un relèvement quelconque de $V_J(\Gamma)$ dans V_J et le couple $(\psi_J^0, \omega_J^0) \in V_J \times V_J^0$ solution du système

$$\begin{cases} \langle \nabla\psi_J^0, \nabla\varphi_J \rangle + \langle \omega_J^0, \varphi_J \rangle = 0, \forall \varphi_J \in V_J^0 \\ \langle \nabla\omega_J^0, \nabla\varphi_J \rangle = \langle f, \varphi_J \rangle, \forall \varphi_J \in V_J^0 \\ \gamma\psi_J^0 = g_J. \end{cases}$$

On définit l'opérateur de bord \mathcal{A}_J par l'équation variationnelle (indépendante du choix de r_J)

$$\langle \mathcal{A}_J p_J, q_J \rangle := \langle \nabla\tilde{\psi}_J, \nabla r_J q_J \rangle + \langle \tilde{\omega}_J, r_J q_J \rangle, \forall p_J, q_J \in V_J(\Gamma)$$

où $\tilde{\omega}_J \in V_J$, $\tilde{\psi}_J \in V_J^0$ sont solutions du système

$$\begin{cases} \langle \nabla\tilde{\psi}_J, \nabla\theta_J \rangle + \langle \tilde{\omega}_J, \theta_J \rangle = 0, \forall \theta_J \in V_J^0 \\ \langle \nabla\tilde{\omega}_J, \nabla\varphi_J \rangle = 0, \forall \varphi_J \in V_J^0 \\ \gamma\tilde{\omega}_J = p_J. \end{cases}$$

La trace k_J de ω_J est alors solution du problème de bord

$$\langle \mathcal{A}_J k_J, q_J \rangle = \langle h, q_J \rangle - \langle \nabla\psi_J^0, \nabla r_J q_J \rangle - \langle \omega_J^0, r_J q_J \rangle, \forall q_J \in V_J(\Gamma).$$

Le calcul de $\mathcal{A}_J q_J$ revient donc à inverser 2 laplaciens discrets pour lesquels on peut utiliser, par exemple, un algorithme PCG avec préconditionnement diagonal en base

d'ondelettes. Notre but est maintenant de construire un préconditionnement efficace pour l'inversion du problème de bord par une méthode itérative.

En formulation continue, la trace k de ω est dans $H^{-1/2}(\Gamma)$ et $\mathcal{A}k \in H^{1/2}(\Gamma)$ n'est autre que la trace de la dérivée normale de ψ . L'opérateur de bord \mathcal{A} est alors classiquement elliptique en norme $H^{-1/2}(\Omega)$. Cette propriété est toujours vraie pour l'opérateur discret \mathcal{A}_J dans le cas d'une discrétisation uniforme et pour un domaine régulier ou polygônale convexe (voir Appendice 6). On a précisément

$$\langle \mathcal{A}_J p_J, p_J \rangle = \|\tilde{\omega}_J\|_{L^2(\Omega)}^2 \sim \|p_J\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}^2.$$

Une idée naturelle est donc d'envisager un préconditionnement diagonal en base d'ondelettes de cet opérateur discret.

On considère le domaine carré $\Omega =]0, 1[^2$ et la discrétisation V_J par éléments finis \mathbb{Q}_1 sur les grilles dyadiques uniformes. Les ondelettes sur le bord Γ sont construites partant des générateurs sur \mathbb{R} ($\phi^2, \psi^{2, \tilde{n}}$), \tilde{n} pair, par décomposition de domaine (en 4 segments) avec raccord C^0 selon les techniques décrites au §1.4. Les AMR biorthogonales sur Γ ne sont autres que les traces des AMR biorthogonales tensorielles sur le carré. Ici la biorthogonalité est obtenue directement par rapport au produit scalaire canonique sur Γ et par conséquent (cf §1.4) la décomposition est stable dans $H^{-1/2}$ dès que $\tilde{\phi}^{2, \tilde{n}} \in H^{1/2+\varepsilon}(\mathbb{R})$ soit pour $\tilde{n} \geq 4$ (cf $\tilde{\phi}^{2, 2} \notin H^{1/2}(\mathbb{R})$).

Pour cet opérateur, la diagonale exacte n'est d'une part pas invariante par changement d'échelle et d'autre part chère à évaluer dans la mesure où pour chaque ondelette de bord ψ_λ , le calcul de

$$\langle \mathcal{A}_J \psi_\lambda, \psi_\lambda \rangle = \|\tilde{\omega}_J(\psi_\lambda)\|_{L^2(\Omega)}^2$$

implique l'inversion d'un laplacien discret à l'échelle J . On peut cependant calculer une excellente approximation de la diagonale exacte en exploitant les symétries et la quasi invariance par translation à niveau fixé $|\lambda|$ à l'exception des ondelettes de coins. Soit β le nombre d'ondelettes modifiées au bord 0 sur l'intervalle $[0, 1]$. On distingue alors les deux ondelettes de coins à supports sur deux côtés adjacents du carré, les $\beta - 1$ ondelettes de bord à support sur un seul côté et enfin l'ondelette "intérieure" $\psi_{j,k}$. Le calcul exact pour ces seules ondelettes se réduit à $(\beta + 2)$ inversions du laplacien discret au niveau J pour chaque niveau $|\lambda| = j_0, \dots, J - 1$, soit l'équivalent de $\frac{1}{2}(\beta + 2)(J - j_0)$ itérations du gradient conjugué.

Enfin on constate numériquement que la convergence du PCG est déjà optimale si l'on se contente d'extrapoler (en $2^{-|\lambda|}$) les valeurs obtenues de la diagonale à l'échelle $J = j_0 + 1$. En revanche il importe de distinguer les $(\beta + 2)$ ondelettes pour lesquelles les coefficients diffèrent fortement. Ainsi l'évaluation de la diagonale approchée de l'opérateur revient à résoudre $(\beta + 2)$ laplacien au niveau $j_0 + 1$ fixé.

Noter que le préconditionnement retenu au niveau j_0 est l'inverse de l'opérateur \mathcal{A}_{j_0} en base nodale, qui n'est pas la sous matrice de \mathcal{A}_J restreinte aux fonctions

d'échelle $\Phi_{j_0, \Gamma}$ dont l'évaluation est trop coûteuse, mais en constitue une bonne approximation.

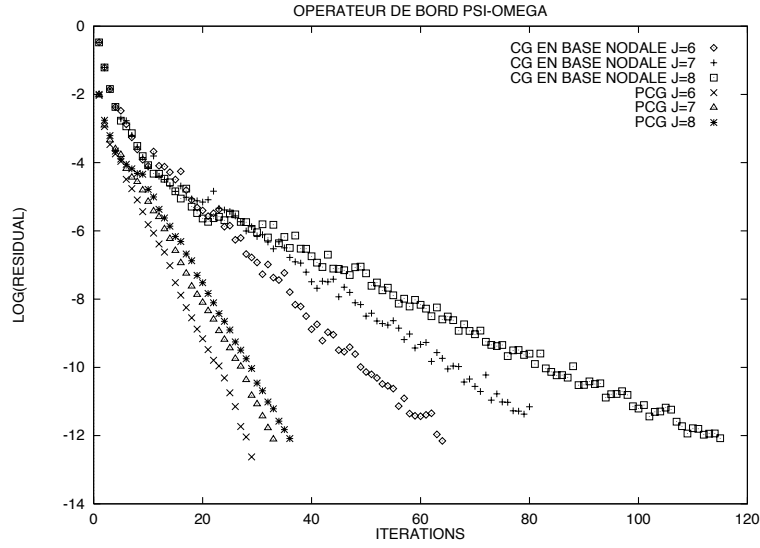
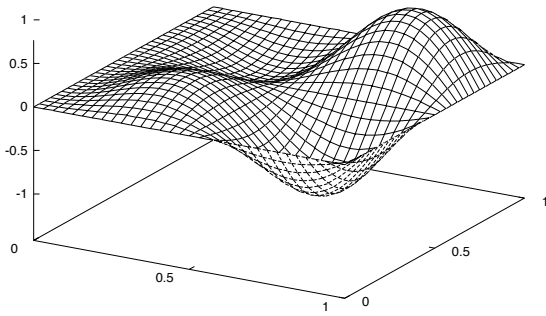
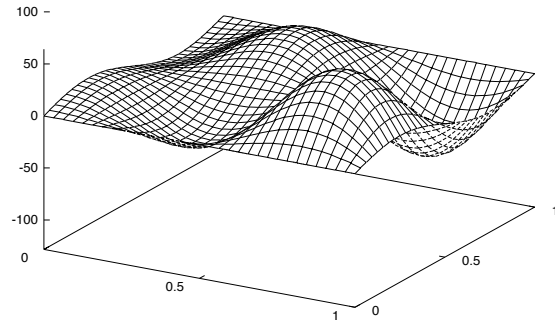


FIG. 2.9 – Pour l'opérateur de bord \mathcal{A}_J et le générateur ϕ^2 : résidus du gradient conjugué sans préconditionnement (CG) en base nodale et résidus du gradient conjugué préconditionné (PCG) avec préconditionnement diagonal en base d'ondelettes pour le générateur $\psi^{2,4}$.

(A) SOLUTION APPROCHEE PSI



(B) SOLUTION APPROCHEE OMEGA



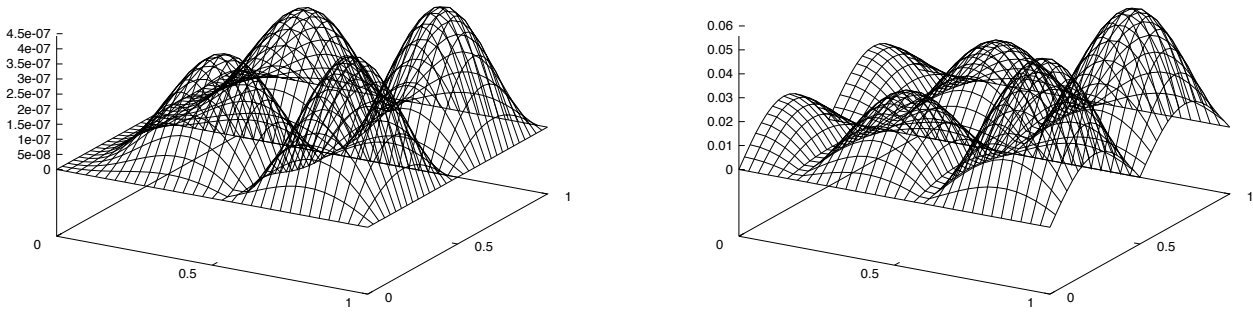


FIG. 2.10 – Pour $J = 6$ et la solution exacte $\psi = x \sin(2\pi x) \sin(2\pi y)$, $\omega = \Delta\psi$: (A) et (B) solutions approchées ψ_J et ω_J , (C) et (D) erreurs d'approximation $\psi - \psi_J$ et $\omega - \omega_J$

2.2 Approximations adaptatives

Le taux d'approximation d'une fonction dans les espaces emboîtés V_j , d'ordre d'approximation n , est relié à ses propriétés de régularité dans l'échelle des espaces de Sobolev H^s . Si N_j désigne la dimension de l'espace V_j , une fonction u de H^s , $t \leq s \leq n$ s'approxime dans V_j selon l'estimation

$$\inf_{u_j \in V_j} \|u - u_j\|_{H^t} \lesssim (N_j)^{-(s-t)/d} \|u\|_{H^s} \quad (2.21)$$

et la réciproque est “presque” vraie.

En outre, pour la large classe de problèmes elliptiques décrite en introduction, l'approximation de Galerkin de la solution u du paragraphe précédent, fournit une solution optimale au sens suivant.

- (i) On obtient asymptotiquement (i.e. à une constante près indépendante de j), pour un problème d'ordre $2t$, la meilleure approximation en norme H^t .
- (ii) La solution approchée se calcule à la précision optimale (2.21) en $\mathcal{O}(N_j)$ opérations et stockage (avec éventuellement un coefficient logarithmique).

La régularité de la solution dans les espaces H^s détermine donc la performance en terme de rapport précision/complexité que l'on peut attendre d'une telle approximation de Galerkin dans les espaces d'approximation linéaire V_j .

Lorsque la solution présente des singularités, la régularité dans l'échelle des espaces de Sobolev H^s est très faible et la performance d'une telle méthode d'approximation est donc pénalisée par rapport au taux optimal d'approximation n des

espaces V_j . L’alternative consiste alors à considérer des espaces d’approximations non plus uniformes (i.e. comportant une seule gamme d’échelle sur l’ensemble du domaine), mais “adaptés” aux singularités de la solution (i.e. la gamme d’échelle varie localement). Ceci conduit classiquement aux raffinements de maillage en éléments finis. Dans notre cadre il s’agit de trouver un sous ensemble de N ondelettes Ψ_{Λ_N} choisies dans une base Ψ fixée, engendrant l’espace V_{Λ_N} où la solution u puisse être approximée à une précision optimale. En considérant l’ensemble

$$E_N := \{u_N \in S(\Psi_\Lambda), \#\Lambda = N\},$$

des combinaisons linéaires de N ondelettes, on recherche la meilleure approximation de u par un élément de E_N dans une norme donnée, par exemple la norme d’énergie H^t

$$\inf_{u_N \in E_N} \|u - u_N\|_{H^t}. \quad (2.22)$$

Deux questions se posent alors naturellement.

- (i) Peut-on relier la décroissance asymptotique avec N de (2.22) aux propriétés intrinsèques de régularité de u ?
- (ii) Existe-t-il un algorithme performant (idéalement en $\mathcal{O}(N)$) de calcul de l’approximation u_N et donc en particulier du ou des ensembles optimaux Λ_N ?

On va rappeler dans un premier temps au §2.2.1 la théorie de l’approximation non linéaire, introduite dans [52] (voir aussi [26] pour une présentation détaillée), qui apporte des réponses positives à ces deux questions dans le cas où la fonction u est une donnée, donc sous l’angle de la compression d’information. On verra que la régularité de la solution u mesurée dans l’échelle des espaces de Besov $B_{p,p}^{s+t}$ avec $\frac{1}{p} = \frac{s}{d} + \frac{1}{2}$ entraîne la décroissance de (2.22) en $\mathcal{O}(N^{-s/d})$ et la réciproque est presque vraie. D’autre part, cette approximation est asymptotiquement atteinte par un simple algorithme de seuillage en retenant les N plus grands coefficients d’ondelettes $|u_\lambda| |\psi_\lambda|_{H^t}$ de u pondérés en norme H^t .

Dans le cas où la fonction u est une solution d’un problème elliptique, on ignore a fortiori ses coefficients d’ondelettes et il s’agit de concevoir un algorithme permettant de déterminer, idéalement en $\mathcal{O}(\#\Lambda_n)$ opérations, une suite asymptotiquement optimale ($\Lambda_n \subset \nabla, \tilde{u}_{\Lambda_n} \in V_\Lambda$) (cf (2.6)) au sens où cette suite réalise, pour une certaine plage de s , le taux d’approximation $\mathcal{O}(N^{-s/d})$ dès lors que la meilleure approximation non linéaire de la solution u vérifie cette propriété.

Un tel algorithme a récemment été conçu rigoureusement dans [28]. On se contentera d’en dresser les grandes lignes en invitant le lecteur à se reporter cette référence pour une étude détaillée.

L’apport original de ce paragraphe se limite à tester numériquement un algorithme bien plus simple que celui proposé dans [28] mais proche dans l’esprit. On étudie alors son optimalité asymptotique, dans l’exemple de l’opérateur laplacien sur le carré $]0, 1[^2$.

2.2.1 Approximations non linéaires

Pour un réel t fixé et un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, on va considérer l'échelle "non linéaire" des espaces de Besov sur Ω

$$B_{q,q}^{s+t}, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{s}{d}$$

qui le cas échéant peuvent inclure des conditions aux limites qui ne jouent aucun rôle déterminant dans l'analyse qui suit. Soit Ψ une base d'ondelettes que l'on supposera toujours caractériser les normes Besov considérées par les normes discrètes des coefficients d'ondelettes. Ainsi, pour $u = \sum_{\lambda \in \nabla} u_\lambda \psi_\lambda$, en se référant au §1.1.7, on a les équivalences de norme

$$\begin{cases} \|u\|_{H^t} \sim \| (2^{|\lambda|t} u_\lambda)_{\lambda \in \nabla} \|_{l^2}, \\ \|u\|_{B_{q,q}^{s+t}} \sim \| (2^{|\lambda|t} u_\lambda)_{\lambda \in \nabla} \|_{l^q}, \end{cases}$$

où on voit en particulier que les espaces de Besov $B_{q,q}^{s+t}$ s'injectent dans H^t de part l'injection naturelle $l^2 \subset l^q$ pour tout $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{s}{d}$.

En réordonnant par ordre décroissant les coefficients pondérés $2^{|\lambda|t}|u_\lambda|$ notés $2^{|\lambda_n|t}|u_n|$, $n \in \mathbb{N}$, on voit que asymptotiquement (i.e. moyennant une constante indépendante de N) l'infimum $\inf_{u_N \in E_N} \|u - u_N\|_{H^t}$ est atteint par la série tronquée

$$u_N = \sum_{n \geq N} u_n \psi_{\lambda_n}$$

avec l'estimation de type Jackson sur l'ensemble E_N

$$\begin{aligned} \inf_{u_N \in E_N} \|u - u_N\|_{H^t} &\sim \left(\sum_{n \geq N} |2^{|\lambda_n|t} u_n|^2 \right)^{1/2} \\ &\lesssim N^{1/2-1/q} \|u\|_{B_{q,q}^{s+t}} \\ &\lesssim N^{-s/d} \|u\|_{B_{q,q}^{s+t}}. \end{aligned}$$

D'autre part on peut aussi obtenir sur E_N une estimation de type Bernstein en utilisant l'inégalité de Holder entre l^q , l^2 et $l^{d/s}$. Pour toute combinaison linéaire de N ondelettes $v \in E_N$, on a

$$\begin{aligned} \|v\|_{B_{q,q}^{s+t}} &\sim \| (2^{|\lambda|t} v_\lambda)_{\lambda \in \nabla} \|_{l^q} \\ &\lesssim N^{s/d} \| (2^{|\lambda|t} v_\lambda)_{\lambda \in \nabla} \|_{l^2} \\ &\lesssim N^{s/d} \|v\|_{H^t}. \end{aligned}$$

Le mécanisme décrit au §1.1.7 dans le cas des espaces vectoriels emboîtés $V_j \subset V_{j+1}$ se généralise (voir par exemple le théorème 38.1 de [26]) dans le cas d'espaces non linéaires $\Sigma_j \subset \Sigma_{j+1}$ vérifiant la propriété

$$\Sigma_j + \Sigma_j \subset \Sigma_{j+a}$$

pour une constante a fixée. On va donc pouvoir appliquer les théorèmes généraux du §1.1.7 aux espaces $\Sigma_j = E_{M_j}$ avec par exemple la suite géométrique croissante

$M_j = 2^j$ puisque dans ce cas $\Sigma_j + \Sigma_j \subset \Sigma_{j+1}$. Pour conclure il nous faut connaître les résultats d'interpolation des espaces $H^t \subset B_{q,q}^{s+t}$ qui découlent des équivalences de normes et des résultats classiques sur l'interpolation des espaces L^p :

$$[H^t, B_{q,q}^{s+t}]_{r/s,p} = B_{p,p}^{r+t} \text{ où } \frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{r}{d}.$$

On peut alors énoncer le théorème suivant (voir par exemple [26] pour une démonstration complète).

Théorème 2.1 *On suppose que la base d'ondelettes Ψ caractérise les espaces de Besov $B_{q,q}^{s+t}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{s}{d}$ sur l'intervalle $0 \leq s < S$. Alors pour tout $0 < s < S$, on a les équivalences de norme*

$$\begin{aligned} \|u\|_{B_{q,q}^{s+t}} &\sim \|(2^{js} \inf_{v_j \in E_{2^j}} \|u - v_j\|_{H^t})_{j \geq 0}\|_{l^q} \\ &\sim \left(\sum_{N \geq 1} N^{-1} (N^{s/d} \inf_{v_N \in E_N} \|u - v_N\|_{H^t})^q \right)^{1/q}. \end{aligned}$$

Ce théorème se généralise facilement dans le cas où l'on cherche à approximer la fonction dans une norme Besov $B_{p,p}^t$. En outre, de façon plus surprenante, le résultat est encore vrai pour l'approximation en norme L^p , $1 < p < \infty$, bien que ces espaces n'admettent pas une caractérisation simple en base d'ondelettes, contrairement aux espaces de Besov (voir [26]). D'autre part, afin d'atteindre asymptotiquement l'infimum $\inf_{u_N \in E_N} \|u - u_N\|_X$ il suffira de retenir la série tronquée des N plus grands coefficients d'ondelettes $|u_\lambda| \|\psi_\lambda\|_X$ normalisée en norme $X = H^t, B_{p,p}^s, L^p$.

On voit que contrairement à l'approximation linéaire, la régularité de la fonction u doit être mesurée dans l'échelle "non linéaire" de régularité $B_{q,q}^{s+t}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{s}{d}$, et non plus dans l'échelle "linéaire" H^{s+t} . D'autre part dans le cas où la fonction u est une donnée (précisément si tous ses coefficients d'ondelettes sont connus par ordre croissant de $|u_\lambda| \|\psi_\lambda\|_X$) il suffit de retenir les N plus grands coefficients d'ondelettes pondérés en norme H^t pour obtenir asymptotiquement une approximation non linéaire optimale.

L'intérêt de ce résultat théorique est que de nombreux signaux et solutions de problèmes numériques admettent une régularité $s + t$ bien plus élevée dans l'échelle des espaces de Besov $B_{q,q}^{s+t}$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{s}{d}$ que dans les espaces de Sobolev H^{s+t} . Cette échelle tolère par exemple les discontinuités de première espèce le long d'une variété de codimension 1: la fonction $\chi_{[0,1]}$ appartient à tous les espaces de Besov $B_{q,q}^s$, $\frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{s}{d}$ alors que dans l'échelle des espaces H^s sa régularité est limitée par $1/2$. Intuitivement, il suffit de raffiner localement au niveau des discontinuités pour bien approximer cette fonction alors que le nombre d'ondelettes rajoutées reste très faible.

De même, de nombreuses singularités développées par les solutions d'EDP admettent une régularité bien supérieure dans cette échelle. En particulier les singularités de domaine polygonaux de l'opérateur laplacien sont dans tous les espaces de

Besov $B_{q,q}^{s+1}$ (voir [27]).

L’algorithme de “troncature” des coefficients d’ondelettes conduit dans le cas d’analyse de données à de nombreuses méthodes performantes de compression de signaux et d’images mais il est bien sûr caduque pour la résolution d’équations où la fonction u est l’inconnue du problème et non la donnée. Cette problématique est l’objet du paragraphe suivant.

2.2.2 Stratégies adaptatives

On considère une forme bilinéaire symétrique a coercive dans une norme de Sobolev $V = H^t$ (incluant le cas échéant des conditions aux limites homogènes) et s’inscrivant dans le cadre décrit dans l’introduction du présent chapitre. Le problème variationnel

$$u \in V \text{ telle que } a(u, v) = \langle f, v \rangle \forall v \in V.$$

définit un isomorphisme $\mathcal{A} : V \rightarrow V'$. Etant donnée une base d’ondelettes

$$\Psi = \{\psi_\lambda, \lambda \in \nabla\}$$

on associe à chaque sous ensemble $\Lambda \subset \nabla$ la projection de Galerkin u_Λ de u sur l’espace

$$V_\Lambda := S(\Psi_\Lambda), \quad \Psi_\Lambda := \{\psi_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$$

i.e. la solution du problème variationnel

$$u_\Lambda \in V_\Lambda \text{ telle que } a(u_\Lambda, v) = \langle f, v \rangle \forall v \in V_\Lambda,$$

ou plutôt une approximation \tilde{u}_Λ de celle-ci obtenue par un certain nombre d’itérations de l’algorithme PCG préconditionné par la diagonale en base d’ondelettes.

L’idée de base des algorithmes d’approximation adaptative de la solution u consiste, partant des seules données (le second membre f et l’opérateur \mathcal{A}), à générer de façon itérative une suite de sous ensembles

$$\Lambda_0, \Lambda_1, \dots, \Lambda_n \dots$$

et les projections de Galerkin approchées associées \tilde{u}_{Λ_n} . Cette suite est dite *asymptotiquement optimale* si elle vérifie l’estimation

$$\|u - \tilde{u}_{\Lambda_n}\|_{H^t} \lesssim (\#\Lambda_n)^{-s/d}$$

dès lors que la meilleure approximation dans E_N de la solution u la vérifie, ce qui est en particulier le cas si $u \in B_{p,p}^{s+t}$ pour $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{s}{d}$.

De plus, l’algorithme sera de *complexité asymptotiquement optimale* si le calcul de \tilde{u}_{Λ_n} s’effectue en $\mathcal{O}(\#\Lambda_n)$ opérations et avec un stockage $\mathcal{O}(\#\Lambda_n)$.

Avant de présenter quelques expériences numériques sur un algorithme adaptatif simple, on résume les grandes lignes de l'algorithme récemment introduit dans [28] et dont l'optimalité asymptotique est rigoureusement démontrée.

(1) Cet algorithme repose, en premier lieu, sur un contrôle de l'erreur $\varepsilon_n : = \|u - \tilde{u}_{\Lambda_n}\|$ établi à l'aide d'estimations a posteriori introduites dans [7], [37]. Celles-ci expriment, par l'isomorphisme \mathcal{A} , la norme d'énergie de l'erreur en fonction du résidu:

$$\|u - \tilde{u}_{\Lambda_n}\|_{H^t} \sim \|f - \mathcal{A}\tilde{u}_{\Lambda_n}\|_{(H^t)'}.$$

Dans le cadre de discrétisations en base d'ondelettes, l'équivalence de norme dans la base duale $\tilde{\Psi}$

$$\|f - \mathcal{A}\tilde{u}_{\Lambda_n}\|_{(H^t)'} \sim \|(2^{-|\lambda|t} |\langle f - \mathcal{A}\tilde{u}_{\Lambda_n}, \psi_\lambda \rangle|)_{\lambda \in \nabla}\|_{l^2}$$

permet de calculer explicitement l'erreur en fonction des données \tilde{u}_{Λ_n} , f et \mathcal{A} . Cette somme étant de complexité infinie il faut en outre compresser, à une précision fonction de ε_n , la donnée f et le produit "matrice-vecteur" $\mathcal{A}\tilde{u}_{\Lambda_n}$ en tenant compte pour ce dernier à la fois de la compressibilité de la matrice et du vecteur.

(2) Soit $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ la norme d'énergie $a(\cdot, \cdot)^{1/2}$ équivalente à la norme H^t . L'étape suivante, dont l'idée a été introduite dans [37], consiste à déterminer, à l'aide des estimations a posteriori précédentes, un ensemble $\tilde{\Lambda}_{n+1}$ tel que l'hypothèse de saturation

$$\|u_{\tilde{\Lambda}_{n+1}} - u_{\Lambda_n}\|_{\mathcal{A}} \geq \beta \|u - u_{\Lambda_n}\|_{\mathcal{A}}$$

soit satisfaite pour un paramètre $\beta \in]0, 1[$ fixé, .

Grâce à la symétrie de la forme bilinéaire a , l'orthogonalité de la projection de Galerkin en norme d'énergie $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ garantit alors le taux $\alpha : = \sqrt{1 - \beta^2}$ (indépendant de n) de réduction de l'erreur:

$$\|u - u_{\tilde{\Lambda}_{n+1}}\|_{\mathcal{A}} \leq \alpha \|u - u_{\Lambda_n}\|_{\mathcal{A}}.$$

(3) De façon à obtenir une suite asymptotiquement optimale telle que

$$\begin{cases} \|u - \tilde{u}_{\Lambda_n}\|_{H^t} \lesssim \varepsilon_n \\ \#\Lambda_n \lesssim \varepsilon_n^{-d/s} \end{cases}$$

il faut contrôler la croissance des ensembles $\#\Lambda_n$. Pour cela il s'avère nécessaire d'effectuer, suite à l'étape (2), un seuillage des petits coefficients d'ondelettes de $\tilde{u}_{\tilde{\Lambda}_{n+1}}$: $(\tilde{\Lambda}_{n+1}, \tilde{u}_{\tilde{\Lambda}_{n+1}}) \rightarrow (\Lambda_{n+1}, \tilde{u}_{\Lambda_{n+1}})$ qui doit en outre préserver la précision asymptotique.

Afin d'obtenir une complexité asymptotiquement optimale, la mise en oeuvre de cet algorithme nécessite, outre la compression du second membre f et du produit matrice-vecteur $\mathcal{A}u_{\Lambda_n}$ dans le calcul des estimations a posteriori, le calcul efficace de la projection de Galerkin approchée \tilde{u}_{Λ_n} préservant la précision asymptotique.

Pour cela, on utilise l’algorithme du gradient conjugué préconditionné par l’inverse de la diagonale en base d’ondelettes qui converge à un taux indépendant de Λ_n . Cet algorithme est initialisé par la projection biorthogonale $Q_{\Lambda_n} \tilde{u}_{\Lambda_{n-1}}$ sur V_{Λ_n} de la solution $\tilde{u}_{\Lambda_{n-1}}$ à l’étape $n - 1$. Ce faisant, il est clair qu’un nombre fixé, indépendant de n , d’itérations du PCG va suffire pour atteindre la précision souhaitée. La complexité du calcul de la solution \tilde{u}_{Λ_n} équivaut donc au coût d’une itération du PCG et donc du produit matrice-vecteur. Dans le cadre d’une discrétisation uniforme on a vu que cette propriété est vérifiée, moyennant pour les opérateurs intégraux une compression de la matrice en base d’ondelettes. Ici, la situation est plus complexe car l’ensemble d’ondelettes Λ_n étant quelconque a priori, la matrice de Galerkin

$$A_{\Lambda_n} := a(\Psi_{\Lambda_n}, \Psi_{\Lambda_n})$$

peut éventuellement être pleine, même dans le cas d’un opérateur différentiel. Afin de recouvrer une complexité $\mathcal{O}(\#\Lambda_n)$ du produit matrice-vecteur $A_{\Lambda_n} U_{\Lambda_n}$ à la précision optimale, il faut à nouveau comprimer à la fois la matrice et le vecteur en utilisant les mêmes techniques que dans le calcul des estimations a posteriori (appliquées ici aux sous matrices A_{Λ_n}).

On propose ici une stratégie adaptative beaucoup plus simple qui s’avère cependant contenir les caractéristiques essentielles de l’algorithme précédent.

- Raffinement des ensembles d’ondelettes successifs Λ_n .
- Calcul de la projection de Galerkin approchée par le schéma itératif PCG.
- Seuillage des coefficients d’ondelettes de la solution approchée de Galerkin.

En suivant l’approche de [78] introduite pour les problèmes paraboliques (voir aussi [10]), le raffinement et le seuillage s’effectuent directement à la lecture des coefficients d’ondelettes de la solution courante à l’étape n ($\Lambda_n, \tilde{u}_{\Lambda_n}$), sans passer par l’analyse du résidu. Ces coefficients fournissent une prédiction de la localisation en espace et en échelle des singularités de u qui va nous permettre de définir un ensemble Λ_{n+1} a priori adapté.

Pour se faire on définit deux paramètres de troncature ε_M^n et ε_m^n , $1 > \varepsilon_M^n > \varepsilon_m^n \geq 0$ que l’on va faire décroître géométriquement avec n . Soit par ailleurs c_M le maximum de $2^{|\lambda|t} |\tilde{u}_\lambda|$ pour $\lambda \in \Lambda_n$. Alors, si le coefficient d’ondelette normalisé $2^{|\lambda|t} |\tilde{u}_\lambda|$ est inférieur au seuil $c_M \varepsilon_m^n$, cette ondelette est ôtée de l’ensemble Λ_{n+1} . En revanche si le coefficient est supérieur au seuil $c_M \varepsilon_M^n$, on va ajouter un sous ensemble d’ondelettes voisines à l’ondelette ψ_λ d’indices dans le voisinage Λ_λ de λ . En pratique, ce voisinage comporte quelques ondelettes voisines de même échelle $j = |\lambda|$ et d’échelle immédiatement supérieure $j + 1$.

L’inconvénient majeur de cette stratégie réside dans l’absence de relation claire entre la valeur des paramètres de troncature ε_M^n et ε_m^n et l’erreur commise in fine. La

connaissance de celle-ci passe en effet par l'analyse du résidu qui n'est pas exploitée ici.

Néanmoins, cet algorithme très simple fournit dans les exemples ci-dessous une approximation non linéaire asymptotiquement optimale de la solution. Précisément, cette stratégie permet de raffiner de façon asymptotiquement optimale une singularité si celle-ci a été préalablement détectée à un niveau grossier et si elle ne présente pas de "trous" dans sa gamme d'échelles. Il est donc impératif d'amorcer l'algorithme par un choix ad-hoc du premier ensemble grossier d'ondelettes Λ_0 . On l'obtient par compression du second membre f et par une prédiction des singularités de la solution non issues du second membre mais liées par exemple aux singularités du domaine. La force de l'algorithme [28] est au contraire de pouvoir détecter ce dernier type de singularités sans aucunes informations a priori.

Exemples numériques. Pour simplifier la mise en oeuvre, on va considérer une base d'ondelettes anisotrope sur le domaine bidimensionnel $]0, 1[^2$

$$\Psi = \{\psi_\lambda = \psi_{\lambda_x} \otimes \psi_{\lambda_y}, \lambda \in \nabla\}, \quad \nabla := \bigcup_{j_x, j_y = j_0 - 1}^{\infty} (\{j_x\} \times \nabla_{j_x}) \times (\{j_y\} \times \nabla_{j_y}),$$

où par convention $\psi_{j_0 - 1, k} := \varphi_{j_0, k}$.

Pour le raffinement des ensembles d'ondelettes Λ_n on a retenu les 12 ondelettes voisines de l'ondelette $\psi_{\lambda_x} \otimes \psi_{\lambda_y}$ suivantes (avec les modifications ad-hoc près de la frontière)

$$\begin{aligned} \Lambda_{(\lambda_x, \lambda_y)} = & \left\{ (j_x + 1, 2k_x + a, \lambda_y), (\lambda_x, j_y + 1, 2k_y + b), a, b = 0, 1 \right. \\ & (j_x + 1, 2k_x + a, j_y + 1, 2k_y + b), a, b = 0, 1 \\ & \left. (j_x, k_x + a, j_y, k_y + b), a, b = +1, -1 \right\} \end{aligned}$$

L'ensemble initial Λ_0 est choisi selon les plus grands coefficients d'ondelettes du second membre dans la base duale $\tilde{\Psi}$ normalisés en norme $(H^t)'$ (les solutions seront régulières aux coins du domaine dans nos expériences numériques).

L'opérateur est le laplacien avec conditions aux limites homogènes et l'ondelette mère sur la droite réelle est la spline duale $\tilde{\phi}^{1,5}$. Le nombre d'itérations de l'algorithme PCG à chaque n est fixé à 5. Pour simplifier la mise en oeuvre, on fixe en outre ici artificiellement une échelle maximale $J = 8$ au delà de laquelle on ne procède à aucun raffinement de l'ensemble Λ_n . Les paramètres de troncature ε_m^n et ε_M^n sont divisés par deux à chaque n et le rapport $\varepsilon_M^n / \varepsilon_m^n$ est fixé égal à 10.

Afin de représenter les ensembles d'ondelettes (Fig. 2.12 et 2.14), on convient d'associer à chaque ondelette $\psi_\lambda = \psi_{j_x, k_x} \otimes \psi_{j_y, k_y}$ un point (m_x, m_y) du carré $[0, 2^J - 1] \times [0, 2^J - 1]$ où $m_x = 2^{j_x} + k_x$ (k_x si $j_x = j_0 - 1$) et $m_y = 2^{j_y} + k_y$ (k_y si $j_y = j_0 - 1$).

Les Fig. 2.11 et 2.12 représentent les résultats obtenus pour la solution exacte

$$u(x, y) = e^{-5000(x-y)^2} \sin(\pi x) \sin(\pi y).$$

comportant un fort gradient le long de la diagonale. On vérifie Fig. 2.11 que l'algorithme génère une approximation optimale au sens où la courbe de décroissance de l'erreur de l'algorithme adaptatif est parallèle à celle obtenue en retenant les N premiers coefficients d'ondelettes normalisés de la solution tronquée à l'échelle J . En outre, l'écart entre ces courbes est faible ce qui signifie que les constantes d'approximation sont proches.

Quelques commentaires s'imposent sur l'influence des paramètres intervenant dans l'algorithme.

Choix initial des paramètres ε_M et ε_m : il ne change pas le résultat asymptotique dans la mesure où l'on prend soin de préserver l'information sur les singularités contenue dans Λ_0 (i.e. il faut imposer par exemple $\Lambda_0 \subset \Lambda_n \forall n \geq 1$). Dans le cas contraire, pour des valeurs de ε_m trop grandes, on risque de perdre définitivement la trace des singularités les plus faibles en les déraffinant totalement.

Taux de décroissance des paramètres ε_M et ε_m : soit $\rho > 1$ tel que $\varepsilon_M^n = \rho^{-n} \varepsilon_M^0$ et $\varepsilon_m^n = \rho^{-n} \varepsilon_m^0$. Il existe un seuil ρ_l au delà duquel l'algorithme adaptatif n'est plus asymptotiquement optimal. Ce comportement est du au fait que, pour $\rho > \rho_l$, les paramètres ε_M^n et ε_m^n décroissent plus vite que les coefficients d'ondelettes des singularités lorsque l'on passe de l'échelle j à l'échelle $j + 1$ (qui définit ici le taux maximum de décroissance compte tenu qu'à chaque itération adaptative on a choisi de rajouter qu'un seul niveau d'échelle). Le taux limite ρ_l dépendra donc des singularités de la solution.

En revanche plus ρ se rapproche de 1, plus on constate que la courbe suit de près celle obtenue par l'approximation non linéaire. Bien sûr, il faut alors augmenter le nombre d'itérations adaptatives pour atteindre une précision donnée et un compromis est donc à trouver en terme de coût.

Rapport $\varepsilon_M/\varepsilon_m$: il détermine l'importance du déraffinement. Notons que dans nos expériences le comportement asymptotique optimal est obtenu même en l'absence de déraffinement (i.e. pour $\varepsilon_m = 0$) et celui-ci permet seulement d'améliorer la constante.

Les Fig. 2.13 et 2.14 étudient le cas où la singularité est situé le long d'un des axes:

$$u(x, y) = e^{-5000(x-.5)^2} \sin(\pi x) \sin(\pi y).$$

Dans ce cas on vérifie que l'algorithme sélectionne bien les ondelettes d'échelles fines dans la direction orthogonale à la singularité seulement. C'est un résultat important en pratique dans la mesure où de nombreuses classes de singularités sont générées le long de la frontière du domaine. Dans le cadre de la décomposition de domaine

du §1.4, la frontière est l'image, par les difféomorphismes κ_i , de faces du domaine de référence, et une base anisotrope telle que celle définie au §1.4.3) sur le domaine en L pourra donc comprimer efficacement de telles singularités.

On a en outre tracé Fig. 2.13 (B) la courbe d'approximation obtenue par la projection de Galerkin sur V_Λ en définissant Λ par les $\#\Lambda$ plus grands coefficients d'ondelettes normalisés en norme H^{-1} du second membre f (dans la base duale $\tilde{\Psi}$). On voit que, contrairement à l'algorithme adaptatif, cette stratégie élémentaire ne conduit pas à une approximation asymptotiquement optimale car elle ne prend pas en compte l'action de l'opérateur \mathcal{A} dans le choix des ensembles Λ .

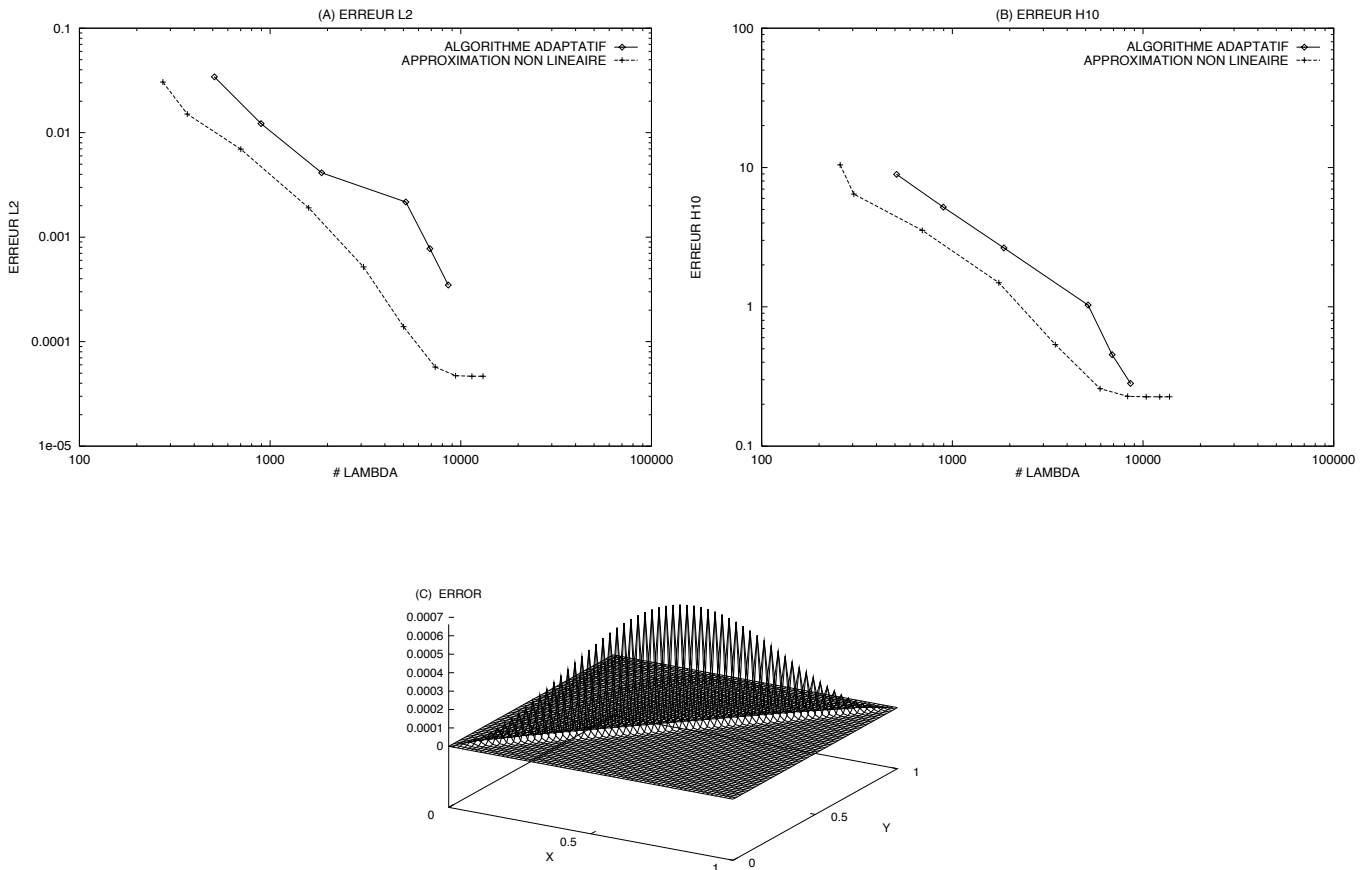


FIG. 2.11 – Pour la solution exacte $u = e^{-5000(x-y)^2} \sin(\pi x) \sin(\pi y)$: (A) et (B) erreurs obtenues en conservant les $N = \#\Lambda$ plus grands coefficients d'ondelettes de $P_8 \otimes P_8 u$ normalisés en norme L^2 (resp. H_0^1) et erreurs L^2 et H_0^1 successives de l'algorithme adaptatif. (C) erreur de projection biorthogonale sur $V_8 \otimes V_8$.

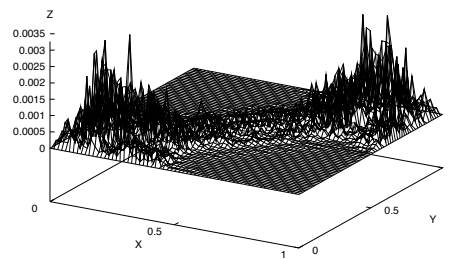
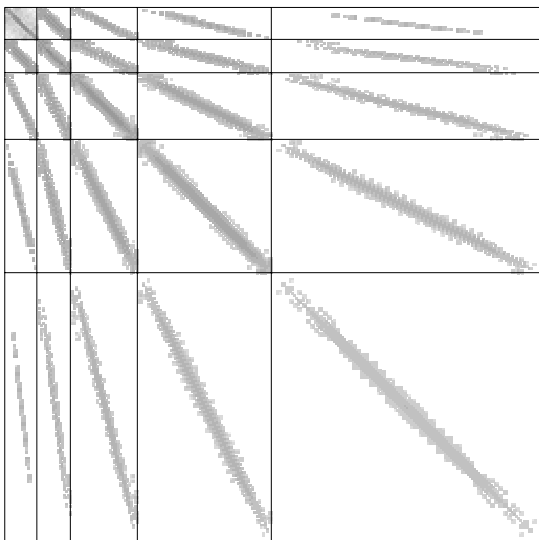
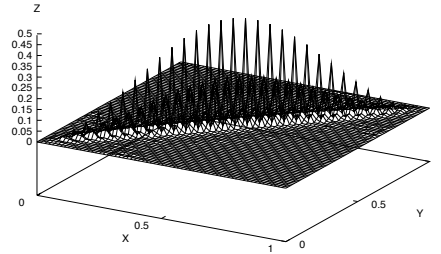
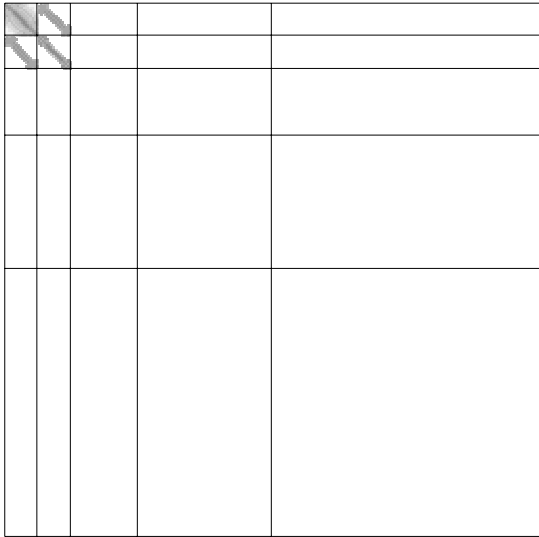


FIG. 2.12 – Premier et dernier ensembles d'ondelettes Λ_0 et Λ_5 construits par l'algorithme adaptatif et erreurs associées, pour la solution exacte $e^{-5000(x-y)^2} \sin(\pi x) \sin(\pi y)$.

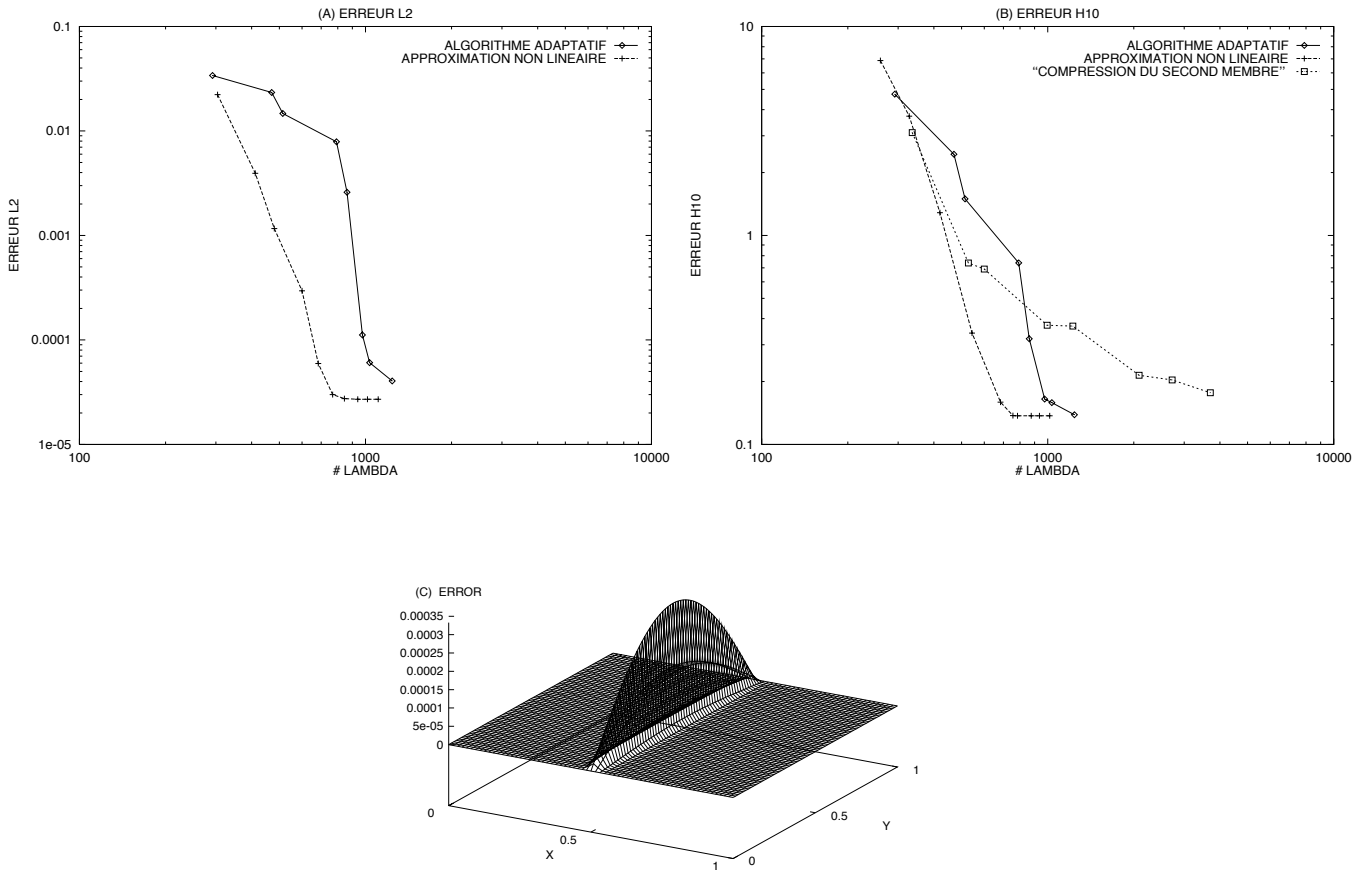


FIG. 2.13 – Pour la solution exacte $u = e^{-5000(x-\frac{1}{2})^2} \sin(\pi x) \sin(\pi y)$: (A) erreurs obtenues en conservant les $\#\Lambda$ plus grands coefficients d'ondelettes de $P_8 \otimes P_8$ normalisés en norme L^2 et erreurs L^2 successives de l'algorithme adaptatif. (B) même chose en norme H_0^1 avec en outre la courbe d'erreur des projections de Galerkin sur les ensembles d'ondelettes Λ obtenues en retenant les $\#\Lambda$ plus grands coefficients d'ondelettes du second membre f normalisés en norme H^{-1} . (C) erreur de projection biorthogonale sur $V_8 \otimes V_8$.

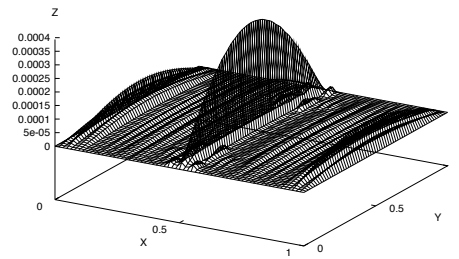
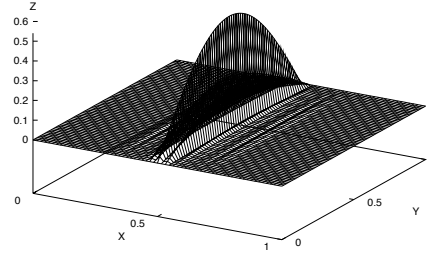
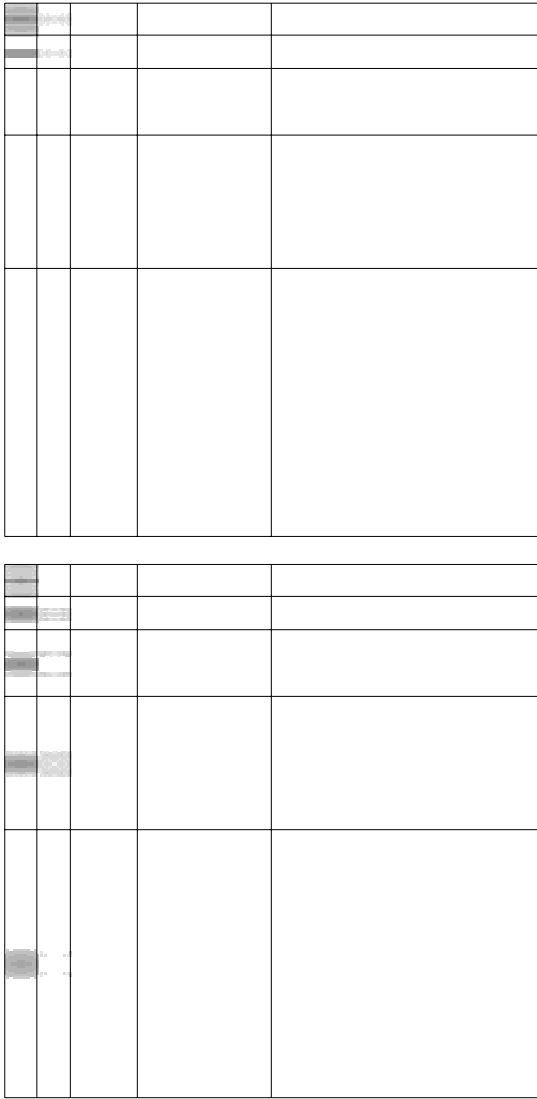


FIG. 2.14 – Premier et dernier ensembles d'ondelettes Λ_0 et Λ_7 construits par l'algorithme adaptatif et erreurs associées, pour la solution exacte $u = e^{-5000(x-\frac{1}{2})^2} \sin(\pi x) \sin(\pi y)$.

2.3 Conditions aux limites et construction de relèvements stables

L'objectif de cette partie est d'étendre les algorithmes adaptatifs précédents dans le cas de conditions aux limites de Dirichlet non homogènes.

Soit un domaine Ω de \mathbb{R}^d de frontière Γ supposée Lipchitz et régulière par morceaux, et soit Γ_D une partie de la frontière, sous variété de dimension $d-1$ de même

régularité que Γ . On définit classiquement par prolongement l'opérateur de trace γ_D continu de $H^1(\Omega)$ dans $H^{1/2}(\Gamma_D)$ et son noyau $V := H_D^1(\Omega)$. On considère alors le problème elliptique du second ordre

$$\begin{cases} a(u, v) = \langle f, v \rangle_{V', V}, \quad \forall v \in V \\ u \in H^1(\Omega), \quad \gamma_D u = g \end{cases} \quad (2.23)$$

où a est une forme bilinéaire continue sur $H^1(\Omega) \times V$ et coercive sur V , $f \in V'$ est le second membre et $g \in H^{1/2}(\Gamma_D)$ est la donnée de Dirichlet.

Ce problème se ramène à des conditions aux limites homogènes par relèvement de la trace g . Soit $\mathcal{R}(g) \in H^1(\Omega)$ un relèvement stable de g i.e. vérifiant

$$\gamma_D \mathcal{R}(g) = g \text{ et } \|\mathcal{R}(g)\|_{H^1(\Omega)} \lesssim \|g\|_{H^{1/2}(\Gamma_D)}.$$

La fonction

$$u_0 := u - \mathcal{R}(g)$$

est solution unique (par Lax Milgram) du problème variationnel classique

$$\begin{cases} a(u_0, v) = \langle f, v \rangle_{V', V} - a(\mathcal{R}(g), v), \quad \forall v \in V \\ u_0 \in V. \end{cases} \quad (2.24)$$

L'idée consiste à appliquer les algorithmes adaptatifs à ce problème homogène obtenu par correction du second membre par le relèvement des conditions aux limites. Afin de préserver l'optimalité de ces algorithmes, il faut cependant être en mesure de construire explicitement une base d'ondelettes Ψ_Ω^* de $H^1(\Omega)$ et un opérateur de relèvement \mathcal{R} tels que u_0 et $\mathcal{R}(g)$ aient les mêmes propriétés de compression que la solution u dans la base d'ondelettes Ψ_Ω^* .

Pour cela, on va construire une base d'ondelettes

$$\Psi_\Omega^* = \{\psi_\lambda^*, \lambda \in \nabla\}$$

stable dans $H^1(\Omega)$ et qui vérifie les propriétés remarquables suivantes.

Propriété 2.1 *La base d'ondelettes Ψ_Ω^* admet une partition*

$$\Psi_\Omega^* = \Psi_\Omega^0 \cup \Psi_\Omega^b$$

telle que (i)

$$\Psi_\Omega^0 = \{\psi_\lambda^*, \lambda \in \nabla^0\}$$

soit une base d'ondelettes de $H_D^1(\Omega)$ et (ii) que la trace $2^{-\frac{|\lambda|}{2}} \gamma_D$ définisse une bijection de Ψ_Ω^b sur une base d'ondelette

$$\Psi_{\Gamma_D} = \{\psi_\sigma, \sigma \in \Sigma_b\}$$

de $H^{1/2}(\Gamma_D)$.

L'opérateur de relèvement \mathcal{R} est alors défini par cette correspondance entre Ψ_Ω^b et Ψ_{Γ_D} : chaque ondelette $\psi_\sigma = 2^{-\frac{|\lambda|}{2}} \gamma_D \psi_\lambda^*$ de Ψ_{Γ_D} est relevée par l'ondelette ψ_λ^* de Ψ_Ω^* moyennant le facteur d'échelle $2^{-\frac{|\lambda|}{2}}$ qui traduit la normalisation dans L^2 des ondelettes du bord et du domaine.

En d'autres termes, la partition de la base d'ondelettes Ψ_Ω^* induit la décomposition $u := u_0 + \mathcal{R}(\gamma_D u)$ qui préserve les propriétés de compression de u dans cette base. En outre Ψ_Ω^* caractérisera naturellement les espaces de Besov $B_{p,p}^{s+1}(\Omega)$ où $\frac{1}{p} = \frac{1}{2} + \frac{s}{d}$ ce qui permettra d'appliquer les résultats d'approximation non linéaire du §2.2.1.

Une telle base étant construite l'algorithme adaptatif de [28] s'applique tel quel au problème variationnel corrigé (2.24).

Notons que la compression du second membre de (2.24) nécessite de comprimer f dans la base duale $\tilde{\Psi}_\Omega^0$ de Ψ_Ω^0 , mais aussi $a(\mathcal{R}(g), \cdot)$ en tant qu'élément de V' . Pour ce dernier terme, ceci revient à comprimer la trace g dans la base Ψ_{Γ_D} . Pour $\Sigma \subset \Sigma_b$ et $P_{\Sigma, \Gamma_D} := \sum_{\sigma \in \Sigma} \langle \cdot, \tilde{\psi}_\sigma \rangle \psi_\sigma$ où $\tilde{\Psi}_{\Gamma_D}$ désigne la base duale de Ψ_{Γ_D} , on a en effet l'estimation

$$\begin{aligned} \|a(\mathcal{R}(g - P_{\Sigma, \Gamma_D} g), \cdot)\|_{V'} &\leq \|a\| \|\mathcal{R}(g - P_{\Sigma, \Gamma_D} g)\|_{H^1(\Omega)} \\ &\lesssim \|g - P_{\Sigma, \Gamma_D} g\|_{H^{1/2}(\Gamma_D)}. \end{aligned}$$

Il faut remarquer que les propriétés 2.1 de la base d'ondelettes Ψ_Ω^* ne sont pas vérifiées par les constructions usuelles. Par exemple sur le demi-plan $\Omega = \mathbb{R} \times [0, \infty[$, la trace des ondelettes tensorielles comprend les ondelettes sur \mathbb{R} $\psi_{j,k}$, $j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}$, mais aussi les fonctions d'échelle $\phi_{j,k}$, $j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}$. Dans ce cas, ces fonctions ne sont donc même pas linéairement indépendantes.

D'autre part, supposons que la base Ψ_Ω^* soit stable dans $H^s(\Omega)$ et la base Ψ_{Γ_D} dans $H^{s-1/2}(\Gamma_D)$. La propriété 2.1 implique alors l'existence d'un opérateur trace γ_D continu de $H^s(\Omega)$ dans $H^{s-1/2}(\Gamma_D)$. On voit donc que nécessairement $s > 1/2$, ce qui s'interprète naturellement par le fait que la base duale $\tilde{\Psi}_\Omega^*$ de Ψ_Ω^* est constituée pour $\lambda \in \nabla_b$ des distributions $\gamma_D^* \tilde{\psi}_{\sigma(\lambda)}$. En particulier la base Ψ_Ω^* ne sera pas stable dans $L^2(\Omega)$ mais cette stabilité n'est pas utile ici. C'est la stabilité de la base Ψ_Ω^0 dans $L^2(\Omega)$ qui éventuellement importe pour la robustesse du préconditionnement du système (2.24) après discrétisation dans le cas d'un opérateur dégénéré du type $\mathcal{I} + \varepsilon \mathcal{A}$ et pour $\varepsilon \ll 1$.

Dans le cas d'une discrétisation adaptative de (2.23), le choix du relèvement de la trace est déterminant afin de préserver la compression de la solution. Au contraire, dans le cas d'une discrétisation uniforme sur l'espace $V_J(\Omega) \subset H^1(\Omega)$, le relèvement peut être choisi quelconque de $V_J(\Omega)$ dans $V_J(\Gamma_D)$. Dans ce cas, on définit classiquement les espaces

$$\begin{cases} V_J^0(\Omega) := V_J(\Omega) \cap H_D^1(\Omega) \\ V_J(\Gamma_D) := \gamma_D V_J(\Omega) \end{cases} \quad (2.25)$$

et pour une bonne approximation fixée g_J dans $V_J(\Gamma_D)$ de la trace g , on résoud

$$\begin{cases} a(u_J, v_J) = \langle f, v_J \rangle_{V',V}, \quad \forall v_J \in V_J^0(\Omega) \\ u_J \in V_J(\Omega), \quad \gamma_D u_J = g_J \in V_J(\Gamma_D). \end{cases} \quad (2.26)$$

Ce problème se ramène à nouveau à une formulation de Galerkin classique en considérant un relèvement

$$r_J : V_J(\Gamma_D) \rightarrow V_J(\Omega),$$

qui conduit au système

$$\begin{cases} a(u_J^0, v_J) = \langle f, v_J \rangle_{V',V} - a(r_J(g_J), v_J), \quad \forall v_J \in V_J^0(\Omega) \\ u_J^0 := u_J - r_J(g_J) \in V_J^0(\Omega). \end{cases} \quad (2.27)$$

D'après Lax Milgram la solution est unique et on vérifie facilement qu'elle est en fait indépendante du relèvement choisi de $V_J(\Gamma_D)$ dans $V_J(\Omega)$, ce qui garantit l'existence et l'unicité de la solution du problème (2.26).

On introduit dans le paragraphe suivant un nouveau cadre théorique qui permet de construire de telles bases Ψ_Ω^* et d'analyser leurs propriétés de stabilité qui en outre vont déterminer la stabilité du relèvement. Le point de départ est la donnée de deux bases d'ondelettes Ψ_Ω^0 et Ψ_{Γ_D} associées aux AMR $V_j^0(\Omega)$ et $V_j(\Gamma_D)$ issues par (2.25) de la même AMR $V_j(\Omega)$ de $H^1(\Omega)$. On définit alors un projecteur biorthogonal (voir §1.1.6) tel qu'il existe une base d'ondelettes associée Ψ_Ω^* satisfaisant la propriété 2.1.

Les paragraphes 2.3.1 et 2.3.2 illustrent ce formalisme abstrait en commençant par les exemples simples du demi-plan et du carré puis en étendant la construction à un domaine "général" dans le cadre de la décomposition de domaine du §1.4.

2.3.1 Cadre abstrait

Soient

$$V_j(\Omega) \subset V_{j+1}(\Omega), \quad j \in \mathbb{N}$$

une suite de sous espaces fermés emboîtés (AMR) de $W^{s,p}(\Omega)$ avec $s > 1/p$ de façon à pouvoir définir l'opérateur trace γ_D de $W^{s,p}(\Omega)$ dans $W^{s-1/p,p}(\Gamma_D)$. On notera $W_D^{s,p}(\Omega)$ le noyau de cet opérateur.

La définition

$$\begin{cases} V_j^0(\Omega) := V_j(\Omega) \cap W_D^{s,p}(\Omega) \\ V_j(\Gamma_D) := \gamma_D V_j(\Omega) \end{cases}$$

induit deux autres AMR respectivement de $W_D^{s,p}(\Omega)$ et de $W^{s-1/p,p}(\Gamma_D)$.

$$\begin{cases} V_j^0(\Omega) \subset V_{j+1}^0(\Omega) \subset W_D^{s,p}(\Omega) \\ V_j(\Gamma_D) \subset V_{j+1}(\Gamma_D) \subset W^{s-1/p,p}(\Gamma_D) \end{cases}$$

Pour chacune de ces AMR on se donne un choix de décomposition multiéchelle induit par un projecteur biorthogonal (voir la définition §1.1.6) noté $P_{j,\Omega}^0$ pour l'AMR $V_j^0(\Omega)$ et P_{j,Γ_D} pour l'AMR $V_j(\Gamma_D)$. On notera

$$W_j^0(\Omega) := Q_{j,\Omega}^0 V_{j+1}^0(\Omega) \text{ où } Q_{j,\Omega}^0 = P_{j+1,\Omega}^0 - P_{j,\Omega}^0$$

et

$$W_j(\Gamma_D) := Q_{j,\Gamma_D} V_{j+1}(\Gamma_D) \text{ où } Q_{j,\Gamma_D} = P_{j+1,\Gamma_D} - P_{j,\Gamma_D}$$

les espaces d'ondelettes associés et $\Psi_\Omega^0, \Psi_{\Gamma_D}$ un choix de bases d'ondelettes dont les propriétés de stabilité seront précisées ultérieurement. On a alors la propriété-définition suivante.

Proposition 2.3 *On définit pour $u \in \mathcal{D}(\bar{\Omega})$ et r_j un relèvement quelconque de $V_j(\Gamma_D)$ dans $V_j(\Omega)$*

$$P_{j,\Omega}^* u := P_{j,\Omega}^0 \left(u - r_j \circ P_{j,\Gamma_D} \circ \gamma_D(u) \right) + r_j \circ P_{j,\Gamma_D} \circ \gamma_D(u). \quad (2.28)$$

Cette définition est clairement indépendante du choix de r_j et de plus

(i) $P_{j,\Omega}^*$ est un projecteur biorthogonal sur $V_j(\Omega)$ i.e.

$$\begin{cases} \text{Im } P_{j,\Omega}^* = V_j(\Omega) \\ (P_{j,\Omega}^*)^2 = P_{j,\Omega}^* \\ P_{j,\Omega}^* P_{j+1,\Omega}^* = P_{j,\Omega}^* \end{cases}$$

(ii) Le triplé $(P_{j,\Omega}^*, P_{j,\Omega}^0, P_{j,\Gamma_D})$ satisfait les propriétés

$$\begin{cases} \gamma_D \circ P_{j,\Omega}^* = P_{j,\Gamma_D} \circ \gamma_D \text{ (commutation)}, \\ P_{j,\Omega}^* |_{V_{j+1}^0(\Omega)} = P_{j,\Omega}^0 |_{V_{j+1}^0(\Omega)}. \end{cases} \quad (2.29)$$

Preuve. La propriété de commutation résulte directement de la définition. D'autre part, on a clairement $\text{Im } P_{j,\Omega}^* \subset V_j(\Omega)$ et $P_{j,\Omega}^* u_j = u_j$ pour tout $u_j \in V_j(\Omega)$. En outre $P_{j,\Omega}^0$ étant par hypothèse un projecteur, on voit facilement que $P_{j,\Omega}^0 P_{j,\Omega}^* = P_{j,\Omega}^0$ et donc

$$\begin{aligned} (P_{j,\Omega}^*)^2 &= P_{j,\Omega}^0 \left(P_{j,\Omega}^* - r_j \circ (P_{j,\Gamma_D})^2 \circ \gamma_D \right) + r_j \circ (P_{j,\Gamma_D})^2 \circ \gamma_D \\ &= P_{j,\Omega}^* \end{aligned}$$

où on a utilisé le fait que P_{j,Γ_D} est un projecteur. La propriété $P_{j,\Omega}^* |_{V_{j+1}^0(\Omega)} = P_{j,\Omega}^0 |_{V_{j+1}^0(\Omega)}$ est immédiate dans la mesure où, restreint aux fonctions de trace nulle sur Γ_D , le projecteur $P_{j,\Omega}^*$ coïncide avec $P_{j,\Omega}^0$. La biorthogonalité du projecteur $P_{j,\Omega}^*$

se déduit de la biorthogonalité des projecteurs $P_{j,\Omega}^0$ et P_{j,Γ_D} et de la commutation $\gamma_D \circ P_{j+1,\Omega}^* = P_{j+1,\Gamma_D} \circ \gamma_D$.

$$\begin{aligned} P_{j,\Omega}^* P_{j+1,\Omega}^* &= P_{j,\Omega}^0 \left(P_{j+1,\Omega}^0 (I - r_{j+1} \circ P_{j+1,\Gamma_D} \circ \gamma_D) + r_{j+1} \circ P_{j+1,\Gamma_D} \circ \gamma_D \right. \\ &\quad \left. - r_j \circ (P_{j,\Gamma_D} P_{j+1,\Gamma_D}) \circ \gamma_D \right) + r_j \circ (P_{j,\Gamma_D} P_{j+1,\Gamma_D}) \circ \gamma_D \\ &= P_{j,\Omega}^* \end{aligned}$$

□

Le projecteur biorthogonal $P_{j,\Omega}^*$ induit une décomposition multiéchelle associée à l'AMR $V_j(\Omega)$. Soit

$$W_j^*(\Omega) := Q_{j,\Omega}^* V_{j+1}(\Omega) \text{ où } Q_{j,\Omega}^* = P_{j+1,\Omega}^* - P_{j,\Omega}^*$$

l'espace d'ondelettes associé. Les propriétés (2.29) traduites sur les espaces complémentaires entraînent les relations

$$\begin{cases} W_j^0(\Omega) = W_j^*(\Omega) \cap V_{j+1}^0(\Omega) \\ \gamma_D W_j^*(\Omega) = W_j(\Gamma_D). \end{cases} \quad (2.30)$$

On voit clairement qu'elles assurent l'existence d'une base d'ondelettes Ψ_Ω^* (définie au moins formellement pour le moment) associée au complémentaire $W_j^*(\Omega)$ telle que

$$\Psi_\Omega^* = \Psi_\Omega^0 \cup \Psi_\Omega^b$$

et où la collection Ψ_Ω^b soit en bijection avec Ψ_{Γ_D} par la trace $2^{-\frac{|\Omega|}{2}} \gamma_D$.

On note

$$\begin{aligned} \Psi_{\Gamma_D} &= \{\psi_\sigma, \sigma \in \Sigma_b\} \\ \Psi_\Omega^b &= \{\psi_\lambda^*, \lambda \in \nabla_b\}. \end{aligned}$$

Alors la bijection $2^{-\frac{|\Omega|}{2}} \gamma_D$ sur les bases induit une bijection $\lambda^r : \Sigma_b \rightarrow \nabla_b$ sur les indices d'inverse σ^r avec $|\lambda^r(\sigma)| = |\sigma|$. L'opérateur de relèvement \mathcal{R} associé est défini (formellement pour le moment) par la formule

$$\mathcal{R}(g) = \sum_{\sigma \in \Sigma_b} 2^{-\frac{|\sigma|}{2}} \langle g, \tilde{\psi}_\sigma \rangle \psi_{\lambda^r(\sigma)}^*. \quad (2.31)$$

où $\tilde{\Psi}_{\Gamma_D} = \{\tilde{\psi}_\sigma, \sigma \in \Sigma_b\}$ désigne la base duale de Ψ_{Γ_D} et $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le crochet de dualité associé.

Les propriétés de stabilité des bases Ψ_Ω^* et Ψ_{Γ_D} vont déterminer les propriétés de stabilité de l'opérateur de relèvement \mathcal{R} . Elles s'analysent classiquement par le biais des estimations directes et inverses, objet du paragraphe suivant.

Estimations directes sur Ω et Γ_D

Ces estimations seront obtenues moyennant un certain nombre d'hypothèses qui seront naturellement vérifiées dans le cadre de la construction par décomposition de domaine au §2.3.3.

L'hypothèse de localité suivante introduite dans [72] (voir aussi [71]) s'avèrera essentielle pour la suite.

Hypothèse 2.1 *Pour tout $g_j \in V_j(\Gamma_D)$ on a*

$$\inf_{u_j \in V_j(\Omega) : \gamma_D u_j = g_j} \|u_j\|_{L^p(\Omega)} \sim 2^{-j/p} \|g_j\|_{L^p(\Gamma_D)}. \quad (2.32)$$

Lemme 2.1 *Cette hypothèse est en particulier vérifiée dès qu'il existe une base (locale)*

$$\Phi_{j,\Omega} = \{\varphi_{j,x}, x \in \mathcal{G}_{j,\Omega}\}$$

de $V_j(\Omega)$ stable dans $L^p(\Omega)$ (cf lemme 1.4) et telle que

$$\Phi_{j,\Gamma_D} = \{2^{-\frac{j}{2}} \gamma_D \varphi_{j,x}, x \in \mathcal{G}_{j,\Omega}^b \subset \mathcal{G}_{j,\Omega}\}$$

soit une base stable dans $L^p(\Gamma_D)$ de $V_j(\Gamma_D)$ alors que les fonctions de base restantes de

$$\Phi_{j,\Omega}^0 = \{\varphi_{j,x}, x \in \mathcal{G}_{j,\Omega} / \mathcal{G}_{j,\Omega}^b\}$$

ont une trace nulle sur Γ_D .

Preuve. En effet pour $g_j = \sum_{x \in \mathcal{G}_{j,\Omega}^b} g_{j,x} \gamma_D \varphi_{j,x}$ on pose $u_j = \sum_{x \in \mathcal{G}_{j,\Omega}^b} g_{j,x} \varphi_{j,x}$ et par définition de la stabilité dans L^p on a

$$\begin{aligned} \|g_j\|_{L^p(\Gamma_D)} &\sim 2^{j(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})(d-1)} \|(2^{\frac{j}{2}} g_{j,x})_{x \in \mathcal{G}_{j,\Omega}^b}\|_{l^p} \\ &= 2^{-j/p} 2^{j(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})d} \|(g_{j,x})_{x \in \mathcal{G}_{j,\Omega}^b}\|_{l^p} \\ &\sim 2^{-j/p} \|u_j\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

D'autre part, d'après l'hypothèse de stabilité de $\Phi_{j,\Omega}$ et de trace nulle des fonctions de $\Phi_{j,\Omega}^0$ on a clairement

$$\|u_j\|_{L^p(\Omega)} \sim \inf_{v_j \in V_j(\Omega) : \gamma_D v_j = g_j} \|v_j\|_{L^p(\Omega)}.$$

□

On voit que dans le cadre de la construction du §1.4 par décomposition de domaine, la base locale $\Phi_{j,\Omega}$ (1.131) vérifie naturellement les hypothèses du lemme et donc la propriété de localité.

On suppose en outre vérifiées l'hypothèse d'approximation suivante dans $V_j(\Omega)$.

Hypothèse 2.2 Soit $p \in [1, \infty]$. Il existe un projecteur biorthogonal $P_{j,\Omega}$ sur $V_j(\Omega)$ vérifiant l'estimation directe

$$\|u - P_{j,\Omega}u\|_{L^p(\Omega)} \lesssim 2^{-js} \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \quad (2.33)$$

pour tout $0 \leq s \leq n$ et $u \in W^{s,p}(\Omega)$.

Noter que les mêmes estimations en norme Besov $B_{p,q}^s(\Omega)$ s'en déduisent par interpolation pour $0 < s < n$.

On suppose en outre que les projecteurs $P_{j,\Omega}^0$ et P_{j,Γ_D} sont uniformément stables dans L^p .

Hypothèse 2.3 Soit $p \in [1, \infty]$, alors $\|P_{j,\Omega}^0 u\|_{L^p(\Omega)} \lesssim \|u\|_{L^p(\Omega)}$.

Hypothèse 2.4 Soit $p \in [1, \infty]$, alors $\|P_{j,\Gamma_D} g\|_{L^p(\Gamma_D)} \lesssim \|g\|_{L^p(\Gamma_D)}$.

Enfin l'espace $V_j(\Omega)$ est aussi supposé vérifier des estimations inverses ou inégalités de Bernstein.

Hypothèse 2.5 On note $\tau(p)$ la borne supérieure de la régularité $W^{s,p}$ de $V_j(\Omega)$. Alors pour tout $u_j \in V_j(\Omega)$ et $0 < s < \tau(p)$

$$\|u_j\|_{B_{p,p}^s(\Omega)} \lesssim 2^{js} \|u_j\|_{L^p(\Omega)}. \quad (2.34)$$

Avant d'écrire les estimations directes et inverses sur Γ_D il nous faut préciser le cadre fonctionnel sur le bord Γ_D . On s'intéresse naturellement dans cette étude aux espaces fonctionnels sur le bord définis comme espaces de trace et non pas de façon intrinsèque par atlas et partition de l'unité. Dans ce cas, l'espace $L^p(\Gamma_D)$ est défini classiquement par la mesure de Lebesgue sur le bord et pour $s > 0$, les espaces de Sobolev $W^{s,p}(\Gamma_D)$ (resp. de Besov $B_{p,q}^s(\Gamma_D)$) sont définis comme l'ensemble des traces sur Γ_D des espaces $W^{s+\frac{1}{p},p}(\Omega)$ (resp. $B_{p,q}^{s+\frac{1}{p}}(\Omega)$) munis de la norme quotient

$$\|g\|_{W^{s,p}(\Gamma_D)} := \inf_{u \in W^{s+\frac{1}{p},p}(\Omega): \gamma_D u = g} \|u\|_{W^{s+\frac{1}{p},p}(\Omega)} \quad (2.35)$$

et de même pour les espaces de Besov

$$\|g\|_{B_{p,q}^s(\Gamma_D)} := \inf_{u \in B_{p,q}^{s+\frac{1}{p}}(\Omega): \gamma_D u = g} \|u\|_{B_{p,q}^{s+\frac{1}{p}}(\Omega)}. \quad (2.36)$$

On conviendra naturellement que $W^{0,p}(\Gamma_D) = L^p(\Gamma_D)$. Pour les indices négatifs les espaces sont définis par dualité. En particulier pour Γ et $s < 0$

$$W^{s,p}(\Gamma) := W^{-s,p'}(\Gamma)', \quad B_{p,q}^s(\Gamma) := B_{p',q'}^{-s}(\Gamma)', \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1, \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

Cette définition coïncide avec la définition intrinsèque pour $|s| < 1 + \frac{1}{p}$ dans le cas d'un domaine Lipschitz et régulier par morceaux (voir [68]).

Estimations directes et inverses sur Γ_D . L'obtention sur Γ_D des estimations directes et inverses est déjà étudiée dans [72]. Elles résultent des estimations sur Ω (2.34), (2.33), de l'hypothèse de stabilité du projecteur 2.4 et de l'hypothèse de localité (2.32).

Proposition 2.4 *Sous les hypothèses 2.1 et 2.5, pour tout $g_j \in V_j(\Gamma_D)$ et $0 < s < \tau(p) - \frac{1}{p}$, on a l'estimation inverse*

$$\|g_j\|_{B_{p,p}^s(\Gamma_D)} \lesssim 2^{js} \|g_j\|_{L^p(\Gamma_D)}. \quad (2.37)$$

Preuve. Par définition de la norme quotient pour $s > 0$

$$\begin{aligned} \|g_j\|_{B_{p,p}^s(\Gamma_D)} &\leq \inf_{u_j \in V_j(\Omega): \gamma_D u_j = g_j} \|u_j\|_{B_{p,p}^{s+\frac{1}{p}}(\Omega)} \\ &\lesssim 2^{j(s+\frac{1}{p})} \inf_{u_j \in V_j(\Omega): \gamma_D u_j = g_j} \|u_j\|_{L^p(\Omega)} \\ &\lesssim 2^{js} \|g_j\|_{L^p(\Gamma_D)} \end{aligned}$$

où on a appliqué successivement l'estimation inverse (2.34) et l'hypothèse de localité (2.32). \square

Proposition 2.5 *Soit $p \in [1, \infty]$, sous les hypothèses 2.1, 2.2, 2.4, 2.5 et $\tau(p) > 1/p$, pour tout $g \in B_{p,p}^s(\Gamma_D)$ et pour $0 < s < n - \frac{1}{p}$, on a l'estimation directe*

$$\|g - P_{j,\Gamma_D} g\|_{L^p(\Gamma_D)} \lesssim 2^{-js} \|g\|_{B_{p,p}^s(\Gamma_D)}. \quad (2.38)$$

Preuve. On reprend la preuve proposée dans [72]. D'après l'hypothèse de stabilité du projecteur 2.4, il va suffire d'évaluer l'erreur de meilleure approximation dans $V_j(\Gamma_D)$. Pour $s > 0$ on considère par le théorème de trace, une fonction u quelconque de $B_{p,p}^{s+1/p}$ telle que $\gamma_D u = g$. D'après les hypothèses 2.2 et 2.5, la décomposition multiéchelle induite par le projecteur biorthogonal $P_{j,\Omega}$ de 2.2 est stable dans $B_{p,p}^s$ pour $0 < s < \tau(p)$. Alors

$$\begin{aligned} \inf_{g_j \in V_j(\Gamma_D)} \|g - g_j\|_{L^p(\Gamma_D)} &\leq \|\gamma_D(u - P_{j,\Omega} u)\|_{L^p(\Gamma_D)} \\ &= \|\gamma_D \sum_{l \geq j} Q_{l,\Omega} u\|_{L^p(\Gamma_D)} \\ &\leq \sum_{l \geq j} \|\gamma_D Q_{l,\Omega} u\|_{L^p(\Gamma_D)} \\ &\lesssim \sum_{l \geq j} 2^{l/p} \|Q_{l,\Omega} u\|_{L^p(\Omega)} \\ &\lesssim 2^{-js} \left(\sum_{l \geq j} (2^{l(s+1/p)} \|Q_{l,\Omega} u\|_{L^p(\Omega)})^p \right)^{1/p} \end{aligned} \quad (2.39)$$

où on a utilisé l'hypothèse de localité 2.1 et l'inégalité de Cauchy Schwartz. Rappelons l'inégalité, pour tout $0 < t < n$

$$\left(\sum_{l \geq 0} (2^{jt} \|Q_{l,\Omega} u\|_{L^p(\Omega)})^p \right)^{1/p} \lesssim \|u\|_{B_{p,p}^t(\Omega)} \quad (2.40)$$

qui est une conséquence de l'hypothèse 2.2 démontrée dans l'Appendice 1 (cf (3.63)). On a donc pour tout $u \in B_{p,p}^{s+1/p}$ de trace $\gamma_D u = g$,

$$\inf_{g_j \in V_j(\Gamma_D)} \|g - g_j\|_{L^p(\Gamma_D)} \lesssim 2^{-js} \|u\|_{B_{p,p}^{s+1/p}(\Omega)}$$

et on conclut par définition de la norme quotient sur Γ_D . \square

Estimations directes pour $P_{j,\Omega}^$.* Elles s'obtiennent dans le même esprit que précédemment en combinant les estimations pour $P_{j,\Omega}$ et P_{j,Γ_D} .

Proposition 2.6 *Soit $p \in [1, \infty]$, sous les hypothèses 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5 et $\tau(p) > 1/p$, on a pour tout $u \in B_{p,p}^s(\Omega)$ avec $1/p < s < n$, l'estimation directe*

$$\|u - P_{j,\Omega}^* u\|_{L^p(\Omega)} \lesssim 2^{-js} \|u\|_{B_{p,p}^s(\Omega)}. \quad (2.41)$$

Preuve. Soit $g \in B_{p,p}^{s-1/p}(\Gamma_D)$ la trace de u . L'erreur de projection se réécrit

$$u - P_{j,\Omega}^* u = (I - P_{j,\Omega}^0)(u - r_j \circ P_{j,\Gamma_D} g).$$

où r_j est n'importe quel relèvement de $V_j(\Gamma_D)$ dans $V_j(\Omega)$. Le projecteur $P_{j,\Omega}^0$ étant d'après l'hypothèse 2.3 uniformément stable dans $L^p(\Omega)$, il va suffire d'estimer

$$\begin{aligned} \inf_{r_j} \|u - r_j \circ P_{j,\Gamma_D} g\|_{L^p(\Omega)} &= \inf_{u_j \in V_j(\Omega): \gamma_D u_j = P_{j,\Gamma_D} g} \|u - u_j\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \|u - P_{j,\Omega} u\|_{L^p(\Omega)} \\ &\quad + \inf_{u_j \in V_j(\Omega): \gamma_D u_j = P_{j,\Gamma_D} g} \|P_{j,\Omega} u - u_j\|_{L^p(\Omega)}. \end{aligned}$$

L'estimation du premier terme du membre de droite résulte directement de l'hypothèse 2.2. Pour le second on utilise à nouveau l'hypothèse de localité 2.1, d'où

$$\begin{aligned} \inf_{u_j \in V_j(\Omega): \gamma_D u_j = P_{j,\Gamma_D} g} \|P_{j,\Omega} u - u_j\|_{L^p(\Omega)} &\sim 2^{-j/p} \|\gamma_D P_{j,\Omega} u - P_{j,\Gamma_D} g\|_{L^p(\Gamma_D)} \\ &\lesssim 2^{-j/p} \|g - P_{j,\Gamma_D} g\|_{L^p(\Gamma_D)} \\ &\quad + 2^{-j/p} \|\gamma_D(u - P_{j,\Omega} u)\|_{L^p(\Gamma_D)}. \end{aligned}$$

Le premier terme s'estime par la proposition 2.5 et le théorème de trace et le second se traite comme en (2.39). \square

Cas des projecteurs P_{j,Γ_D} instables dans L^p . C'est le cas lorsque $p \in]0, 1[$ qu'il est

essentiel de savoir traiter pour l'approximation non linéaire et adaptative (cf §2.2.1 et 2.2.2). Cette analyse nous servira aussi dans la première construction sur le carré au §2.3.1 où le projecteur P_{j,Γ_D} sera interpolant aux quatre coins du carré et donc instable dans L^2 .

Pour $p < 1$, l'hypothèse de localité reste vraie en général dans la mesure où la stabilité des bases $\Phi_{j,\Omega}$ et Φ_{j,Γ_D} demeure classiquement vérifiée pour $p < 1$ sous une hypothèse d'indépendance linéaire locale des fonctions d'échelle. Il en résulte que la proposition 2.4 s'applique toujours pour $p < 1$.

En revanche la stabilité des projecteurs P_{j,Γ_D} et $P_{j,\Omega}^0$ dans L^p n'est plus vérifiée et donc la démonstration des estimations directes pour $P_{j,\Omega}^*$ et P_{j,Γ_D} ne s'étend pas à $p < 1$.

Pour le projecteur $P_{j,\Omega}^*$ elles doivent alors être démontrées au cas par cas (en suivant les techniques du §III de [26]). L'estimation directe pour le projecteur P_{j,Γ_D} s'en déduit en utilisant dans (2.39) le projecteur $P_{j,\Omega}^*$, qui par définition préserve la trace, ce qui permet d'estimer directement $\|g - P_{j,\Gamma_D}g\|_{L^p(\Gamma_D)}$. On évite ainsi une démonstration directe délicate car il faut manipuler des normes quotients.

Proposition 2.7 *Soit $0 < p < 1$ et un $r \in [1, \infty]$ fixé tel que P_{j,Γ_D} soit stable dans $L^r(\Gamma_D)$. On suppose vérifiée l'hypothèse de localité 2.1, $\tau(p) > 1/p$, les estimations directes*

$$\|u - P_{j,\Omega}^*u\|_{L^p(\Omega)} \lesssim 2^{-jt} \|u\|_{B_{p,p}^t(\Omega)}$$

pour tout $\frac{1}{r} + \frac{d}{p} - \frac{d}{r} < t < n$, et les estimations inverses

$$\|u_j\|_{B_{p,p}^t(\Omega)} \lesssim 2^{jt} \|u_j\|_{L^p(\Omega)}$$

pour tout $u_j \in V_j(\Omega)$ et $0 < t < \tau(p)$. Alors on a l'estimation

$$\|g - P_{j,\Gamma_D}g\|_{L^p(\Gamma_D)} \lesssim 2^{-js} \|g\|_{B_{p,p}^s(\Gamma_D)} \quad (2.42)$$

pour $(d-1)(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}) < s < n - \frac{1}{p}$.

Preuve. Noter que la condition $\frac{s}{d-1} > \frac{1}{p} - \frac{1}{r}$ entraîne que l'espace $B_{p,p}^s(\Gamma_D)$ s'injecte dans $L^r(\Gamma_D)$ et donc que les projecteurs P_{j,Γ_D} sont définis sur cet espace. En outre, $t = s + 1/p$ satisfait alors $\frac{t}{d} - 1/p > \frac{1/r}{d} - 1/r$ de sorte que $P_{j,\Gamma_D} \gamma_D$ sont définis sur l'espace $B_{p,p}^{s+1/p}(\Omega)$ qui s'injecte dans $B_{r,r}^{1/r}(\Omega)$.

Les hypothèses d'estimations directes et inverses impliquent, par application du théorème 1.4 (§1.1.7), la stabilité de la décomposition induite par $P_{j,\Omega}^*$ dans $B_{p,p}^t(\Omega)$ pour $\frac{1}{r} + \frac{d}{p} - \frac{d}{r} < t < \min(n, \tau(p))$. On applique alors la démonstration de la proposition 2.5 à $\|g - P_{j,\Gamma_D}g\|_{L^p(\Gamma_D)}$ en remplaçant $P_{j,\Omega}$ par $P_{j,\Omega}^*$ et l'inégalité triangulaire par la p-inégalité triangulaire. Pour tout $(d-1)(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}) < s < n - 1/p$ et $u \in B_{p,p}^{s+1/p}(\Omega)$

tel que $\gamma_D u = g$ on a

$$\begin{aligned}
\|g - P_{j,\Gamma_D} g\|_{L^p(\Gamma_D)} &= \|\gamma_D(u - P_{j,\Omega}^* u)\|_{L^p(\Gamma_D)} \\
&= \|\gamma_D \sum_{l \geq j} Q_{l,\Omega}^* u\|_{L^p(\Gamma_D)} \\
&\leq \left(\sum_{l \geq j} \|\gamma_D Q_{l,\Omega}^* u\|_{L^p(\Gamma_D)}^p \right)^{1/p} \\
&\lesssim \left(\sum_{l \geq j} (2^{l/p} \|Q_{l,\Omega}^* u\|_{L^p(\Omega)})^p \right)^{1/p} \\
&\lesssim 2^{-js} \left(\sum_{l \geq j} (2^{l(s+1/p)} \|Q_{l,\Omega}^* u\|_{L^p(\Omega)})^p \right)^{1/p} \\
&\lesssim 2^{-js} \|u\|_{B_{p,p}^{s+1/p}(\Omega)}.
\end{aligned} \tag{2.43}$$

□

Stabilité des bases Ψ_{Γ_D} , Ψ_{Ω}^* et du relèvement \mathcal{R}

Théorème 2.2 Soit $p, q \in [1, \infty]$, sous les hypothèses 2.1, 2.2, 2.3, 2.4, 2.5 et $\tau(p) > 1/p$, la décomposition multiéchelle induite par le projecteur biorthogonal $P_{j,\Omega}^*$ est stable dans $B_{p,q}^s(\Omega)$ pour tout $1/p < s < \min(\tau(p), n)$ i.e.

$$\|u\|_{B_{p,q}^s(\Omega)} \sim \|P_{0,\Omega}^* u\|_{L^p(\Omega)} + \left\| \left(2^{js} \|Q_{j,\Omega}^* u\|_{L^p(\Omega)} \right)_{j \geq 0} \right\|_{l^q}, \tag{2.44}$$

et la décomposition induite par le projecteur P_{j,Γ_D} est stable dans $B_{p,q}^s(\Gamma_D)$ pour tout $0 < s < \min(\tau(p), n) - 1/p$ i.e.

$$\|g\|_{B_{p,q}^s(\Gamma_D)} \sim \|P_{0,\Gamma_D} g\|_{L^p(\Gamma_D)} + \left\| \left(2^{js} \|Q_{j,\Gamma_D} g\|_{L^p(\Gamma_D)} \right)_{j \geq 0} \right\|_{l^q}. \tag{2.45}$$

Preuve. Les espaces $B_{p,q}^s(\Gamma_D)$ sont des espaces d'interpolations d'après leur définition (2.36) comme espaces quotients des espaces $B_{p,q}^s(\Omega)$. Ces équivalences de normes résultent donc de l'application directe du théorème 1.4 du §1.1.7. □

Pour définir un opérateur de relèvement stable il va désormais suffire de construire à chaque niveau fixé $j \geq 0$ des relèvements

$$\mathcal{R}_j : W_j(\Gamma_D) \rightarrow W_j^*(\Omega)$$

tels que

$$\|\mathcal{R}_j h_j\|_{L^p(\Omega)} \sim 2^{-j/p} \|h_j\|_{L^p(\Gamma_D)}, \tag{2.46}$$

et un relèvement \mathcal{R}_{-1} de $V_0(\Gamma_D)$ dans $V_0(\Omega)$ tel que $\|\mathcal{R}_{-1} g_0\|_{L^p(\Omega)} \sim \|g_0\|_{L^p(\Gamma_D)}$. Le relèvement multiéchelle \mathcal{R} s'écrit alors

$$\mathcal{R} = \mathcal{R}_{-1} P_{0,\Gamma_D} + \sum_{j \geq 0} \mathcal{R}_j Q_{j,\Gamma_D} \tag{2.47}$$

Pour se faire, le plus simple est de supposer les bases d'ondelettes $\Psi_{j,\Omega}^*$ et Ψ_{j,Γ_D} uniformément stables dans L^p , propriétés obtenues classiquement par un argument d'indépendance linéaire locale des ondelettes. On obtient alors l'opérateur de relèvement (2.31).

Sur un domaine borné l'existence des opérateurs \mathcal{R}_j peut se déduire de l'hypothèse de localité 2.1 moyennant la stabilité L^p de la décomposition à deux niveaux $V_{j+1}(\Omega) = V_j(\Omega) \oplus W_j^*(\Omega)$.

Proposition 2.8 *Soit Ω un domaine borné. Sous l'hypothèse de localité 2.1 et de stabilité de la décomposition à deux niveaux, pour tout $u_j \in V_j(\Omega)$, $w_j \in W_j^*(\Omega)$, $u_{j+1} = u_j + w_j$*

$$\|u_{j+1}\|_{L^p(\Omega)} \sim \|u_j\|_{L^p(\Omega)} + \|w_j\|_{L^p(\Omega)},$$

les espaces $W_j^*(\Omega)$ et $W_j(\Gamma_D)$ vérifient la propriété de localité

$$\inf_{w_j \in W_j^*(\Omega): \gamma_D w_j = h_j} \|w_j\|_{L^p(\Omega)} \sim 2^{-j/p} \|h_j\|_{L^p(\Gamma_D)} \quad (2.48)$$

et pour un domaine Ω borné, il existe des opérateurs de relèvement \mathcal{R}_j vérifiant (2.46).

Preuve. Soit $u_{j+1} = u_j + w_j$ tel que $\gamma_D u_{j+1} = h_j \in W_j(\Gamma_D)$ et $u_j \in V_j(\Omega)$, $w_j \in W_j^*(\Omega)$. On déduit de la propriété de commutation du projecteur $P_{j,\Omega}^*$ avec la trace que $\gamma_D u_j = 0$. D'après l'Hypothèse 2.1 appliquée au niveau $j+1$ on a les équivalences

$$\begin{aligned} 2^{-j/p} \|h_j\|_{L^p(\Gamma_D)} &\sim \inf_{u_{j+1} \in V_{j+1}(\Omega): \gamma_D u_{j+1} = h_j} \|u_{j+1}\|_{L^p(\Omega)} \\ &\sim \inf_{u_j \in V_j(\Omega), w_j \in W_j^*(\Omega): \gamma_D w_j = h_j, \gamma_D u_j = 0} \|u_{j+1}\|_{L^p(\Omega)} \\ &\sim \inf_{w_j \in W_j^*(\Omega): \gamma_D w_j = h_j} \|w_j\|_{L^p(\Omega)}. \quad \square \end{aligned}$$

Théorème 2.3 *Soit $p \in [1, \infty]$. Sous les hypothèses du théorème 2.2 et d'uniforme stabilité dans L^p des bases d'ondelettes $\Psi_{j,\Omega}^*$ et Ψ_{j,Γ_D} , le relèvement (2.31) est stable de $B_{p,q}^s(\Gamma_D)$ dans $B_{p,q}^{s+1/p}(\Omega)$, i.e.*

$$\|\mathcal{R}(g)\|_{B_{p,q}^{s+1/p}(\Omega)} \lesssim \|g\|_{B_{p,q}^s(\Gamma_D)},$$

pour tout $0 < s < \min(\tau(p), n) - 1/p$.

Preuve. C'est une conséquence directe de la caractérisation des normes Besov du domaine et du bord par les normes discrètes des coefficients d'ondelettes pondérés des facteurs d'échelle. Noter qu'au niveau grossier, on retient en dimension finie n'importe quel relèvement de $V_0(\Gamma_D)$ dans $V_0(\Omega)$ et en dimension infinie un relèvement stable de $L^p(\Gamma_D)$ dans $L^p(\Omega)$ obtenu par exemple sous les hypothèses du lemme 2.1.

Pour $p < 1$ les théorèmes précédents s'étendent sous les hypothèses de la proposition 2.7.

Théorème 2.4 *Soit $p, q \in]0, 1[$, sous les hypothèses de la proposition 2.7 on a pour tout $\frac{1}{r} + \frac{d}{p} - \frac{d}{r} < s < \min(\tau(p), n)$*

$$\|u\|_{B_{p,q}^s(\Omega)} \sim \|P_{0,\Omega}^* u\|_{L^p(\Omega)} + \left\| \left(2^{js} \|Q_{j,\Omega}^* u\|_{L^p(\Omega)} \right)_{j \geq 0} \right\|_{l^q}, \quad (2.49)$$

et pour tout $(d-1)(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}) < s < \min(\tau(p), n) - 1/p$

$$\|g\|_{B_{p,q}^s(\Gamma_D)} \sim \|P_{0,\Gamma_D} g\|_{L^p(\Gamma_D)} + \left\| \left(2^{js} \|Q_{j,\Gamma_D} g\|_{L^p(\Gamma_D)} \right)_{j \geq 0} \right\|_{l^q}. \quad (2.50)$$

Sous réserve de stabilité dans L^p des bases $\Psi_{j,\Omega}^*$ et Ψ_{j,Γ_D} on en déduit la stabilité du relèvement (2.31)

$$\|\mathcal{R}(g)\|_{B_{p,q}^{s+1/p}(\Omega)} \lesssim \|g\|_{B_{p,q}^s(\Gamma_D)}$$

pour tout $(d-1)(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}) < s < \min(\tau(p), n) - 1/p$

Preuve. C'est une application directe du théorème 1.4. □

2.3.2 Exemples simples de constructions

Demi-plan $\Omega =]0, \infty[\times \mathbb{R}$

La nature du relèvement multiéchelle apparaîtra clairement sur cet exemple élémentaire.

On considère sur \mathbb{R} un choix de générateurs biorthogonaux à supports compacts $(\phi, \tilde{\phi})$ avec $\phi \in C^0(\mathbb{R})$. On note ψ et $\tilde{\psi}$ les ondelettes mères, $\Phi_{j,\mathbb{R}}, \Psi_{j,\mathbb{R}}$ les bases de fonctions d'échelle et d'ondelettes des espaces $V_j(\mathbb{R})$ et $W_j(\mathbb{R})$, et $P_{j,\mathbb{R}}$ le projecteur biorthogonal correspondant qui joue ici le rôle du projecteur $P_{j,\Gamma}$.

Partant de ce couple de générateurs, on construit sur la demi-droite, selon le §1.3.4, des AMR biorthogonales $V_j(]0, \infty[)$ et $\tilde{V}_j(]0, \infty[)$ munies des bases de fonctions d'échelle

$$\Phi_{j,]0, \infty[} = \{\varphi_{j,k}, k \in \mathbb{N}\} \text{ et } \tilde{\Phi}_{j,]0, \infty[} = \{\tilde{\varphi}_{j,k}, k \in \mathbb{N}\}$$

supposées vérifier (au bord 0 ici) les propriétés de la proposition 1.9. En particulier on a $\varphi_{j,k}(0) = c_0 2^{j/2} \delta_{0,k}$ et les bases biorthogonales

$$\Phi_{j,]0, \infty[}^0 = \{\varphi_{j,k}, k \in \mathbb{N}^+\} \text{ et } \tilde{\Phi}_{j,]0, \infty[}^0 = \{\tilde{\varphi}_{j,k}, k \in \mathbb{N}^+\}$$

engendrent les AMR $V_j^0(]0, \infty[)$ et $\tilde{V}_j^0(]0, \infty[)$. On notera

$$\Psi_{j,]0, \infty[}^0$$

une base d'ondelettes de l'espace

$$W_j^0([0, \infty[) = V_{j+1}^0([0, \infty[) \cap (\tilde{V}_j^0([0, \infty[))^\perp$$

et $P_{j,0,\infty[}^0$ le projecteur biorthogonal associé.

Par produit tensoriel on définit l'AMR $V_j(\Omega) := V_j([0, \infty[) \otimes V_j(\mathbb{R})$ et le projecteur biorthogonal $P_{j,\Omega}^0 := P_{j,0,\infty[}^0 \otimes P_{j,\mathbb{R}}$ sur $V_j^0(\Omega)$. On vérifie facilement que dans ce cas, le projecteur $P_{j,\Omega}^*$ de la proposition 2.3 est aussi un produit tensoriel

$$P_{j,\Omega}^* = P_{j,0,\infty[}^* \otimes P_{j,\mathbb{R}} \quad (2.51)$$

où $P_{j,0,\infty[}^*$ est le projecteur biorthogonal sur $V_j([0, \infty[)$

$$P_{j,0,\infty[}^* u = \frac{1}{c_0} 2^{j/2} u(0) \varphi_{j,0} + \sum_{k \in \mathbb{N}^+} \langle u, \tilde{\varphi}_{j,k} \rangle \varphi_{j,k}. \quad (2.52)$$

Du fait de cette interpolation en 0, l'espace d'ondelettes associé à ce dernier projecteur n'est autre que $W_j^0([0, \infty[)$ d'où l'on déduit par produit tensoriel

$$W_j^*(\Omega) = V_j([0, \infty[) \otimes W_j(\mathbb{R}) \oplus W_j^0([0, \infty[) \otimes V_j(\mathbb{R}) \oplus W_j^0([0, \infty[) \otimes W_j(\mathbb{R})$$

et

$$\Psi_{j,\Omega}^* = \Phi_{j,0,\infty[} \otimes \Psi_{j,\mathbb{R}} \cup \Psi_{j,0,\infty[}^0 \otimes \Phi_{j,\mathbb{R}} \cup \Psi_{j,0,\infty[}^0 \otimes \Psi_{j,\mathbb{R}}.$$

On en déduit que l'opérateur de relèvement \mathcal{R} consiste simplement à relever les ondelettes $\psi_{j,k}$ sur \mathbb{R} à l'aide de la fonction d'échelle $\varphi_{j,0}$ de même échelle j :

$$\mathcal{R}(g) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{c_0} \langle g, \tilde{\phi}_{0,0} \rangle \varphi_{0,0} \otimes \phi_{0,k} + \sum_{j \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}} \frac{1}{c_0} \langle g, \tilde{\psi}_{j,k} \rangle \varphi_{j,0} \otimes \psi_{j,k}.$$

Ceci qui traduit bien sa nature multiéchelle.

Remarque 2.2 *Le fait que la fonction d'échelle de relèvement $\varphi_{j,0}$ soit orthogonale à $\tilde{V}_j^0([0, \infty[)$ apparaît inutile dans ce contexte. On peut en effet s'en passer, quitte à renoncer au cadre de la définition (2.28) du projecteur $P_{j,\Omega}^*$. Dans ce cas on suppose seulement*

$$\varphi_{j,k}(0) = c_0 2^{j/2} \delta_{0,k}, \quad k \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \langle \Phi_{j,0,\infty[}^0, \tilde{\Phi}_{j,0,\infty[}^0 \rangle = I_{\mathbb{N}^+}.$$

On conserve alors les définitions 2.52 et 2.51 du projecteur $P_{j,\Omega}^$. et on vérifie facilement que l'on a toujours*

$$\begin{cases} P_{j,\mathbb{R}} \circ \gamma = \gamma \circ P_{j,\Omega}^* \\ P_{j,\Omega}^*|_{V_{j+1}^0(\Omega)} = P_{j,\Omega}^0|_{V_{j+1}^0(\Omega)} \end{cases}$$

qui sont les propriétés essentielles à la construction du relèvement stable \mathcal{R} . En revanche $P_{j,\Omega}^$ ne coïncide avec la définition (2.28) que si la fonction d'échelle $\varphi_{j,0}$ est orthogonale à $\tilde{V}_j^0([0, \infty[)$.*

Remarque 2.3 Les estimations directes pour les projecteurs $P_{j,\mathbb{R}}$ et $P_{j,\Omega}^*$ et inverses pour les espaces $V_j(\mathbb{R})$ et $V_j(\Omega)$, sont ici élémentaires. Notons que du fait de la nature tensorielle des fonctions de base et du domaine, les estimations directes et inverses sur le bord Γ sont obtenues respectivement sur les intervalles

$$0 < s \leq n \text{ et } 0 < s < \tau(p)$$

où $\tau(p)$ est la régularité $W^{s,p}(\mathbb{R})$ du générateur ϕ et non sur

$$0 < s < n - 1/p \text{ et } 0 < s < \tau(p) - 1/p$$

comme c'est le cas des propositions 2.4 et 2.5.

Remarque 2.4 Pour $p \in [1, \infty]$ tel que $\tilde{\phi} \in L^{p'}$, le relèvement \mathcal{R} vérifie en fait la propriété de stabilité

$$\|\mathcal{R}(g)\|_{B_{p,q}^{s+1/p}(\Omega)} \lesssim \|g\|_{B_{p,q}^s(\mathbb{R})}$$

sur l'intervalle $-\min(\tilde{\tau}(p'), \tilde{n}) < s < \min(\tau(p), n) - 1/p$ où $\tilde{\tau}(p')$ désigne la régularité $W^{s,p}(\mathbb{R})$ du générateur $\tilde{\phi}$ et où l'espace $B_{p,q}^t(\Omega)$ pour $t < 0$ est par convention égal à $B_{p',q'}^{-t}(\Omega)'$. Ceci découle du fait que les ondelettes utilisées pour le relèvement sont aussi associées à la décomposition multiéchelle induite par le projecteur biorthogonal

$$P_{j,\Omega} := P_{j,]0,\infty[} \otimes P_{j,\mathbb{R}} \text{ où } P_{j,]0,\infty[} = \langle \cdot, \tilde{\Phi}_{j,]0,\infty[} \rangle^T \Phi_{j,]0,\infty[},$$

stable dans $B_{p,q}^s(\Omega)$ pour $-\min(\tilde{\tau}(p'), \tilde{n}) < s < \min(\tau(p), n)$.

Première construction sur $\Omega =]0, 1]^2$

Partant des générateurs sur \mathbb{R} ($\phi, \tilde{\phi}$) du paragraphe précédent, on construit cette fois sur l'intervalle $]0, 1[$ les AMR biorthogonales $V_j(]0, 1[)$ et $\tilde{V}_j(]0, 1[)$ et les espaces d'ondelettes $W_j(]0, 1[)$ et $\tilde{W}_j(]0, 1[)$ que l'on suppose vérifier les propriétés des propositions 1.9 et 1.10. On notera

$$\begin{cases} \Phi_{j,]0,1[} = \{\varphi_{j,k}, k = 0, \dots, d_j\} \\ \tilde{\Phi}_{j,]0,1[} = \{\tilde{\varphi}_{j,k}, k = 0, \dots, d_j\} \end{cases}$$

les bases biorthogonales (1.101) de $V_j(]0, 1[)$ et $\tilde{V}_j(]0, 1[)$ et

$$\begin{cases} \Phi_{j,]0,1[}^0 = \{\varphi_{j,k}, k = 1, \dots, d_j - 1\} \\ \tilde{\Phi}_{j,]0,1[}^0 = \{\tilde{\varphi}_{j,k}, k = 1, \dots, d_j - 1\} \end{cases}$$

les bases biorthogonales (1.102) de $V_j^0(]0, 1[)$ et $\tilde{V}_j^0(]0, 1[)$. Les projecteurs biorthogonaux associées sont notés $P_{j,]0,1[}$ et $P_{j,]0,1[}^0$. De même les bases d'ondelettes biorthogonales (1.105) des espaces $W_j(]0, 1[)$ et $\tilde{W}_j(]0, 1[)$ et (1.106) des espaces

$$\begin{cases} W_j^0(]0, 1[) = V_{j+1}^0(]0, 1[) \cap \tilde{V}_j^0(]0, 1[)^\perp \\ \tilde{W}_j^0(]0, 1[) = \tilde{V}_{j+1}^0(]0, 1[) \cap V_j^0(]0, 1[)^\perp \end{cases}$$

sont notées $\Psi_{j,]0,1[}$, $\tilde{\Psi}_{j,]0,1[}$, $\Psi_{j,]0,1[}^0$ et $\tilde{\Psi}_{j,]0,1[}^0$.

Tout comme pour le domaine $]0, \infty[\times \mathbb{R}$, on définit par produit tensoriel les AMR

$$V_j(\Omega) = V_j(]0, 1[) \otimes V_j(]0, 1[) \quad \text{et} \quad V_j^0(\Omega) = V_j^0(]0, 1[) \otimes V_j^0(]0, 1[)$$

et le projecteur biorthogonal sur $V_j^0(\Omega)$

$$P_{j,\Omega}^0 = P_{j,]0,1[}^0 \otimes P_{j,]0,1[}^0.$$

Posant $\Gamma := \partial\Omega$, la difficulté nouvelle réside dans la définition du projecteur biorthogonal $P_{j,\Gamma}$ sur $V_j(\Gamma)$. Pour cette première construction on va simplement interpoler aux coins du domaine de façon à conserver la nature tensorielle du projecteur $P_{j,\Omega}^*$. Ce choix n'est pas optimal en terme de stabilité et fera l'objet d'une stabilisation lors de la deuxième construction.

On définit par prolongement de l'exemple précédent le projecteur biorthogonal sur $V_j(]0, 1[)$

$$P_{j,]0,1[}^* u = \frac{1}{c_0} 2^{j/2} u(0) \varphi_{j,0} + \sum_{k=1}^{d_j-1} \langle u, \tilde{\varphi}_{j,k} \rangle \varphi_{j,k} + \frac{1}{c_1} 2^{j/2} u(1) \varphi_{j,d_j}, \quad (2.53)$$

où $\varphi_{j,0}(0) = 2^{j/2} c_0$ et $\varphi_{j,d_j}(1) = 2^{j/2} c_1$. On obtient par tensorisation le projecteur biorthogonal sur $V_j(\Omega)$

$$P_{j,\Omega}^* = P_{j,]0,1[}^* \otimes P_{j,]0,1[}^*. \quad (2.54)$$

Il est facile de vérifier que l'opérateur

$$P_{j,\Gamma} := \gamma \circ P_{j,\Omega}^* \circ r \quad (2.55)$$

est indépendant du relèvement r et définit un projecteur biorthogonal sur

$$V_j(\Gamma) := \gamma V_j(\Omega).$$

D'autre part on a clairement

$$P_{j,\Omega}^* |_{V_{j+1}^0(\Omega)} = P_{j,\Omega}^0 |_{V_{j+1}^0(\Omega)}.$$

Les propriétés

$$\varphi_{j,0} \perp \tilde{V}_j^0(\Omega) \quad \text{et} \quad \varphi_{j,1} \perp \tilde{V}_j^0(\Omega) \quad (2.56)$$

de la proposition 1.9, assurent que les projecteurs $P_{j,\Omega}^*$ et $P_{j,\Gamma}$ s'inscrivent en fait dans le cadre de la définition (2.28). Néanmoins selon la remarque 2.2 on pourrait ici se passer des relations (2.56) en renonçant au cadre de la proposition 2.3.

Afin d'expliciter le projecteur $P_{j,\Gamma}$ on note \mathcal{C} l'ensemble des quatre coins

$$O = (0, 0), A = (1, 0), B = (0, 1), C = (1, 1)$$

et \mathcal{E} l'ensemble des quatre côtés. Les isométries affines de l'intervalle de référence OA sur les quatre côtés sont les transformations canoniques

$$\kappa_{OA} = \text{Id}, \kappa_{OB} = \text{Rot}_{O, \frac{\pi}{2}}, \kappa_{BC} = \text{Tr}_{\overrightarrow{OB}}, \kappa_{AC} = \text{Tr}_{\overrightarrow{OA}} \text{Rot}_{O, \frac{\pi}{2}}. \quad (2.57)$$

On définit ainsi les AMR biorthogonales "traces" sur le côté $e \in \mathcal{E}$

$$V_j(e) := \gamma_e V_j(\Omega) \text{ et } \tilde{V}_j(e)$$

engendrées par les bases biorthogonales (par rapport au produit scalaire sur e ici)

$$\begin{cases} \Phi_{j,e} = \{\varphi_{j,k}^e : = \varphi_{j,k} \circ \kappa_e^{-1}, k = 0, \dots, d_j\} \\ \tilde{\Phi}_{j,e} = \{\tilde{\varphi}_{j,k}^e : = \tilde{\varphi}_{j,k} \circ \kappa_e^{-1}, k = 0, \dots, d_j\}. \end{cases}$$

On notera $V_j^0(e), \tilde{V}_j^0(e)$ les AMR biorthogonales engendrées par les bases biorthogonales

$$\begin{cases} \Phi_{j,e}^0 = \{\varphi_{j,k}^e : = \varphi_{j,k} \circ \kappa_e^{-1}, k = 1, \dots, d_j - 1\} \\ \tilde{\Phi}_{j,e}^0 = \{\tilde{\varphi}_{j,k}^e : = \tilde{\varphi}_{j,k} \circ \kappa_e^{-1}, k = 1, \dots, d_j - 1\} \end{cases}$$

et

$$\Psi_{j,e}^0 = \Psi_{j,]0,1[}^0 \circ \kappa_e^{-1} \text{ et } \tilde{\Psi}_{j,e}^0 = \tilde{\Psi}_{j,]0,1[}^0 \circ \kappa_e^{-1}$$

les bases d'ondelettes associées.

Alors L'AMR trace $V_j(\Gamma)$ sur le bord Γ est engendrée par la base de fonctions d'échelle

$$\Phi_{j,\Gamma} := \bigcup_{e \in \mathcal{E}} \Phi_{j,e}^0 \cup \{\varphi_{j,c}, c \in \mathcal{C}\}$$

où

$$\begin{cases} \varphi_{j,O} : = 2^{-\frac{j}{2}} \gamma(\varphi_{j,0} \otimes \varphi_{j,0}), \\ \varphi_{j,A} : = 2^{-\frac{j}{2}} \gamma(\varphi_{j,d_j} \otimes \varphi_{j,0}), \\ \varphi_{j,B} : = 2^{-\frac{j}{2}} \gamma(\varphi_{j,0} \otimes \varphi_{j,d_j}), \\ \varphi_{j,C} : = 2^{-\frac{j}{2}} \gamma(\varphi_{j,d_j} \otimes \varphi_{j,d_j}). \end{cases}$$

On peut supposer ici par commodité d'écriture $\varphi_{j,0}(0) = \varphi_{j,d_j}(1) = 2^{j/2}$, quitte à renormaliser les fonctions d'échelle $\tilde{\varphi}_{j,0}$ et $\tilde{\varphi}_{j,d_j}$ qui ne jouent aucun rôle dans cette première construction.

Ces notations étant fixées, le projecteur biorthogonal $P_{j,\Gamma}$ (2.55) s'écrit simplement

$$P_{j,\Gamma} g = \sum_{c \in \mathcal{C}} 2^{-j/2} g(c) \varphi_{j,c} + \sum_{e \in \mathcal{E}} P_{j,e}^0 g|_e \quad (2.58)$$

et correspond au choix de la base biorthogonale interpolante aux quatre coins

$$\tilde{\Phi}_{j,\Gamma} := \bigcup_{e \in \mathcal{E}} \tilde{\Phi}_{j,e}^0 \cup \{2^{-j/2} \delta_c, c \in \mathcal{C}\}$$

où δ_c est la distribution de Dirac au coin c . Du fait de cette interpolation, la base d'ondelettes associée n'est autre que la réunion des bases sur chaque côté

$$\Psi_{j,\Gamma} := \bigcup_{e \in \mathcal{E}} \Psi_{j,e}^0, \quad (2.59)$$

ce qui va permettre une écriture très simple des opérateurs de relèvement \mathcal{R}_j . Il suffit d'écrire pour cela la base d'ondelette $\Psi_{j,\Omega}^*$ associée au projecteur $P_{j,\Omega}^*$ qui se décompose suivant la partition

$$\Psi_{j,\Omega}^* = \Psi_{j,\Omega}^0 \cup \Psi_{j,\Omega}^b \quad (2.60)$$

où

$$\Psi_{j,\Omega}^0 = \Phi_{j,]0,1[}^0 \otimes \Psi_{j,]0,1[}^0 \cup \Psi_{j,]0,1[}^0 \otimes \Phi_{j,]0,1[}^0 \cup \Psi_{j,]0,1[}^0 \otimes \Psi_{j,]0,1[}^0 \quad (2.61)$$

et

$$\Psi_{j,\Omega}^b := \bigcup_{\varepsilon=0,d_j} \left(\varphi_{j,\varepsilon} \otimes \Psi_{j,]0,1[}^0 \cup \Psi_{j,]0,1[}^0 \otimes \varphi_{j,\varepsilon} \right) \quad (2.62)$$

avec $2^{-j/2} \gamma \Psi_{j,\Omega}^b = \Psi_{j,\Gamma}$.

La stabilité du relèvement \mathcal{R} va dépendre des estimations inverses des espaces $V_j(\Omega)$ et $V_j(\Gamma)$ et des estimations directes des projecteurs $P_{j,\Omega}^*$ et $P_{j,\Gamma}$.

Les estimations inverses sur $V_j(\Omega)$ sont classiques (voir §1.3.5 et 1.4.1). Pour $V_j(\Gamma)$ il faut établir l'hypothèse de localité 2.1 par application du lemme 2.1. Pour cela il suffit de montrer la stabilité $L^p(\Gamma)$ de la base $\Phi_{j,\Gamma}$ par un argument d'indépendance linéaire locale rappelé à l'Appendice 4. Les estimations inverses sur $V_j(\Gamma)$ s'obtiennent alors par application de la proposition 2.4. Toutefois, comme sur le demi-plan, selon la remarque 2.3, la nature tensorielle des fonctions de base de $\Phi_{j,\Omega}$ permet en fait de ne pas se restreindre à $0 < s < \tau(p) - 1/p$ mais de couvrir l'intervalle $0 < s < \tau(p)$. La démonstration de ce résultat optimal utilise le théorème de relèvement des traces sur un domaine polygonal (voir Grisvard [60]). Elle est présentée dans l'Appendice 4.

Pour les estimations directes, on sort ici du cadre de l'analyse générale du §2.3.1 dans la mesure où le projecteur $P_{j,\Gamma}$ n'est pas stable dans L^p . Cependant l'obtention des estimations directes pour le projecteur $P_{j,\Omega}^*$ relève du folklore de la théorie de l'approximation et on réfère au §III de [26] pour une démonstration pour $p \in [1, \infty]$ et

$p \in]0, 1[$. En particulier, du fait de l'interpolation aux coins du carré, ces estimations sont obtenues dans $B_{p,p}^s$ pour $s > d/p$ avec ici $d = 2$ (i.e. pour $r = \infty$ dans la proposition 2.7).

Il suffit ensuite d'appliquer un argument similaire à celui de la preuve de la proposition 2.7 pour $r = \infty$ pour en déduire les estimations pour $P_{j,\Gamma}$. Comme pour les estimations inverses, selon la remarque 2.3, ces estimations ne sont pas optimales. On peut en effet les obtenir sur l'intervalle $1/p < s \leq n$ et non $1/p < s < n - 1/p$ en utilisant le théorème de relèvement des traces sur un domaine polygonal, du moins pour $p \in]1, \infty[$. La démonstration est détaillée dans l'Appendice 4.

On peut alors énoncer le théorème de stabilité du relèvement multiéchelle.

Théorème 2.5 *Pour $p \in]0, \infty]$, soit $\tau(p)$ la borne supérieure de la régularité $B_{p,p}^s$ du générateur (à support compact) $\phi \in C^0(\mathbb{R})$ et n son ordre d'approximation. On suppose en outre que $\check{\phi} \in L^1(\mathbb{R})$. Le relèvement \mathcal{R} induit par les bases d'ondelettes (2.59) et (2.62) vérifie la propriété de stabilité*

$$\|\mathcal{R}g\|_{B_{p,q}^{s+1/p}(\Omega)} \lesssim \|g\|_{B_{p,q}^s(\Gamma)}$$

pour tout $1/p < s < \min(\tau(p), n) - 1/p$.

Preuve. La base $\Psi_{j,\Gamma}$ est trivialement L^p stable dès que $\Psi_{j,]0,1[}^0$ l'est sur l'intervalle de référence, qui est un résultat classique. Pour $\Psi_{j,\Omega}^*$ on utilise un argument classique d'indépendance linéaire locale pour démontrer cette stabilité. Il suffit alors d'appliquer le théorème 2.4 avec ici $r = \infty$ pour s'assurer de l'injection de $B_{p,q}^{s+1/p}(\Omega)$ et $B_{p,q}^s(\Gamma)$ dans les fonctions continues. \square

Deuxième construction sur $\Omega =]0, 1]^2$

Avec le choix précédent du projecteur $P_{j,\Gamma}$ on n'obtient pas en particulier la stabilité du relèvement de $H^{1/2}(\Gamma)$ dans $H^1(\Omega)$, nécessaire à la résolution des problèmes elliptiques d'ordre 2.

Pour recouvrer cette stabilité il nous faut définir $P_{j,\Gamma}$ dans le cadre des techniques de décomposition de domaine du §1.4.3. Pour cela, il faut supposer les générateurs $(\phi, \check{\phi})$ soit symétriques soit orthogonaux (i.e. $\check{\phi} = \phi$). Par commodité d'écriture on opte plutôt pour la première hypothèse de sorte que les fonctions d'échelle et les ondelettes sur l'intervalle de référence possèdent les propriétés des propositions 1.9, 1.10 et de symétrie (1.123). Le générateur primal ϕ étant supposé continu, on notera alors

$$c_0 := 2^{-\frac{1}{2}}\varphi_{j,0}(0) = 2^{-\frac{1}{2}}\psi_{j,0}(0) = 2^{-\frac{1}{2}}\varphi_{j,d_j}(1) = 2^{-\frac{1}{2}}\psi_{j,2^j-1}(1).$$

En reprenant les notations du paragraphe précédent on définit l'AMR $V_j(\Gamma)$ trace de $V_j(\Omega)$, engendrée par la base de fonctions d'échelle

$$\Phi_{j,\Gamma} := \bigcup_{e \in \mathcal{E}} \Phi_{j,e}^0 \cup \{\varphi_{j,c}, c \in \mathcal{C}\}$$

où

$$\begin{cases} \varphi_{j,O} : = \frac{1}{\sqrt{2c_0}} 2^{-\frac{j}{2}} \gamma(\varphi_{j,0} \otimes \varphi_{j,0}), \\ \varphi_{j,A} : = \frac{1}{\sqrt{2c_0}} 2^{-\frac{j}{2}} \gamma(\varphi_{j,d_j} \otimes \varphi_{j,0}), \\ \varphi_{j,B} : = \frac{1}{\sqrt{2c_0}} 2^{-\frac{j}{2}} \gamma(\varphi_{j,0} \otimes \varphi_{j,d_j}), \\ \varphi_{j,C} : = \frac{1}{\sqrt{2c_0}} 2^{-\frac{j}{2}} \gamma(\varphi_{j,d_j} \otimes \varphi_{j,d_j}). \end{cases}$$

Selon les techniques du §1.4.3, une AMR biorthogonale $\tilde{V}_j(\Gamma)$ est engendrée par la base biorthogonale

$$\tilde{\Phi}_{j,\Gamma} : = \bigcup_{e \in \mathcal{E}} \tilde{\Phi}_{j,e}^0 \cup \{\tilde{\varphi}_{j,c}, c \in \mathcal{C}\}$$

où

$$\begin{cases} \tilde{\varphi}_{j,O} : = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{\varphi}_{j,0} \circ \kappa_{OA}^{-1} + \tilde{\varphi}_{j,0} \circ \kappa_{OB}^{-1}), \\ \tilde{\varphi}_{j,A} : = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{\varphi}_{j,d_j} \circ \kappa_{OA}^{-1} + \tilde{\varphi}_{j,0} \circ \kappa_{AC}^{-1}), \\ \tilde{\varphi}_{j,B} : = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{\varphi}_{j,0} \circ \kappa_{BC}^{-1} + \tilde{\varphi}_{j,d_j} \circ \kappa_{OB}^{-1}), \\ \tilde{\varphi}_{j,C} : = \frac{1}{\sqrt{2}}(\tilde{\varphi}_{j,d_j} \circ \kappa_{BC}^{-1} + \tilde{\varphi}_{j,d_j} \circ \kappa_{AC}^{-1}). \end{cases}$$

Elle coïncide rigoureusement avec l'AMR trace de $\tilde{V}_j(\Omega)$ pour un générateur dual $\tilde{\phi}$ continu. Dans ce cas particulier, contrairement au cadre de la décomposition de domaine du §1.4.3, la biorthogonalité est définie par rapport au produit scalaire sur Γ qui coïncide avec le produit scalaire (1.133).

Les ondelettes aux coins se construisent selon les techniques du §1.4.3 et l'on obtient la base d'ondelettes primale

$$\Psi_{j,\Gamma} : = \bigcup_{e \in \mathcal{E}} \{\psi_{j,k} \circ \kappa_e^{-1}, k = 1, \dots, 2^j - 2\} \cup \{\psi_{j,c}^1, \psi_{j,c}^2, c \in \mathcal{C}\}$$

où par exemple pour le coin O

$$\begin{cases} \psi_{j,O}^1 : = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_{j,0} \circ \kappa_{OA}^{-1} + \psi_{j,0} \circ \kappa_{OB}^{-1}), \\ \psi_{j,O}^2 : = \frac{1}{2}((\psi_{j,0} - \varphi_{j,0}) \circ \kappa_{OA}^{-1} - (\psi_{j,0} - \varphi_{j,0}) \circ \kappa_{OB}^{-1}). \end{cases}$$

La base biorthogonale $\tilde{\Psi}_{j,\Gamma}$ s'écrit de même avec les indices $\tilde{}$.

On applique alors le formalisme (2.28) pour définir le projecteur biorthogonal $P_{j,\Omega}^*$ sur $V_j(\Omega)$. Il s'agit de construire une base d'ondelettes $\Psi_{j,\Omega}^*$ associée à ce projecteur telle que

$$\Psi_{j,\Omega}^* = \Psi_{j,\Omega}^0 \cup \Psi_{j,\Omega}^b$$

où la base $\Psi_{j,\Omega}^0$ est donnée par (2.61) et $2^{-j/2} \gamma_D \Psi_{j,\Omega}^b = \Psi_{j,\Gamma}$.

Pour se faire on va utiliser une technique similaire à celle de la construction du §1.4.3 des ondelettes aux p-faces de la décomposition de domaine. Le point de départ est la base (2.60) du paragraphe précédent, notée ici

$$\Psi_{j,\Omega}^{*,\#} = \Psi_{j,\Omega}^0 \cup \Psi_{j,\Omega}^{b,\#}$$

qui engendre un espace complémentaire de $V_j(\Omega)$ dans $V_{j+1}(\Omega)$. Alors une base de $W_j^*(\Omega)$ est définie par la correction grossière

$$\Psi_{j,\Omega}^* = (I - P_{j,\Omega}^*)\Psi_{j,\Omega}^{*\sharp}$$

qui par la propriété (2.29) laisse invariante $\Psi_{j,\Omega}^0$. En outre la correction de $\Psi_{j,\Omega}^{b,\sharp}$ ne porte qu'aux quatre coins i.e. les sommets de la décomposition de domaine du bord Γ . Par exemple au coin O , il faut corriger les deux ondelettes

$$\begin{cases} \psi_{j,O}^{r1,\sharp} = (\psi_{j,0} - \varphi_{j,0}) \otimes \varphi_{j,0} \\ \psi_{j,O}^{r2,\sharp} = \varphi_{j,0} \otimes (\psi_{j,0} - \varphi_{j,0}). \end{cases}$$

La projection $P_{j,\Gamma}$ de la trace de ces ondelettes se réduit par exemple pour la première à

$$\langle \gamma \psi_{j,O}^{r1,\sharp}, \tilde{\varphi}_{j,O} \rangle \varphi_{j,O}$$

dont le relèvement "canonique" r_j s'écrit

$$r_j \circ \gamma \circ P_{j,\Gamma} \psi_{j,O}^{r1,\sharp} = -\frac{1}{2} \varphi_{j,0} \otimes \varphi_{j,0}.$$

Pour ce choix naturel de relèvement

$$P_{j,\Omega}^0(I - r_j \circ P_{j,\Gamma} \circ \gamma) \psi_{j,O}^{r1,\sharp} = 0$$

d'après les relations d'orthogonalité $\varphi_{j,0} \perp \tilde{V}_{j,0,1\Gamma}^0$ et $(\psi_{j,0} - \varphi_{j,0}) \perp \tilde{V}_{j,0,1\Gamma}^0$. La correction grossière par $P_{j,\Omega}^*$ se réduit donc à soustraire $r_j \circ P_{j,\Gamma} \circ \gamma$ et ainsi

$$\psi_{j,O}^{r1} = (I - r_j \circ P_{j,\Gamma} \circ \gamma) \psi_{j,O}^{r1,\sharp} = (\psi_{j,0} - \frac{1}{2} \varphi_{j,0}) \otimes \varphi_{j,0}. \quad (2.63)$$

On obtient de même pour la seconde ondelette au coin O

$$\psi_{j,O}^{r2} = \varphi_{j,0} \otimes (\psi_{j,0} - \frac{1}{2} \varphi_{j,0}). \quad (2.64)$$

En prenant les combinaisons $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ et $(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$ de ces ondelettes on aboutit aux deux ondelettes de relèvement au coin 0

$$\begin{cases} \psi_{j,O}^{r1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\psi_{j,0} \otimes \varphi_{j,0} + \varphi_{j,0} \otimes \psi_{j,0} - \varphi_{j,0} \otimes \varphi_{j,0} \right), \\ \psi_{j,O}^{r2} = \frac{1}{2} \left(\psi_{j,0} \otimes \varphi_{j,0} - \varphi_{j,0} \otimes \psi_{j,0} \right), \end{cases}$$

dont les traces sont égales à $c_0 2^{j/2} \psi_{j,O}^1$ et $c_0 2^{j/2} \psi_{j,O}^2$.

Cette construction explicite des ondelettes aux coins achève la construction du relèvement. Elle sera généralisée aux p-faces de la décomposition du bord Γ_D au

paragraphe suivant. Il faut maintenant analyser les propriétés de stabilité du relèvement ainsi construit.

Tout d'abord, il s'agit de montrer la stabilité L^p des bases d'ondelettes $\Psi_{j,\Gamma}$ et $\Psi_{j,\Omega}^*$. Pour la première, si $p \geq 1$, et $\tilde{\phi} \in L^{p'}$, c'est une conséquence facile de la biorthogonalité des bases à supports compacts $\Psi_{j,\Gamma}$ et $\tilde{\Psi}_{j,\Gamma}$. Pour $p < 1$, il faut à nouveau invoquer l'indépendance linéaire locale des ondelettes en choisissant un découpage ad-hoc de Γ , en particulier aux coins (voir Appendice 4).

Pour la base $\Psi_{j,\Omega}^*$ on utilise la même technique.

Il nous reste seulement à établir les estimations directes des projecteurs $P_{j,\Gamma}$ et $P_{j,\Omega}^*$.

Pour $p \geq 1$ et en supposant $\tilde{\phi} \in L^{p'}$, la stabilité L^p du projecteur est un lemme facile. On peut donc appliquer les résultats généraux des propositions 2.5 et 2.6. Tout comme précédemment, on peut toutefois obtenir les estimations du projecteur $P_{j,\Gamma}$ sur l'intervalle $0 \leq s \leq n$ en tenant compte de la nature tensorielle du domaine et des fonctions d'échelle (voir Appendice 4).

Pour $p < 1$ il faut établir, selon les techniques du §III de [26], les estimations d'erreur pour le projecteur $P_{j,\Omega}^*$ qui est local et reproduit les polynômes de \mathbb{P}_{n-1} . Noter qu'il est défini par la base biorthogonale de $\Phi_{j,\Omega}$ suivante

$$\tilde{\Phi}_{j,\Omega}^* = \begin{cases} \tilde{\Phi}_j^0 \otimes \tilde{\Phi}_j^0 \cup_{\varepsilon=0,1} \{ \frac{1}{c_0} 2^{-\frac{j}{2}} \delta_\varepsilon \otimes \tilde{\varphi}_{j,k}, \frac{1}{c_0} 2^{-\frac{j}{2}} \tilde{\varphi}_{j,k} \otimes \delta_\varepsilon, k = 1, \dots, d_j - 1 \} \\ \cup_{\varepsilon,\varepsilon'=0,1} \{ \frac{1}{2c_0} 2^{-\frac{j}{2}} (\delta_\varepsilon \otimes \tilde{\varphi}_{j,(\varepsilon')} + \tilde{\varphi}_{j,(\varepsilon)} \otimes \delta_{\varepsilon'}) \}, \end{cases}$$

où par convention $(0) = 0$ et $(1) = d_j$. On applique ensuite la proposition 2.7 au projecteur $P_{j,\Gamma}$.

Tout compte fait on obtient le théorème de stabilité du relèvement multiéchelle par application directe des théorèmes 2.3 et 2.4.

Théorème 2.6 *Soit $p \in [1, \infty]$ tel que $\tilde{\phi} \in L^{p'}$. Avec les notations du théorème 2.5, le relèvement \mathcal{R} vérifie la propriété de stabilité*

$$\|\mathcal{R}g\|_{B_{p,q}^{s+1/p}(\Omega)} \lesssim \|g\|_{B_{p,q}^s(\Gamma)}$$

pour tout $0 < s < \min(\tau(p), n) - 1/p$.

Soit $p \in]0, 1[$ et $r \in [1, \infty]$ tel que $\tilde{\phi} \in L^{r'}$, alors le relèvement \mathcal{R} est stable pour

$$(d-1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right) < s < \min(\tau(p), n) - 1/p.$$

Un choix spécifique des ondelettes de relèvement aux coins permet d'obtenir une stabilité accrue du relèvement tout comme dans la remarque 2.4.

Soit $\tilde{V}_j(\Omega) := \tilde{V}_j(]0, 1[) \otimes \tilde{V}_j(]0, 1[)$ l'AMR duale usuelle de $V_j(\Omega)$ et $W_j(\Omega)$ l'espace d'ondelettes associée engendré par la base canonique

$$\Psi_{j,\Omega} = \Psi_{j,]0,1[} \otimes \Phi_{j,]0,1[} \cup \Phi_{j,]0,1[} \otimes \Psi_{j,]0,1[} \cup \Psi_{j,]0,1[} \otimes \Psi_{j,]0,1[}.$$

On a alors le lemme suivant

Lemme 2.2 *Soit $w_j \in W_j(\Omega)$, alors $w_j \in W_j^*(\Omega)$ si et seulement si $\gamma w_j \in W_j(\Gamma)$.*

Preuve. La condition est bien sûr nécessaire, montrons qu'elle est aussi suffisante. Comme $\gamma w_j \in V_{j+1}(\Gamma)$, elle est équivalente à $P_{j,\Gamma} \circ \gamma w_j = 0$ et on a donc

$$P_{j,\Omega}^* w_j = P_{j,\Omega}^0 w_j$$

qui est nul d'après la propriété des AMR $\tilde{V}_j^0(\Omega) \subset \tilde{V}_j(\Omega)$. □

Ainsi, si l'on peut prouver que $W_j(\Gamma) \subset \gamma W_j(\Omega)$, on va pouvoir choisir les ondelettes de relèvement dans $W_j(\Omega)$ et bénéficier de la stabilité de la base Ψ_Ω . Cette propriété est immédiate sauf pour les ondelettes de coins. Elle sera démontrée dans le cadre général de la décomposition de domaine avec raccord C^0 au paragraphe suivant. Ici on vérifie facilement (par exemple au coin O), que les ondelettes

$$\begin{cases} \psi_{j,O}^{r_1} = \frac{1}{\sqrt{2}} \psi_{j,0} \otimes \psi_{j,0}, \\ \psi_{j,O}^{r_2} = \frac{1}{2} (\psi_{j,0} \otimes \varphi_{j,0} - \varphi_{j,0} \otimes \psi_{j,0}), \end{cases} \quad (2.65)$$

sont dans $W_j(\Omega)$ et vérifient $\gamma \psi_{j,O}^{r_1} = c_0 2^{j/2} \psi_{j,O}^1$ et $\gamma \psi_{j,O}^{r_2} = c_0 2^{j/2} \psi_{j,O}^2$.

Théorème 2.7 *Soit $p, q \in [1, \infty]$ tel que $\check{\phi} \in L^{p'}$. Selon les notations de la remarque 2.4, pour le choix des ondelettes de relèvement aux coins (2.65), \mathcal{R} vérifie la propriété de stabilité*

$$\|\mathcal{R}g\|_{B_{p,q}^{s+1/p}(\Omega)} \lesssim \|g\|_{B_{p,q}^s(\Gamma)}$$

pour tout $-\min(\tilde{\tau}(p'), \tilde{n}) < s < \min(\tau(p), n) - 1/p$.

Preuve. C'est une conséquence directe de la stabilité des bases d'ondelettes Ψ_Γ en norme $B_{p,q}^s(\Gamma)$ et Ψ_Ω en norme $B_{p,q}^s(\Omega)$ pour $-\min(\tilde{\tau}(p'), \tilde{n}) < s < \min(\tau(p), n)$. □

Remarque 2.5 *Dans le théorème précédent, la terminologie "relèvement" de $B_{p,q}^{s+1/p}(\Omega)$ dans $B_{p,q}^s(\Gamma)$ pour $s \leq 0$ est bien sûr un abus de langage dans la mesure où l'opérateur trace n'est pas défini pour ces valeurs de s .*

Quelques résultats numériques

On considère pour ces illustrations numériques la première construction sur le carré. Dans ce cas le projecteur biorthogonal $P_{j,\Omega}^*$ (2.54) a la propriété remarquable d'être un produit tensoriel. On va en conséquence pouvoir définir un relèvement "anisotrope", de façon à pouvoir prolonger les exemples du §2.2.2 dans le cas de conditions aux limites de Dirichlet non homogènes.

La base d'ondelettes $\Psi_{]0,1[}^*$ sur l'intervalle $]0, 1[$ associée au projecteur biorthogonal $P_{j,]0,1[}^*$ s'écrit simplement du fait de l'interpolation aux extrémités 0 et 1

$$\Psi_{]0,1[}^* = \Phi_{j_0,]0,1[} \cup \bigcup_{j \geq j_0} \Psi_{j,]0,1[}^0.$$

On en déduit la base anisotrope associée à $P_{j,\Omega}^*$ par produit tensoriel

$$\Psi_{\Omega}^{*,a} := \Psi_{]0,1[}^* \otimes \Psi_{]0,1[}^*.$$

Cette base se décompose comme dans le cas isotrope en

$$\Psi_{\Omega}^{*,a} := \Psi_{\Omega}^{0,a} \cup \Psi_{\Omega}^{b,a}$$

où $\Psi_{\Omega}^{0,a}$ est la base anisotrope associée au projecteur $P_{j,\Omega}^0$ i.e. le produit tensoriel de la base d'ondelettes monodimensionnelle

$$\Psi_{]0,1[}^0 = \Phi_{j_0,]0,1[}^0 \cup \bigcup_{j \geq j_0} \Psi_{j,]0,1[}^0.$$

Les ondelettes restantes

$$\Psi_{\Omega}^{b,a} = \left(\bigcup_{\varepsilon=0,d_j} (\varphi_{j_0,\varepsilon} \otimes \Psi_{]0,1[}^0 \cup \Psi_{]0,1[}^0 \otimes \varphi_{j_0,\varepsilon}) \right) \cup \left(\bigcup_{\varepsilon,\varepsilon'=0,d_j} \varphi_{j_0,\varepsilon} \otimes \varphi_{j_0,\varepsilon'} \right)$$

sont en bijection avec la base $\Psi_{j,\Gamma}$ (2.59) par l'opérateur trace. Cette bijection définit formellement un opérateur de relèvement anisotrope. Contrairement au relèvement isotrope on voit que les ondelettes du bord sont ici relevées par les fonctions d'échelle $\varphi_{j_0,0}$ et φ_{j_0,d_j} au niveau grossier, indépendamment du niveau de l'ondelette de bord. Cet opérateur n'est défini rigoureusement qu'au niveau discret dans la mesure où la base $\Psi_{]0,1[}^*$ est instable dans $L^2(]0, 1[)$ et donc la base anisotrope $\Psi_{\Omega}^{*,a}$ instable dans les espaces de Sobolev $H^s(\Omega)$ (cf §1.4.1). Cela suffit cependant pour la résolution numérique des problèmes du second ordre.

La figure 2.15 représente le relèvement isotrope et anisotrope dans le cas d'une trace discontinue. Ils sont construits en utilisant les générateurs sur \mathbb{R} ($\tilde{\phi}^{1,5}, \tilde{\psi}^{1,5}$). On voit clairement que le relèvement isotrope lisse la discontinuité du bord.

Les figures 2.16 et 2.17 illustrent les expériences numériques de l'algorithme adaptatif du §2.2.2 pour le laplacien où l'on a incorporé les conditions aux limites

de Dirichlet. La base d'ondelette $\Psi_{j,\Omega}^0$ retenue étant la base anisotrope, on utilise le relèvement anisotrope précédent. La donnée de Dirichlet g est tout d'abord comprimée dans la base Ψ_Γ par simple troncature des coefficients d'ondelettes calculés au niveau maximum J , puis cette compression est relevée définitivement. Le reste de l'algorithme est en tout point identique à celui du §2.2.2, les sous ensembles d'ondelettes de la base homogène $\Psi_{j,\Omega}^0$ étant raffinés ou déraffinés par troncatures.

On vérifie sur les figures 2.16 et 2.17 que l'optimalité de l'algorithme adaptatif est préservée au sens où l'on obtient le même comportement asymptotique que la meilleure approximation non linéaire.

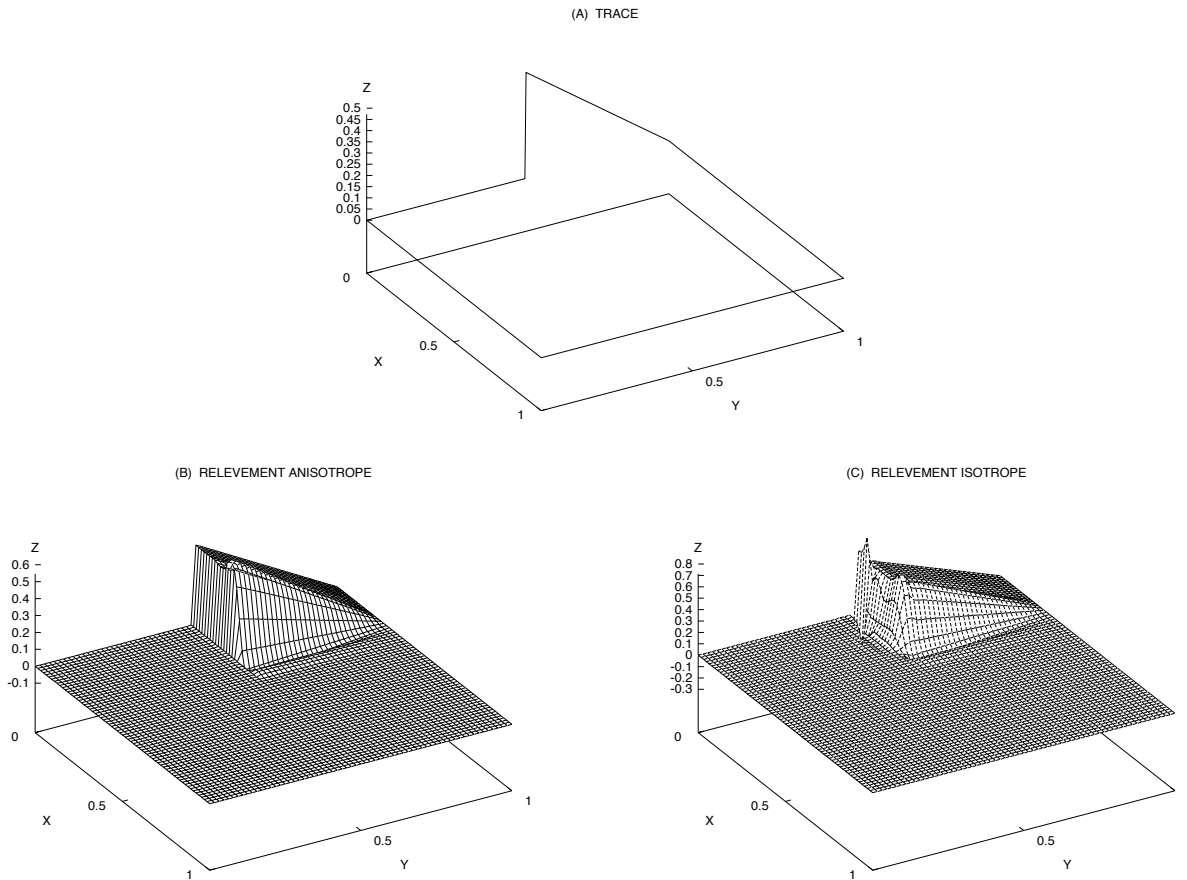


FIG. 2.15 – (A) trace discontinue, (B) relèvement anisotrope et (C) relèvement isotrope (tronqués au niveau $J = 8$), pour les générateurs sur \mathbb{R} ($\tilde{\phi}^{1,5}, \tilde{\psi}^{1,5}$).

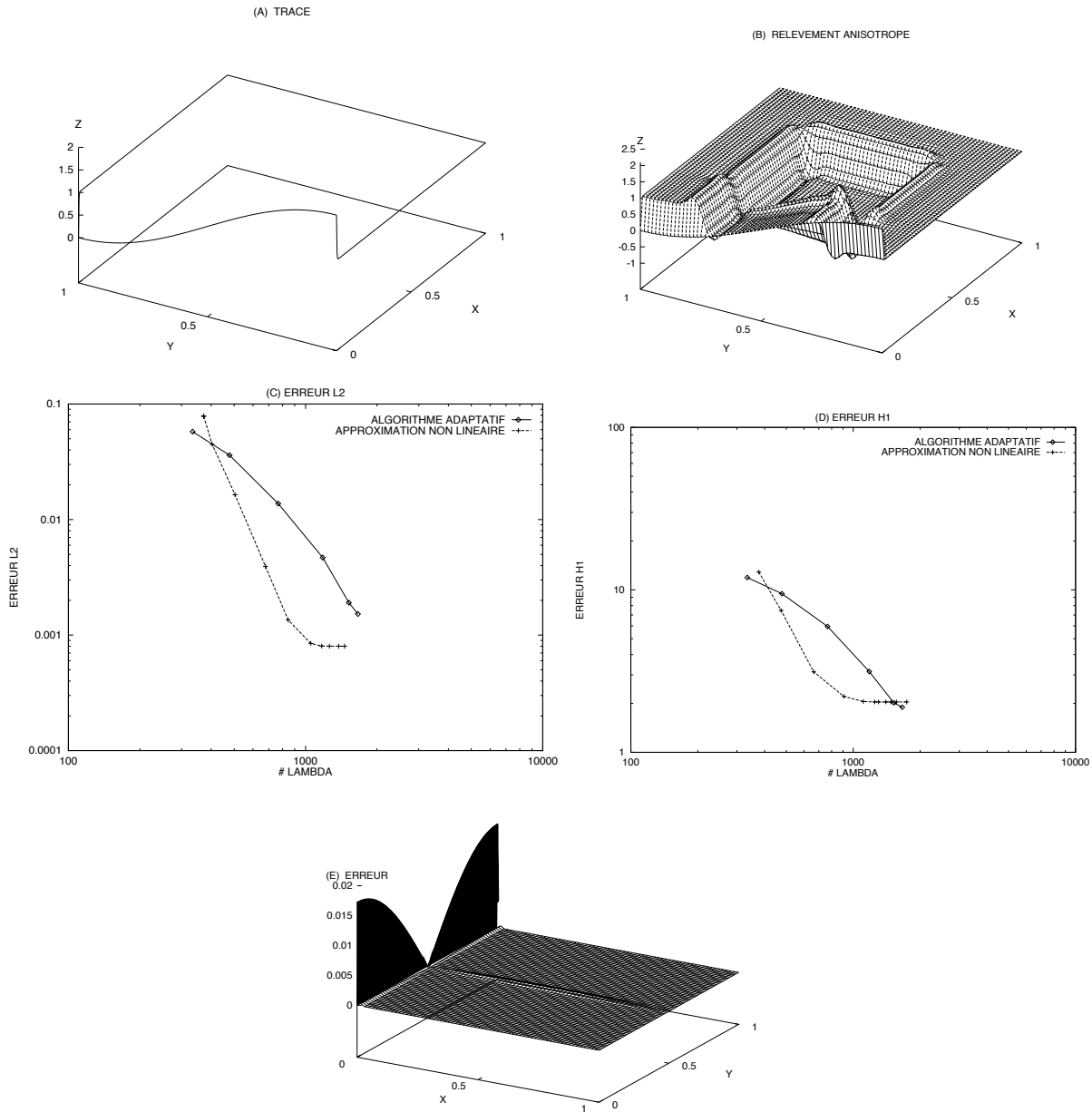


FIG. 2.16 - Pour la solution exacte $u = e^{-5000(y-\frac{1}{2})^2} \sin(\pi x) \sin(\pi y) + e^{-500x} \cos(\pi x) \cos(\pi y) + 1$ de $-\Delta u = f$, $\gamma u = g$: (A) projection $P_{\Sigma, \Gamma} g$ où Σ est défini par la troncature $\varepsilon = 110^{-4}$ et le niveau maximum $J = 8$ engendrant 116 ondelettes de bord. (B) relèvement anisotrope de $P_{\Sigma, \Gamma} g$. (C) et (D) erreurs de projections L^2 (resp. H^1) avec les $N = \#\Lambda$ plus grands coefficients de $P_{\Sigma, \Omega} u$ en base anisotrope, normalisés en norme L^2 (resp. H^1) et erreurs L^2 (resp. H^1) de l'algorithme adaptatif sur les ensembles d'ondelettes successifs. (E) erreur de projection sur $V_8 \otimes V_8$.

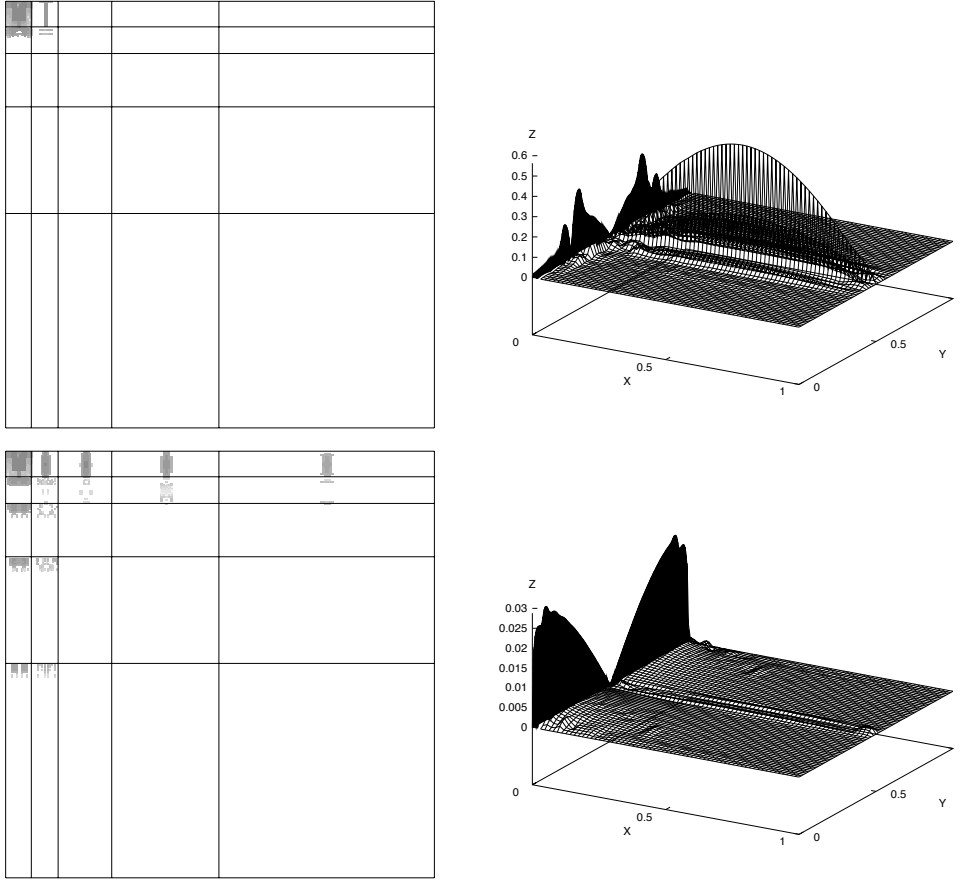


FIG. 2.17 – Pour la solution exacte $u = e^{-5000(y-\frac{1}{2})^2} \sin(\pi x) \sin(\pi y) + e^{-500x} \cos(\pi x) \cos(\pi y) + 1$ de $-\Delta u = f$, $\gamma u = g$: premier et dernier ensembles d'ondelettes Λ_0^0 , Λ_5^0 et erreurs de la projection de Galerkin associées. Le niveau maximum est fixé $J = 8$.

2.3.3 Construction par décomposition de domaine

On reprend les hypothèses et les notations de la décomposition de domaine avec raccord C^0 du §1.4.3 pour des générateurs $(\phi, \tilde{\phi})$ sur \mathbb{R} symétriques. On supposera le générateur primal ϕ continu ou plus précisément la borne supérieure de sa régularité $W^{s,p}$, $\tau(p) > 1/p$ pour un p donné dans $[1, \infty]$. La dimension d est au moins égale à 2 et la frontière Γ_D non vide, car dans le cas contraire le problème devient trivial.

La construction du §1.4.3 nous permet de définir explicitement les AMR biorthogonales “sans conditions aux limites”

$$\begin{cases} V_j(\Omega) = S(\Phi_{j,\Omega}) \\ \tilde{V}_j(\Omega) = S(\tilde{\Phi}_{j,\Omega}), \end{cases}$$

le projecteur biorthogonal $P_{j,\Omega}$ et les bases d'ondelettes biorthogonales

$$\Psi_{j,\Omega}, \tilde{\Psi}_{j,\Omega}.$$

D'autre part on sait aussi construire les AMR avec conditions aux limites homogènes de Dirichlet sur Γ_D (pour l'AMR primale, l'AMR duale étant définie symétriquement)

$$\begin{cases} V_j^0(\Omega) := V_j(\Omega) \cap C_D^0(\Omega) = S(\Phi_{j,\Omega}^0) \\ \tilde{V}_j^0(\Omega) = S(\tilde{\Phi}_{j,\Omega}^0), \end{cases}$$

où $C_D^0(\Omega)$ désigne l'espace des fonctions continues nulles sur Γ_D . Le projecteur biorthogonal associé est noté $P_{j,\Omega}^0$ et les bases d'ondelettes biorthogonales

$$\Psi_{j,\Omega}^0, \tilde{\Psi}_{j,\Omega}^0.$$

La décomposition de domaine $(\Omega_i, \kappa_i)_{i=1,\dots,N}$ de Ω induit par restriction une décomposition de domaine de la frontière Γ_D .

Soit $\Gamma_{i,l}$ les $(d-1)$ -faces de $\Omega_i \cap \Gamma_D$ images de $\hat{\sigma}_l$ par le difféomorphisme κ_i . On définit les isométries affines canoniques ρ_k de la $(d-1)$ -face de référence $\hat{I} =]0, 1[^{d-1} \times \{0\}$ sur les $(d-1)$ -faces $\hat{\sigma}_k$ du domaine de référence $\hat{\Omega} =]0, 1[^d$ (voir l'exemple 2.57 en dimension $d = 2$). Alors les sous domaines $\Gamma_{i,l}$ et les transformations

$$\kappa_i \circ \rho_l : \hat{I} \rightarrow \Gamma_{i,l}$$

définissent une décomposition de domaine C^0 conforme de la frontière Γ_D que l'on notera

$$(\xi_i, \Gamma_i)_{i=1,\dots,N_D}.$$

On vérifie en effet facilement la propriété (1.122). Pour toute p -face commune aux sous domaines $\Gamma_{i,l}$ et $\Gamma_{i',l'}$ image de $\hat{\sigma}$ par $\kappa_i \circ \rho_l$ et de $\hat{\sigma}'$ par $\kappa_{i'} \circ \rho_{l'}$, alors

$$(\kappa_i \circ \rho_l)^{-1} \circ (\kappa_{i'} \circ \rho_{l'}) = \rho_l^{-1} \circ (\kappa_i^{-1} \circ \kappa_{i'}) \circ \rho_{l'}$$

est une isométrie affine de $\hat{\sigma}'$ dans $\hat{\sigma}$.

En revanche, un raccord géométrique d'ordre supérieur C^m , $m \geq 1$ de la décomposition du domaine n'implique pas un tel raccord géométrique sur la décomposition de la frontière Γ_D du fait de la présence éventuelle de coins.

On peut donc construire, en appliquant à nouveau les techniques du §1.4.3 à cette décomposition de Γ_D et pour les générateurs $(\phi, \tilde{\phi})$, les AMR biorthogonales

$$\begin{cases} V_j(\Gamma_D) = S(\Phi_{j,\Gamma_D}) \\ \tilde{V}_j(\Gamma_D) = S(\tilde{\Phi}_{j,\Gamma_D}), \end{cases}$$

le projecteur biorthogonal P_{j,Γ_D} et les bases d'ondelettes biorthogonales

$$\Psi_{j,\Gamma_D}, \tilde{\Psi}_{j,\Gamma_D}.$$

Ces AMR coïncident bien sûr avec les AMR "traces" définies du moins rigoureusement lorsque les générateurs ϕ et $\tilde{\phi}$ sont continus. L'avantage de cette définition est

en outre de démontrer la biorthogonalité et la régularité $W^{s,p}(\Gamma_D)$ des AMR dont la borne supérieure est égale (dans le cas général) pour l'AMR primale à

$$\min(\tau(p), 1 + \frac{1}{p})$$

et non pas seulement à $\min(\tau(p) - \frac{1}{p}, 1)$ comme l'indiquerait une application directe du théorème de trace. Ce dernier résultat résulterait aussi du théorème de relèvement sur les domaines à coins de [60] (voir l'exemple du carré en Appendice 4).

L'étape suivante consiste à appliquer le formalisme général du §2.3.1 en définissant le projecteur biorthogonal sur $V_j(\Omega)$

$$P_{j,\Omega}^* := P_{j,\Omega}^0 \left(I - r_j \circ P_{j,\Gamma_D} \circ \gamma_D(u) \right) + r_j \circ P_{j,\Gamma_D} \circ \gamma_D.$$

On a alors le lemme suivant

Lemme 2.3 *L'hypothèse de localité 2.1 du couple $(V_j(\Omega), \Gamma_D)$ est vérifiée pour tout $p \in]0, \infty]$.*

Preuve. C'est une application directe du lemme 2.1 et de la stabilité L^p des bases $\Phi_{j,\Omega}$ et Φ_{j,Γ_D} pour tout $p \in]0, \infty]$, le générateur ϕ étant supposé continu. \square

On rappelle d'autre part, d'après le §1.4.3, que les projecteurs P_{j,Γ_D} sont uniformément stables dans L^p pour tout $p \in [1, \infty]$ tel que $\tilde{\phi} \in L^{p'}$ (cf lemme 1.4). De même les estimations inverses pour $V_j(\Omega)$ et directes pour $P_{j,\Omega}$ font l'objet au §1.4.3 des propositions 1.16 et 1.17. Il ressort alors du cadre général du §2.3.1 la proposition suivante.

Proposition 2.9 *Soit $p \in]0, \infty]$, on a les estimations inverses*

$$\|g_j\|_{B_{p,p}^s(\Gamma_D)} \lesssim 2^{js} \|g_j\|_{L^p(\Gamma_D)}, \quad \forall g_j \in V_j(\Gamma_D)$$

pour tout $0 < s < \min(\tau(p) - 1/p, 1)$.

Soit $p \in [1, \infty]$ tel que $\tilde{\phi} \in L^{p'}$, on a les estimations directes

$$\|g - P_{j,\Gamma_D} g\|_{L^p(\Gamma_D)} \lesssim 2^{-js} \|g\|_{B_{p,p}^s(\Gamma_D)}$$

pour tout $0 < s < n - 1/p$ et

$$\|u - P_{j,\Omega}^* u\|_{L^p(\Omega)} \lesssim 2^{-js} \|u\|_{B_{p,p}^s(\Omega)}$$

pour tout $1/p < s < n$.

Preuve. C'est une conséquence immédiate de la proposition 2.4 et des propositions 2.5 et 2.6. \square

Pour $p \in]0, 1[$ il nous faut appliquer la proposition 2.7 et donc démontrer au préalable les estimations d'erreur pour $P_{j,\Omega}^*$ en utilisant les techniques du §III de [26].

Pour définir explicitement le relèvement multiéchelle, il nous reste maintenant à construire une base d'ondelette $\Psi_{j,\Omega}^*$ uniformément stable dans L^p telle que l'on ait la partition

$$\Psi_{j,\Omega}^* = \Psi_{j,\Omega}^0 \cup \Psi_{j,\Omega}^b$$

et que l'opérateur trace $2^{-j/2}\gamma_D$ définisse une bijection de $\Psi_{j,\Omega}^b$ dans Ψ_{j,Γ_D} .

Pour cela on va légèrement modifier la technique de construction des ondelettes aux interfaces du domaine présentée au §1.4.3: il faudra ici retrancher la projection $P_{j,\Omega}^*$ au lieu de $P_{j,\Omega}$ et tenir compte des interfaces supplémentaires introduits par la décomposition de la frontière Γ_D . On illustre à nouveau cette construction par l'exemple du domaine en L introduit au §1.4.3 avec ici $\Gamma_D = \Gamma$.

On commence par définir la hiérarchie des p -interfaces de la décomposition de domaine $(\Omega_i, \kappa_i)_{i=1,\dots,N}$ selon la définition 1.4. Ici cette décomposition est complétée par la hiérarchie des interfaces de la décomposition $(\Gamma_i, \xi_i)_{i=1,\dots,N_D}$ de la frontière Γ_D définie de même.

Etape 1. La base $\Phi_{j,\Omega}$ est décomposée en p blocs correspondant à la hiérarchie des interfaces du domaine pour la base $\Phi_{j,\Omega}^0$, $p = d, \dots, 0$ et de la frontière Γ_D , $p = d-1, \dots, 0$ pour les fonctions de base restantes notées $\Phi_{j,\Omega}^b$. Dans l'exemple du domaine en L on obtient

$$\Phi_{j,\Omega}^0 = \left\{ \begin{array}{l} \Phi_{j,I_1}^{D,D} \otimes \Phi_{j,I_4}^{D,D} \cup \Phi_{j,I_2}^{D,D} \otimes \Phi_{j,I_3}^{D,D} \cup \Phi_{j,I_2}^{D,D} \otimes \Phi_{j,I_4}^{D,D} \\ \cup (\varphi_{j,d_j}^{I_1} + \varphi_{j,0}^{I_2}) \otimes \Phi_{j,I_4}^{D,D} \cup \Phi_{j,I_2}^{D,D} \otimes (\varphi_{j,d_j}^{I_4} + \varphi_{j,0}^{I_3}). \end{array} \right. \quad (2.66)$$

et

$$\Phi_{j,\Omega}^b = \left\{ \begin{array}{l} \Phi_{j,I_1}^{D,D} \otimes \varphi_{j,0}^{I_4} \cup \Phi_{j,I_1}^{D,D} \otimes \varphi_{j,d_j}^{I_4} \cup \varphi_{j,0}^{I_1} \otimes \Phi_{j,I_4}^{D,D} \\ \cup \varphi_{j,0}^{I_2} \otimes \Phi_{j,I_3}^{D,D} \cup \varphi_{j,d_j}^{I_2} \otimes \Phi_{j,I_3}^{D,D} \cup \Phi_{j,I_2}^{D,D} \otimes \varphi_{j,d_j}^{I_3} \\ \cup \varphi_{j,d_j}^{I_2} \otimes \Phi_{j,I_4}^{D,D} \cup \Phi_{j,I_2}^{D,D} \otimes \varphi_{j,0}^{I_4} \\ \cup \varphi_{j,0}^{I_1} \otimes \varphi_{j,0}^{I_4} \cup \varphi_{j,0}^{I_1} \otimes \varphi_{j,d_j}^{I_4} \cup \varphi_{j,0}^{I_1} \otimes \varphi_{j,0}^{I_4} \\ \cup \varphi_{j,0}^{I_1} \otimes \varphi_{j,d_j}^{I_4} \cup \varphi_{j,0}^{I_2} \otimes \Phi_{j,d_j}^{I_3} \cup \varphi_{j,d_j}^{I_2} \otimes \varphi_{j,d_j}^{I_3} \\ \cup \varphi_{j,d_j}^{I_2} \otimes \varphi_{j,0}^{I_4} \cup \varphi_{j,d_j}^{I_2} \otimes \varphi_{j,0}^{I_4} \\ \cup (\varphi_{j,d_j}^{I_1} + \varphi_{j,0}^{I_2}) \otimes \varphi_{j,0}^{I_4} \cup \varphi_{j,d_j}^{I_2} \otimes (\varphi_{j,d_j}^{I_4} + \varphi_{j,0}^{I_3}) \\ \cup (\varphi_{j,d_j}^{I_1} \otimes \varphi_{j,d_j}^{I_4} + \varphi_{j,0}^{I_2} \otimes \varphi_{j,d_j}^{I_4} + \varphi_{j,0}^{I_2} \otimes \varphi_{j,0}^{I_3}). \end{array} \right. \quad (2.67)$$

Etape 2. On applique à chacun des p -blocs de $\Phi_{j+1}^0(\Omega)$ et $\Phi_{j+1}^b(\Omega)$ les décompositions à deux niveaux tensorielles de même conditions aux limites.

Proposition 2.10 *En excluant les fonctions d'échelle, on obtient ainsi une complétion*

$$\Psi_{j,\Omega}^{*,\sharp} = \Psi_{j,\Omega}^{0,\sharp} \cup \Psi_{j,\Omega}^{b,\sharp}$$

de $\Phi_{j,\Omega}$ dans $V_{j+1}(\Omega)$ où $\Psi_{j,\Omega}^{0,\sharp}$ est la complétion définie par la proposition 1.18 pour l'AMR $V_j^0(\Omega)$. Dans notre exemple du domaine en L $\Psi_{j,\Omega}^{0,\sharp}$ est définie en (1.152) et

$$\Psi_{j,\Omega}^{b,\sharp} = \begin{cases} \varphi_{j,0}^{I_1} \otimes \Psi_{j,I_4}^{D,D} \cup \Psi_{j,I_1}^{D,D} \otimes \varphi_{j,0}^{I_4} \cup \Psi_{j,I_1}^{D,D} \otimes \varphi_{j,d_j}^{I_4} \\ \cup \varphi_{j,0}^{I_2} \otimes \Psi_{j,I_3}^{D,D} \cup \varphi_{j,d_j}^{I_2} \otimes \Psi_{j,I_3}^{D,D} \cup \Psi_{j,I_2}^{D,D} \otimes \varphi_{j,d_j}^{I_3} \\ \cup \varphi_{j,d_j}^{I_2} \otimes \Psi_{j,I_4}^{D,D} \cup \Psi_{j,I_2}^{D,D} \otimes \varphi_{j,0}^{I_4}. \end{cases} \quad (2.68)$$

Preuve. Elle est en tout point similaire à celle de la proposition 1.18. □

Etape 3. On applique la correction grossière

$$\Psi_{j,\Omega}^* = (I - P_{j,\Omega}^*)\Psi_{j,\Omega}^{*,\sharp}.$$

Sur $\Psi_{j,\Omega}^{0,\sharp}$ la correction $P_{j,\Omega}^*$ se réduit à $P_{j,\Omega}^0$ et on retrouve donc la construction de la base d'ondelettes

$$\Psi_{j,\Omega}^0 = (I - P_{j,\Omega}^0)\Psi_{j,\Omega}^{0,\sharp}.$$

Sur $\Psi_{j,\Omega}^{b,\sharp}$, la correction $P_{j,\Omega}^*$ s'annule sauf aux p -interfaces de la décomposition de Γ_D pour $p = d - 2, \dots, 0$. A ces interfaces, $P_{j,\Omega}^*$ se réduit à $r_j \circ P_{j,\Gamma_D} \circ \gamma_D$, pour le choix du relèvement r_j utilisant uniquement les fonctions d'échelle de référence $\varphi_{j,0}$ et φ_{j,d_j} . Comme c'est le cas pour le calcul aux interfaces du domaine, par produit tensoriel, le calcul de ces ondelettes de relèvement aux p -interfaces de la décomposition de Γ_D pour $1 \leq p \leq d - 2$ se réduit au calcul des ondelettes de relèvement pour un 0-interface en dimension $d - p$. Le nombre de ces ondelettes à construire est celui du 0-interface correspondant de la frontière Γ_D (i.e. en dimension $d - p - 1$) et elles s'obtiennent de la même façon que pour la décomposition de domaine du §1.4.3.

Dans l'exemple du domaine en L il y a 8 0-interfaces à traiter, dont seulement 1, le sommet V , est aussi une interface de la décomposition du domaine Ω . Pour chacun de ces sommets, il nous faut construire 2 ondelettes de relèvement correspondant au nombre d'ondelettes d'un sommet en dimension $d - p - 1 = 1$. Ils sont tous équivalents et on va considérer l'exemple du sommet V .

Les deux ondelettes concernées de $\Psi_{j,\Omega}^{b,\sharp}$ au sommet V (i.e. qui s'écrivent exclusivement à l'aide de $\varphi_{j,d_j}^{I_4}$, $\varphi_{j,0}^{I_2}$, $\psi_{j,2j-1}^{0,I_1}$ et $\psi_{j,0}^{0,I_3}$) sont les suivantes:

$$\begin{cases} (\psi_{j,2j-1}^{I_1} - \varphi_{j,d_j}^{I_1}) \otimes \varphi_{j,d_j}^{I_4} \\ \varphi_{j,0}^{I_2} \otimes (\psi_{j,0}^{I_3} - \varphi_{j,0}^{I_3}). \end{cases}$$

La correction $r_j \circ P_{j,\Gamma_D} \circ \gamma_D$ appliquée à l'une quelconque de ces fonctions s'écrit dans les deux cas

$$-1/2(\varphi_{j,d_j}^{I_1} \otimes \varphi_{j,d_j}^{I_4} + \varphi_{j,0}^{I_2} \otimes \varphi_{j,d_j}^{I_4} + \varphi_{j,0}^{I_2} \otimes \varphi_{j,0}^{I_3}).$$

En prenant les combinaisons linéaires $(1, 1)$ et $(1, -1)$ des ondelettes obtenues après correction il vient

$$\begin{cases} \psi_{j,V}^{r_1} = \psi_{j,2^j-1}^{I_1} \otimes \varphi_{j,d_j}^{I_4} + \varphi_{j,0}^{I_2} \otimes \psi_{j,0}^{I_3} + \varphi_{j,0}^{I_2} \otimes \varphi_{j,d_j}^{I_4} \\ \psi_{j,V}^{r_2} = (\psi_{j,2^j-1}^{I_1} - \varphi_{j,d_j}^{I_1}) \otimes \varphi_{j,d_j}^{I_4} - \varphi_{j,0}^{I_2} \otimes (\psi_{j,0}^{I_3} - \varphi_{j,0}^{I_3}), \end{cases}$$

dont les traces sont proportionnelles (avec le coefficient $2^{j/2}c_0$) aux deux ondelettes de Γ au sommet V qui se construisent en suivant le §1.4.3 dans le cas d'un sommet 1D.

$$\begin{cases} \psi_{j,V}^1 = \psi_{j,2^j-1}^{I_1} + \psi_{j,0}^{I_3} \\ \psi_{j,V}^2 = (\psi_{j,2^j-1}^{I_1} - \varphi_{j,d_j}^{I_1}) + (\varphi_{j,0}^{I_3} - \psi_{j,0}^{I_3}). \end{cases} \quad (2.69)$$

Lemme 2.4 *La base d'ondelettes $\Psi_{j,\Omega}^*$ est stable dans L^p pour tout $p \in]0, \infty[$.*

Preuve. Les bases $\Psi_{j,\Omega}^0$ et Ψ_{j,Γ_D} sont localement linéairement indépendantes respectivement sur des partitions dyadiques de Ω et leurs traces sur Γ_D . Cette propriété reste trivialement vérifiée pour $\Psi_{j,\Omega}^* = \Psi_{j,\Omega}^0 \cup \Psi_{j,\Omega}^b$. Le résultat est alors classique dans la mesure où par hypothèse le générateur ϕ est dans L^p pour tout $p \in]0, \infty[$. \square

On peut désormais énoncer le théorème de stabilité du relèvement multiéchelle.

Théorème 2.8 *Soit $p \in [1, \infty]$ tel que le générateur $\tilde{\phi} \in L^{p'}$. Le relèvement \mathcal{R} vérifie la propriété de stabilité*

$$\|\mathcal{R}g\|_{B_{p,q}^{s+1/p}(\Omega)} \lesssim \|g\|_{B_{p,q}^s(\Gamma)}$$

pour tout $0 < s < \min(\tau(p) - 1/p, 1)$.

Soit $p \in]0, 1[$ et $r \in [1, \infty]$ tel que $\tilde{\phi} \in L^r$, alors le relèvement \mathcal{R} est stable pour

$$(d-1)\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{r}\right) < s < \min(\tau(p) - 1/p, 1).$$

Tout comme dans le cas du carré au §2.3.2, il est possible de choisir les ondelettes de relèvement dans l'espace $W_j(\Omega)$ de façon à obtenir des propriétés de stabilité supplémentaires du relèvement multiéchelle. Ce résultat repose sur le lemme 2.2 qui reste vrai dans le cadre de la décomposition de domaine dans la mesure où $V_j^0(\Omega) \subset V_j(\Omega)$. Il reste à associer à chaque ondelette $\psi_{j,\Gamma_D} \in \Psi_{j,\Gamma_D}$, une ondelette de relèvement dans l'espace $W_j(\Omega)$ de trace proportionnelle à ψ_{j,Γ_D} . On commence par démontrer le lemme suivant.

Lemme 2.5 *Toute fonction $\psi_{j,\Gamma_D} \in V_{j+1}(\Gamma_D)$ qui s'écrit exclusivement par le biais des paramétrisations ξ_l , $l = 1, \dots, N_D$, des fonctions d'échelle et des ondelettes sur l'intervalle $\varphi_{j,0}, \varphi_{j,d_j}, \psi_{j,0}, \psi_{j,2^j-1}$, est la trace d'une ondelette de $W_j(\Omega)$.*

Preuve. La fonction ψ_{j,Γ_D} est associée à un (ou plusieurs) 0-interface frontière de la décomposition noté $V \in \Gamma_D$. Tout d'abord on relève ψ_{j,Γ_D} canoniquement sur Ω en utilisant exclusivement des produits tensoriels des mêmes ondelettes et fonctions d'échelle sur l'intervalle $\varphi_{j,0}, \varphi_{j,d_j}, \psi_{j,0}, \psi_{j,2^j-1}$ et les transformations κ_i . On note $\psi_{j,\Omega}^\sharp$ cette fonction de $V_{j+1}(\Omega)$. Elle est d'ores et déjà orthogonale à toutes les fonctions d'échelle de $\tilde{\Phi}_{j,\Omega}$ à l'exception de celle associée au sommet frontière V notée $\tilde{\varphi}_{j,V}$. Soit l'indice i tel que $V \in \Omega_i$. Par commodité d'écriture on peut convenir que $V = \kappa_i(O)$ et on considère alors la fonction

$$\psi_{j,V}^0 := \otimes^d(\psi_{j,0} - \varphi_{j,0}) \circ \kappa_i^{-1}$$

de trace nulle sur Γ et orthogonale à toutes les fonctions d'échelle de $\tilde{\Phi}_{j,\Omega}$ horsmise $\tilde{\varphi}_{j,V}$. Alors

$$\psi_{j,\Omega} = \psi_{j,\Omega}^\sharp - \frac{(\psi_{j,\Omega}^\sharp, \tilde{\varphi}_{j,V})}{(\psi_{j,V}^0, \tilde{\varphi}_{j,V})} \psi_{j,V}^0$$

est une ondelette de $W_j(\Omega)$ de trace $\gamma(\psi_{j,\Omega}) = \psi_{j,\Gamma}$. \square

L'obtention des ondelettes de relèvement dans $W_j(\Omega)$ découle alors de la proposition suivante dont la preuve est constructive.

Proposition 2.11 *La propriété $W_j(\Gamma_D) \subset \gamma_D W_j(\Omega)$ est toujours vérifiée dans le cadre général de la décomposition de domaine avec raccord C^0 .*

Preuve. Soit l'ondelette $\psi_{j,\Gamma_D} \in \Psi_{j,\Gamma_D}$, il nous faut construire explicitement une ondelette $\psi_{j,\Omega} \in W_j(\Omega)$ telle que $\gamma_D(\psi_{j,\Omega}) = \psi_{j,\Gamma_D}$.

On va considérer pour se faire successivement le cas d'une ondelette ψ_{j,Γ_D} associée aux p -faces de la décompositions de Γ_D pour $p = d - 1$ (cas d'un sous domaine Γ_i) puis $p = d - 2, \dots, 0$.

Dans le cas d'un sous domaine Γ_i , le relèvement est canonique i.e. un simple produit tensoriel dans le domaine de référence $\hat{\Omega}$.

Le cas d'une ondelette associée à une p -interface, $p = d - 2, \dots, 0$ de Γ_D se ramène par produit tensoriel à l'étude d'une ondelette associée à une 0-interface en dimension $d - p - 1$. Cette dernière ondelette s'écrit exclusivement à l'aide des fonctions d'échelle et ondelettes sur l'intervalle de référence $\varphi_{j,0}, \varphi_{j,d_j}, \psi_{j,0}, \psi_{j,2^j-1}$. Le relèvement dans $W_j(\Omega)$ d'une ondelette associée à une p -interface, $p = d - 2, \dots, 0$ de Γ_D s'obtient donc "par produit tensoriel" à partir de calculs similaires à ceux présentés dans la preuve du lemme 2.5 (qui correspond à $p = 0$). \square

Dans l'exemple du domaine en L et $\Gamma_D = I_1$, les ondelettes $\psi_{j,k}^{I_1}$ pour $k = 1, \dots, 2^j - 2$ admettent comme relèvement les ondelettes $\frac{1}{c_0} 2^{-j/2} \psi_{j,k}^{I_1} \otimes \varphi_{j,d_j}^{I_4}$ de $W_j(\Omega)$.

Ecrivons aussi le relèvement de l'ondelette associée au sommet V , $\psi_{j,I_1} = \psi_{j,2^j-1}^{I_1}$. Son extension canonique sur Γ est $\psi_{j,\Gamma} = \psi_{j,2^j-1}^{I_1} + \psi_{j,0}^{I_3}$ et un relèvement immédiat dans $W_j(\Omega)$ est proportionnel à l'ondelette

$$\left(\psi_{j,2^j-1}^{I_1} \otimes \psi_{j,2^j-1}^{I_4} + \psi_{j,0}^{I_2} \otimes \psi_{j,2^j-1}^{I_4} + \psi_{j,0}^{I_2} \otimes \psi_{j,0}^{I_3} \right).$$

Théorème 2.9 Soit $p \in [1, \infty]$ tel que le générateur $\tilde{\phi} \in L^{p'}$. Pour le choix particulier d'ondelettes de relèvement donné par la proposition 2.11, le relèvement \mathcal{R} vérifie la propriété de stabilité

$$\|\mathcal{R}g\|_{B_{p,q}^{s+1/p}(\Omega)} \lesssim \|g\|_{B_{p,q}^s(\Gamma)}$$

pour tout $-\min(\tilde{\tau}(p), 1/p) < s < \min(\tau(p) - 1/p, 1)$.

Preuve. C'est une conséquence directe de la caractérisations des espaces de Besov par les bases d'ondelettes Ψ_Ω sur le domaine et Ψ_{Γ_D} sur Γ_D . \square

Ondelettes de relèvement aux interfaces de Γ_D pour un domaine Ω bidimensionnel. Tout comme dans le cas des ondelettes associées aux interfaces de la décomposition du domaine Ω , on va définir de façon exhaustive les ondelettes de relèvement dans le cas d'un domaine bidimensionnel. La tâche est particulièrement simple ici car elle se réduit à traiter les 0-interfaces ou sommets de la décomposition de la frontière Γ_D . Les ondelettes de relèvement associées aux sous domaines Γ_i de la décomposition de Γ_D sont, elles, canoniques.

On distinguera les sommets $V \in \Gamma_D$ (sommet $D - D$) et $V \in \bar{\Gamma}_D \cap \bar{\Gamma}_N$ (sommet $N - D$). Les notations sont les mêmes qu'au paragraphe 1.4.3.

Sommet Dirichelt-Dirichelt

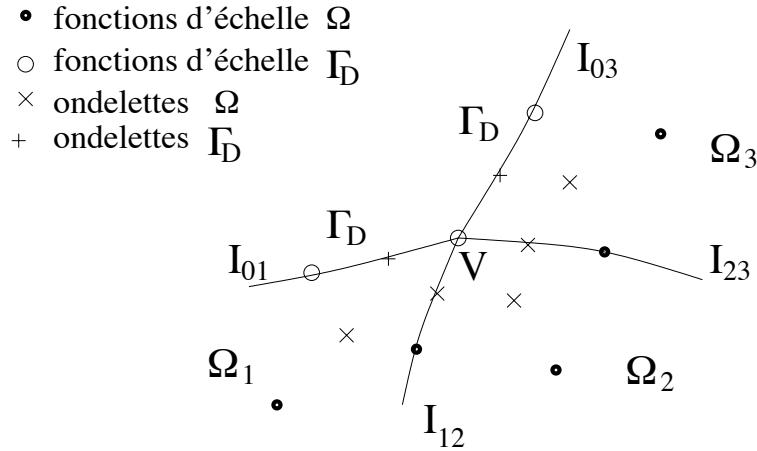


FIG. 2.18 – Sommet Dirichelt-Dirichelt V .

Rappelons les conventions du paragraphe 1.4.3

$$\begin{cases} V = k_i(O), \quad i = 1, \dots, M, \\ k_1(\hat{I}) = I_{0,1}, \quad k_M(\hat{J}) = I_{0,M}, \\ k_i(\hat{J}) = k_{i+1}(\hat{I}) = I_{i,i+1}, \quad i = 1, \dots, M-1. \end{cases}$$

Pour la décomposition de Γ_D on pose donc $\Gamma_1 = I_{0,1}$, $\Gamma_M = I_{0,M}$ et

$$\xi_1 = \kappa_1|_{\hat{I}} \text{ et } \xi_M = \kappa_M \circ \mathcal{R}_{0, \frac{\pi}{2}}|_{\hat{I}}.$$

Les deux ondelettes de Ψ_{j, Γ_D} associées au sommet V se construisent comme au §1.4.3. On obtient par exemple

$$\begin{cases} \psi_{j,0} \circ \xi_1^{-1} + \psi_{j,0} \circ \xi_M^{-1} \\ (\psi_{j,0} - \varphi_{j,0}) \circ \xi_1^{-1} - (\psi_{j,0} - \varphi_{j,0}) \circ \xi_M^{-1}. \end{cases} \quad (2.70)$$

Les fonctions de la complétion $\Psi_{j,\Omega}^{\sharp,b}$ associées au sommet V comportent les deux fonctions

$$(\psi_{j,0} - \varphi_{j,0}) \otimes \varphi_{j,0} \circ \kappa_1^{-1}$$

associée à Γ_1 et

$$\varphi_{j,0} \otimes (\psi_{j,0} - \varphi_{j,0}) \circ \kappa_M^{-1}$$

associée à Γ_M . La correction grossière par $P_{j,\Omega}^*$ (cf Etape 3) sur l'une quelconque f de ces fonctions se réduit à ajouter à f la fonction d'échelle

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^M \varphi_{j,0} \otimes \varphi_{j,0} \circ \kappa_i^{-1}.$$

En prenant les combinaisons linéaires $(1, 1)$ et $(1, -1)$ de ces fonctions après correction, on obtient les deux ondelettes de relèvement

$$\begin{cases} \psi_{j,0} \otimes \varphi_{j,0} \circ \kappa_1^{-1} + \varphi_{j,0} \otimes \psi_{j,0} \circ \kappa_M^{-1} + \sum_{i=2}^{M-1} \varphi_{j,0} \otimes \varphi_{j,0} \circ \kappa_i^{-1}, \\ (\psi_{j,0} - \varphi_{j,0}) \otimes \varphi_{j,0} \circ \kappa_1^{-1} - \varphi_{j,0} \otimes (\psi_{j,0} - \varphi_{j,0}) \circ \kappa_M^{-1}, \end{cases}$$

dont les traces sur Γ_D sont bien proportionnelles aux ondelettes 2.70.

L'obtention d'ondelettes de relèvement appartenant à l'espace $W_j(\Omega)$, dans le cadre de proposition 2.11, est immédiate en dimension 2. Par exemple, on retient

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^M \psi_{j,0} \otimes \psi_{j,0} \circ \kappa_i^{-1}, \\ (\psi_{j,0} - \varphi_{j,0}) \otimes \psi_{j,0} \circ \kappa_1^{-1} - \psi_{j,0} \otimes (\psi_{j,0} - \varphi_{j,0}) \circ \kappa_M^{-1}, \end{cases}$$

dont les traces sur Γ_D sont proportionnelles aux ondelettes 2.70.

Sommet Neumann-Dirichelt

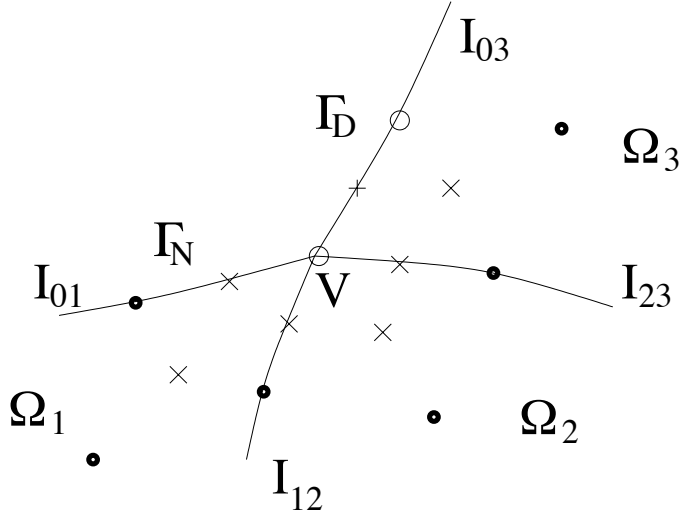


FIG. 2.19 – Sommet Neumann-Dirichelt V .

Les notations sont identiques aux précédentes. Il faut ici relever la seule ondelette de Γ_D associée au sommet V qui s'écrit

$$\psi_{j,0} \circ \xi_M^{-1}. \quad (2.71)$$

Pour la première construction, par correction grossière, on part de la fonction de la complétion $\Psi_{j,\Omega}^{\sharp,b}$ associée au sommet V i.e. à nouveau

$$\varphi_{j,0} \otimes (\psi_{j,0} - \varphi_{j,0}) \circ \kappa_M^{-1}$$

puis l'on soustrait la projection $P_{j,\Omega}^*$ qui se réduit ici à rajouter $\sum_{i=1}^M \varphi_{j,0} \otimes \varphi_{j,0} \circ \kappa_i^{-1}$. On obtient alors l'ondelette de relèvement

$$\varphi_{j,0} \otimes \psi_{j,0} \circ \kappa_M^{-1} + \sum_{i=1}^{M-1} \varphi_{j,0} \otimes \varphi_{j,0} \circ \kappa_i^{-1}$$

de trace sur Γ_D proportionnelle à (2.71).

Dans le cadre de la proposition 2.11, on vérifie facilement que

$$\sum_{i=1}^M \psi_{j,0} \otimes \psi_{j,0} \circ \kappa_i^{-1}$$

est une ondelette de relèvement dans $W_j(\Omega)$ de trace sur Γ_D proportionnelle à (2.71).

Chapitre 3

Problème de Stokes

3.1 Discrétisations en ondelettes du problème de Stokes en formulation vitesse-pression

Condition LBB

Une des difficultés majeures d'extension, au problème de Stokes, des discrétisations en ondelettes du chapitre 2, repose sur la définition de discrétisations en ondelettes de la vitesse et de la pression satisfaisant la condition de Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi (LBB). Cette condition de compatibilité entre les discrétisations de la vitesse et de la pression garantit à la fois le caractère bien posé du problème, l'obtention d'estimations d'erreur optimales et la résolution efficace du système d'équations. Rappelons brièvement ces résultats classiques.

Soit Ω un domaine Lipschitz de \mathbb{R}^d , \vec{X} l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)^d$, \vec{X}' son dual $H^{-1}(\Omega)^d$ et M le sous espace de $L^2(\Omega)$ des fonctions de valeur moyenne nulle. La notation $\langle \cdot, \cdot \rangle$ désignera le produit scalaire canonique de $L^2(\Omega)$ ou, sans ambiguïté possible, de $L^2(\Omega)^{d^2}$.

La formulation variationnelle du problème de Stokes en variables vitesse-pression conduit au problème de point selle: pour $(\vec{f}, g) \in \vec{X}' \times M$, trouver $(\vec{u}, p) \in \vec{X} \times M$ tel que

$$\begin{cases} \langle \vec{\nabla} \vec{u}, \vec{\nabla} \vec{v} \rangle + \langle \nabla \cdot \vec{v}, p \rangle = \langle \vec{f}, \vec{v} \rangle_{\vec{X}', \vec{X}} & \text{pour tout } \vec{v} \in \vec{X} \\ \langle \nabla \cdot \vec{u}, q \rangle = \langle g, q \rangle & \text{pour tout } q \in M. \end{cases} \quad (3.1)$$

Il définit (voir par exemple [58]) un isomorphisme de $\vec{X}' \times M$ dans $\vec{X} \times M$. Par la suite, on considérera aussi le problème de Stokes sur le tore \mathbb{T}^d en dimension d . Dans ce cas $\vec{X} = X(\mathbb{T}^d)^d$ où $X(\mathbb{T}^d)$ désigne le sous espace de $H^1(\mathbb{T}^d)$ des fonctions de valeur moyenne nulle, alors que M est toujours le sous espace de $L^2(\mathbb{T}^d)$ des fonctions de valeur moyenne nulle. Moyennant ces conventions de notations, les résultats abstraits sont les mêmes que sur un domaine borné.

La discrétisation de Galerkin d'un tel problème mixte (avec pour simplifier la présentation $g = 0$) part d'espaces d'approximation $(\vec{X}_h \subset \vec{X}, M_h \subset M)$ et considère le problème de point selle discret suivant: trouver $(\vec{u}_h, p_h) \in \vec{X}_h \times M_h$ tel que

$$\begin{cases} \langle \vec{\nabla} \vec{u}_h, \vec{\nabla} \vec{v}_h \rangle + \langle \nabla \cdot \vec{v}_h, p_h \rangle = \langle \vec{f}, \vec{v}_h \rangle_{\vec{X}', \vec{X}} \text{ pour tout } \vec{v}_h \in \vec{X}_h \\ \langle \nabla \cdot \vec{u}_h, q_h \rangle = 0 \text{ pour tout } q_h \in M_h. \end{cases} \quad (3.2)$$

Soit

$$\vec{V}_h := \{ \vec{v}_h \in \vec{X}_h, \langle \nabla \cdot \vec{v}_h, q_h \rangle = 0, \text{ pour tout } q_h \in M_h \},$$

le sous espace de \vec{X}_h des vitesses à “divergence discrète” nulle. La forme bilinéaire $\langle \vec{\nabla} \cdot, \vec{\nabla} \cdot \rangle$ étant elliptique sur le sous espace $\vec{V}_h \subset \vec{X}$, la vitesse \vec{u}_h est déterminée de façon unique par le théorème de Lax Milgram appliqué à la formulation variationnelle

$$\vec{u}_h \in \vec{V}_h, \langle \vec{\nabla} \vec{u}_h, \vec{\nabla} \vec{v}_h \rangle = \langle \vec{f}, \vec{v}_h \rangle_{\vec{X}', \vec{X}}, \text{ pour tout } \vec{v}_h \in \vec{V}_h. \quad (3.3)$$

Cette équation définit une approximation de Galerkin non conforme de la formulation variationnelle écrite sur l'espace des vitesses à divergence nulle $\vec{V} := \{ \vec{v} \in \vec{X}, \nabla \cdot \vec{v} = 0 \}$, i.e.

$$\vec{u} \in \vec{V}, \langle \vec{\nabla} \vec{u}, \vec{\nabla} \vec{v} \rangle = \langle \vec{f}, \vec{v} \rangle_{\vec{X}', \vec{X}}, \text{ pour tout } \vec{v} \in \vec{V}, \quad (3.4)$$

dans la mesure où en général l'inclusion $\vec{V}_h \subset \vec{V}$ n'est pas vérifiée.

L'existence et l'unicité de la pression p_h de (3.2) est équivalente à la condition Inf-Sup discrète ou condition LBB (voir [58], [17])

$$\inf_{q_h \in M_h} \sup_{\vec{v}_h \in \vec{X}_h} \frac{\langle \nabla \cdot \vec{v}_h, q_h \rangle}{\|\vec{v}_h\|_{\vec{X}} \|q_h\|_M} \geq \beta_h > 0. \quad (3.5)$$

On voit que contrairement aux discrétisations de Galerkin des problèmes elliptiques, le caractère bien posé du problème continu et la conformité de la discrétisation $(\vec{X}_h \subset \vec{X}, M_h \subset M)$, ne suffisent pas à garantir que le problème discrétisé est bien posé. Il faut en outre que les discrétisations de la vitesse et de la pression soient compatibles au sens de la condition LBB.

Cette condition est dite uniforme s'il existe une constante β , indépendante du paramètre de discrétisation h , telle que $\beta_h \geq \beta > 0$ quelque soit h . Dans le cas contraire, (i.e. β_h tend vers 0 avec h), l'estimation d'erreur de la vitesse donnée classiquement par l'estimation a priori (voir par exemple [58], [17])

$$\|\vec{u} - \vec{u}_h\|_{\vec{X}} \leq 2\left(1 + \frac{1}{\beta_h}\right) \inf_{\vec{v}_h \in \vec{X}_h} \|\vec{u} - \vec{v}_h\|_{\vec{X}} + \inf_{q_h \in M_h} \|p - q_h\|_M. \quad (3.6)$$

est en général détériorée par cette dépendance. Le second terme de cette estimation $\inf_{q_h \in M_h} \|p - q_h\|_M$ apparaît comme une erreur de consistance qui résulte de la non conformité de l'approximation de Galerkin (3.3). Ce terme disparaît dans le cas

conforme où les vitesses à divergences discrètes nulles sont à divergences nulles i.e. $\vec{V}_h \subset \vec{V}$.

L'effet de la non-uniformité de la condition LBB est en général plus fort sur l'estimation de la pression, comme le traduit l'estimation a priori (voir à nouveau les références ci-dessus)

$$\|p - p_h\|_M \leq \frac{2}{\beta_h} \left(1 + \frac{1}{\beta_h}\right) \inf_{\vec{v}_h \in \vec{X}_h} \|\vec{u} - \vec{v}_h\|_{\vec{X}} + \left(1 + \frac{2}{\beta_h}\right) \inf_{q_h \in M_h} \|p - q_h\|_M. \quad (3.7)$$

Enfin, l'uniformité de cette condition est aussi cruciale pour une résolution efficace, par un algorithme itératif, du système linéaire issu de la discrétisation (3.2). Quelque soit l'algorithme retenu, comme celui d'Uzawa [58] ou encore celui proposé dans [15], son efficacité repose toujours sur la construction d'un préconditionnement performant pour (i) l'opérateur laplacien discret Δ_h et (ii) le complément de Schur (aussi appelé ici l'opérateur d'Uzawa discret) $Z_h : = -\nabla_h \cdot (-\Delta_h)^{-1} \vec{\nabla}_h$ où $\vec{\nabla}_h$ désigne l'opérateur gradient discret et $-\nabla_h$ son adjoint.

En ce qui concerne l'opérateur laplacien, les techniques de préconditionnement du paragraphe 2.1 s'appliquent directement dans le cas d'une discrétisation en ondelettes de l'espace de vitesse. Pour le complément de Schur, l'identité (voir [15])

$$\langle Z_h q_h, q_h \rangle = \left(\sup_{\vec{v}_h \in \vec{X}_h} \frac{\langle \nabla \cdot v_h, q_h \rangle}{\|\vec{v}_h\|_{\vec{X}}} \right)^2 \text{ pour tout } q_h \in M_h,$$

énonce que la condition LBB (3.5) est équivalente à l'ellipticité L^2 de l'opérateur d'Uzawa discret avec une constante d'ellipticité β_h^2 . L'uniformité de la condition LBB garantit donc que le conditionnement de la matrice du complément de Schur est uniformément borné que ce soit dans la base de fonctions d'échelle ou dans une base d'ondelettes L^2 stable.

Objectifs

Dans le cadre d'une discrétisation en ondelettes, on va dans un premier temps considérer le cas de discrétisations uniformes, i.e. des analyses multirésolutions M_j de M et \vec{X}_j de \vec{X} . Il s'agit alors de construire une discrétisation uniforme de l'espace de vitesse \vec{X}_J à l'échelle J , telle que le couple (M_j, \vec{X}_j) satisfasse la condition LBB uniformément en j .

On montre alors, en toute généralité, que si les espaces de vitesse \vec{X}_j vérifient des estimations directes et les espaces de pression M_j des estimations inverses minimales, alors il existe une constante K , indépendante de j , telle que le couple (M_j, \vec{X}_{j+K}) vérifie la condition LBB uniformément en j .

En d'autres termes, comme l'indique les estimations d'erreurs (3.6,3.7), la discrétisation (M_j, \vec{X}_{j+K}) permet d'obtenir une approximation linéaire asymptotiquement optimale de la solution (\vec{u}, p) en norme $\vec{X} \times M$. En outre, tout comme dans le cas des problèmes elliptiques au §2.1, cette solution s'obtiendra par un algorithme de

type “full multigrid” en $\mathcal{O}(N_j)$ opérations où N_j désigne la dimension de l’espace M_j (sous une hypothèse de régularité $((H^{s+1})^d \times H^s)$ de la solution et d’ordre d’approximation $n \geq s > 0$ en norme $\vec{X} \times M$ de la discrétisation).

Cependant, la constante dans le $\mathcal{O}(N_j)$ est de l’ordre de 2^{Kd} alors que pour l’approximation elle est indépendante de K car fixée par l’approximation de la pression dans M_j .

Cette analyse va conduire en général à des constantes 2^{Kd} trop grandes pour les applications pratiques et il importe donc d’optimiser ce résultat. Idéalement on cherche à définir des familles de discrétisations telles que (i) le couple (M_j, \vec{X}_j) satisfait la condition LBB uniforme (précisément le nombre d’inconnues de la vitesse doit être égal asymptotiquement à d fois le nombre d’inconnues de la pression) et (ii) l’ordre d’approximation de l’espace \vec{X}_j en norme $(H^1)^d$ équilibre l’ordre d’approximation de l’espace M_j en norme L^2 . Il est bien connu que ces propriétés sont fausses en général.

L’étape suivante est bien sûr de considérer le cas de discrétisations non uniformes des espaces de pression et de vitesse en définissant des bases d’ondelettes

$$\Psi_{\nabla} = \{\psi_{\lambda_p}, \lambda_p \in \nabla\}$$

de M et

$$\vec{\Psi}_{\vec{\nabla}} = \{\vec{\psi}_{\lambda_{\vec{u}}}, \lambda_{\vec{u}} \in \vec{\nabla}\}$$

de \vec{X} , associées aux AMR précédentes. Etant donné un ensemble a priori quelconque d’ondelettes de pression $\Lambda_p \subset \nabla$, engendrant la discrétisation $M_{\Lambda_p} \subset M$ de la pression, on cherche à construire un ensemble d’ondelettes de vitesse $\Lambda_{\vec{u}} \subset \vec{\nabla}$ engendrant le sous espace $\vec{X}_{\Lambda_{\vec{u}}}$ de \vec{X} et tel que le couple $(M_{\Lambda_p}, \vec{X}_{\Lambda_{\vec{u}}})$ satisfasse la condition LBB uniforme i.e. avec une constante indépendante de Λ_p . Il est clair que tout sous ensemble contenant $\Lambda_{\vec{u}}$ satisfera aussi cette condition avec une constante au moins égale à la précédente. En ce sens, l’ensemble $\Lambda_{\vec{u}}$ cherché est l’ensemble minimum d’ondelettes de vitesse tel que l’on puisse prouver la condition LBB uniforme.

A nouveau, on démontrera au §3.3, sous des hypothèses minimales, qu’il est toujours possible de construire un tel ensemble d’ondelettes tel que en outre

$$\#\Lambda_{\vec{u}} \sim \#\Lambda_p$$

et donc de façon optimale en terme de complexité asymptotique. Précisément, les propriétés de compression, de régularité et de localité des ondelettes garantissent que le raffinement précédent K en échelle s’applique aussi localement en espace.

Comme dans le cas d’une discrétisation uniforme le rapport $\#\Lambda_{\vec{u}}/\#\Lambda_p$ obtenu par un tel résultat général est bien trop élevé pour les applications pratiques. On va donc s’efforcer de définir des familles de discrétisations qui permettront d’obtenir un rapport de l’ordre de d voire même dans certain cas de 1.

Pour la construction des bases d'ondelettes, on se placera à nouveau dans le cadre de la décomposition de domaine du §1.4. On bénéficie ainsi d'un large choix de générateurs, ce qui se révélera crucial pour l'obtention de la condition LBB. La plupart des résultats de ce chapitre seront obtenus sur le domaine tensoriel $]0, 1[^d$ ou le tore \mathbb{T}^d et ont pour point de départ les travaux de P.G. Lemarié Rieusset [75], W.Dahmen, A.Kunoth et K. Urban [42]. Le passage d'un sous domaine à des domaines plus généraux par décomposition de domaine, s'effectue classiquement par le biais du lemme de Boland Nicolaidis [14]. Toutefois la difficulté principale, non abordée ici, consisterait à étendre nos résultats à un seul domaine courbe.

Une stratégie alternative pour résoudre le système de Stokes consiste à définir un problème discret équivalent coercif, de sorte que la condition LBB de compatibilité entre les discrétisations de la vitesse et de la pression n'est plus à vérifier. Cette technique dite de stabilisation est bien connue en éléments finis où l'ellipticité est obtenue dans une norme dépendante de la grille. Dans [9], les propriétés des bases d'ondelettes de caractérisation des normes de Sobolev (en particulier $\vec{X}' \times M'$) et de compression, sont utilisées pour définir un problème discret équivalent, elliptique en norme $\vec{X} \times M$. Cette méthode est le parallèle en terme de stabilisation de la technique de raffinement de la vitesse dans un voisinage espace-échelle de la pression du §3.3. Le principal avantage de cette autre approche est de bénéficier directement de toutes les techniques de préconditionnement et d'adaptivité en bases d'ondelettes qui s'appliquent aux problèmes elliptiques. Néanmoins, comme dans l'étude du §3.3, une démonstration rigoureuse conduit en général à augmenter considérablement la complexité du calcul de la matrice du nouveau système, à la différence qu'ici ce calcul s'effectue une fois pour toute.

Plan du chapitre

On commence par rappeler au §3.2 le mécanisme introduit dans [75], qui permet de définir une famille de générateurs biorthogonaux par dérivation/intégration en partant d'un premier couple de générateur $(\phi, \check{\phi})$. Il va s'avérer crucial pour les deux premières discrétisations du problème de Stokes présentées dans ce chapitre.

Le §3.3 est consacré à des résultats généraux d'obtention de la condition LBB uniforme par raffinement de l'espace de vitesse dans un voisinage espace-échelle de la pression.

Le §3.4 rappelle une première construction sur \mathbb{T}^d et $]0, 1[^d$ introduite dans [75] et [42] dans le cas d'une discrétisation uniforme. On étudie alors son extension dans le cas d'une discrétisation non uniforme. Cette construction exploite de façon essentielle une relation de "biorthogonalité" entre la divergence de la discrétisation de la vitesse et la discrétisation de la pression. Dans ce cadre, on peut prouver la condition LBB à la fois sur le Tore \mathbb{T}^d et le domaine tensoriel $]0, 1[^d$ et dans le

cas d'une discrétisation uniforme, avec $J = j$, et non uniforme, avec un rapport $\#\Lambda_{\vec{u}}/\#\Lambda_p$ proche de d . Néanmoins l'utilisation de générateurs primaux et duaux pour engendrer les discrétisations de la vitesse et de la pression conduit à des ordres d'approximation déséquilibrés de la pression et de la vitesse, limitant en pratique cette première discrétisation à des petits ordres.

Le §3.5 introduit une nouvelle famille de discrétisations (uniforme et non uniforme) qui repose cette fois sur une relation "d'identité" entre la divergence de la discrétisation de la vitesse et la discrétisation de la pression. Dans ce cas le générateur dual n'intervient plus explicitement dans la discrétisation ce qui présente en particulier l'avantage (par exemple pour les formules de quadratures) de pouvoir utiliser uniquement des fonctions polynômiales par morceaux (splines) dans la discrétisation. Ses principaux atouts sont en outre d'obtenir des ordres d'approximations de la pression et de la vitesse équilibrés ainsi qu'un ratio $\#\Lambda_{\vec{u}}/\#\Lambda_p$ égal à 1, du moins en toute rigueur dans le cas périodique.

Pour discrétiser la vitesse, ces deux constructions utilisent de façon essentielle des générateurs distincts, d'une part dans la direction de la dérivation de l'opérateur divergence et d'autre part dans les autres directions du produit tensoriel. Il en résulte que leur extension à des quadrangles "courbes" par paramétrisation est pour le moins délicate. En particulier une simple rotation de $\pi/2$ du domaine de référence va (clairement dans le cas périodique) briser la condition LBB. D'autre part, même en supposant la condition LBB vérifiée sur les sous domaines courbes, le passage à des domaines plus généraux par décomposition de domaine (§1.4.3) est limitée à des géométries simples du fait qu'un raccord C^0 de la vitesse impose que les mêmes générateurs soient en regard aux interfaces de la décomposition.

Au §3.6 on cherche donc à définir des discrétisations utilisant un seul générateur pour la définition de la vitesse et éventuellement un second pour la pression. Il est bien connu qu'en général, pour des générateurs symétriques, le mode parasite global du damier apparaît dans le noyau de l'opérateur d'Uzawa discret, et donc brise la condition LBB. On propose d'y remédier en dissymétrisant la pression à l'aide du générateur orthogonal de Daubechies, alors que l'on conserve un générateur symétrique pour la définition de la vitesse. L'efficacité de cette technique est démontrée dans le cas du tore \mathbb{T}^d par simple analyse de Fourier. L'extension aux domaines tensoriels $]0, 1[^d$ est naturelle dans la mesure où aucun mode parasite global ne devrait apparaître dans la discrétisation, alors que les modes locaux sont faciles à éliminer en jouant sur les paramètres $(\delta, \tilde{\delta})$ de la construction sur l'intervalle pour réduire la dimension de l'espace de pression tout en préservant son ordre d'approximation. Le bien fondé de cette heuristique est vérifiée numériquement sur des exemples en dimension 2.

Au §3.7 on rappelle le lemme de Boland Nicolaidis qui permet d'étendre nos résultats à des domaines plus généraux, sous de sévères restrictions, en particulier

pour les deux premières constructions.

Enfin on présente aux §3.8 et 3.9 des exemples numériques. Tout d'abord au §3.8, on compare, dans le cas d'une discrétisation uniforme sur le domaine $]0, 1[^2$ et pour les trois discrétisations, les préconditionnements des opérateurs laplacien et d'Uzawa ainsi que les propriétés d'approximations obtenues de la vitesse et la pression. On présente ensuite au §3.9 un exemple d'algorithme adaptatif en ondelettes pour la résolution du problème de Stokes utilisant la discrétisation du §3.4. Cet algorithme suit de près les principes généraux des stratégies adaptatives dégagés au §2.2.2 dans le cas elliptique.

Notations

Soit un sous espace $V \subset L^2$, dans ce chapitre on adoptera la notation \bar{V} pour désigner le sous espace de V des fonctions à valeur moyenne nulle.

3.2 Intégration/dérivation des ondelettes biorthogonales

P.G. Lemarié Rieusset [75] a introduit un mécanisme simple d'intégration/dérivation qui permet, à partir d'un couple initial de générateurs biorthogonaux $(\phi, \tilde{\phi})$, d'engendrer un nouveau couple de générateurs biorthogonaux $(\phi^i, \tilde{\phi}^d)$. Cette propriété s'est avérée très utile pour la construction d'ondelettes à divergence nulle ainsi que la discrétisation du problème de Stokes [75], [42], [97].

Proposition 3.1 *Soit $(\phi, \tilde{\phi})$ un couple de fonctions d'échelle biorthogonales sur \mathbb{R} . Si $\tilde{\phi} \in H^s(\mathbb{R})$ pour $s > 1$ et si $\tilde{n} \geq 2$, alors il existe un couple unique de fonctions d'échelle $(\phi^i, \tilde{\phi}^d)$ tel que*

$$\frac{d}{dx}\phi^i(x) = \phi(x+1) - \phi(x) \text{ et } \frac{d}{dx}\tilde{\phi}^d(x) = \tilde{\phi}^d(x) - \tilde{\phi}^d(x-1). \quad (3.8)$$

Soient $(V_j^i(\mathbb{R}), \tilde{V}_j^d(\mathbb{R}))$, les AMR biorthogonales générées par le couple $(\phi^i, \tilde{\phi}^d)$. Elles reproduisent les polynômes de degré n pour la primale et $\tilde{n}-2$ pour la duale. Soient les projecteurs biorthogonaux P_j^i sur $V_j^i(\mathbb{R})$ et \tilde{P}_j^d sur $\tilde{V}_j^d(\mathbb{R})$, ils satisfont les propriétés de commutation

$$\frac{d}{dx} \circ P_j^i f = P_j^i \circ \frac{d}{dx} f \text{ et } \frac{d}{dx} \circ \tilde{P}_j^d f = \tilde{P}_j^d \circ \frac{d}{dx} f, \text{ pour tout } f \in H^1(\mathbb{R}). \quad (3.9)$$

Enfin les ondelettes mères ψ^i et $\tilde{\psi}^d$ des espaces d'ondelettes $W_j^i(\mathbb{R})$ et $\tilde{W}_j^d(\mathbb{R})$ satisfont les relations

$$\psi = -\frac{1}{4} \frac{d}{dx} \psi^i \text{ et } \frac{d}{dx} \tilde{\psi} = 4\tilde{\psi}^d. \quad (3.10)$$

Les ondelettes splines biorthogonales du §1.2.1 définissent une famille stable par intégration/dérivation. Précisément, avec les notations du §1.2.1, pour $(\phi = \phi^n, \tilde{\phi} = \tilde{\phi}^{n,\tilde{n}})$, alors $(\phi^i = \phi^{n+1}, \tilde{\phi}^d = \tilde{\phi}^{n+1,\tilde{n}-1})$ dès que $\tilde{n} \geq 2$ est choisi suffisamment grand de sorte que $\tilde{\tau} > 1$. Symétriquement pour $(\phi = \tilde{\phi}^{n,\tilde{n}}, \phi = \phi^n)$, alors $(\phi^i = \tilde{\phi}^{n-1,\tilde{n}+1}, \phi^d = \phi^{n-1})$ dès que $n \geq 2$.

Remarque 3.1 *La proposition 3.1 reste vraie dans le cas des ondelettes périodiques moyennant des adaptations immédiates dans les notations.*

Partant de ces deux couples de générateurs $(\phi, \tilde{\phi})$ et $(\phi^i, \tilde{\phi}^d)$ sur \mathbb{R} , la construction sur l'intervalle du paragraphe 1.3 définit deux familles d'AMR biorthogonales sur l'intervalle $]0, 1[$. Afin de préserver la propriété essentielle de commutation (3.9), il faut imposer des conditions aux limites $H_0^1(]0, 1[)$ pour l'AMR V_j^i sur l'intervalle $]0, 1[$. Alors la proposition 3.1 reste vraie pourvu que les paramètres $(\delta, \tilde{\delta})$ soient choisis identiques pour les deux constructions sur l'intervalle. Ce résultat est précisé par la proposition suivante introduite dans [67] (voir aussi [43] et [79] dans le cas des ondelettes splines biorthogonales). On en rappelle la preuve compte tenu de son importance dans les constructions à suivre.

Proposition 3.2 *Soient $(V_j^\delta \subset L^2(]0, 1[), \tilde{V}_j^{\tilde{\delta}} \subset H^1(]0, 1[))$ le couple d'AMR biorthogonales sur l'intervalle construit à partir des générateurs sur \mathbb{R} $(\phi, \tilde{\phi})$ selon les hypothèses de la proposition 1.7. De même, soit le couple d'AMR biorthogonales $(V_j^{i,0,\delta} \subset H_0^1(]0, 1[), \tilde{V}_j^{d,\tilde{\delta}} \subset L^2(]0, 1[))$ issu des générateurs $(\phi^i, \tilde{\phi}^d)$ avec conditions aux limites $H_0^1(]0, 1[)$ pour la primale et sans conditions aux limites pour la duale (où l'on a substitué l'indice 0 à la notation CL_D pour indiquer les conditions aux limites homogènes de Dirichlet). On note (P_j, \tilde{P}_j) et (P_j^i, \tilde{P}_j^d) les paires de projecteurs biorthogonaux et (W_j, \tilde{W}_j) , (W_j^i, \tilde{W}_j^d) les espaces d'ondelettes. Alors on a les relations suivantes*

$$(i) V_j^{i,0,\delta} = \int_0^x \overline{V_j^\delta} \text{ et } \tilde{V}_j^{d,\tilde{\delta}} = \frac{d}{dx} \tilde{V}_j^{\tilde{\delta}}. \quad (3.11)$$

$$(ii) \begin{cases} \frac{d}{dx} \circ P_j^i f = P_j \circ \frac{d}{dx} f, \forall f \in H_0^1(]0, 1[) \\ \frac{d}{dx} \circ \tilde{P}_j^d f = \tilde{P}_j^d \circ \frac{d}{dx} f, \forall f \in H^1(]0, 1[). \end{cases} \quad (3.12)$$

$$(iii) W_j = \frac{d}{dx} W_j^i \text{ et } \tilde{W}_j^d = \frac{d}{dx} \tilde{W}_j. \quad (3.13)$$

Preuve. (i) d'après la définition des AMR sur l'intervalle (1.76), on obtient facilement les relations suivantes.

$$\begin{cases} 2^{-j} \frac{d}{dx} \varphi_{j,\alpha}^{i,\delta_0,(0)} = \alpha \varphi_{j,\alpha-1}^{\delta_0,(0)} - \langle x^\alpha, \tilde{\phi}_{0,m_0+\delta_0}^d \rangle \phi_{j,m_0+\delta_0}, \alpha = 1, \dots, n \\ 2^{-j} \frac{d}{dx} \varphi_{j,\alpha}^{i,\delta_1,(1)} = -\alpha \varphi_{j,\alpha-1}^{\delta_1,(1)} + \langle (-1)^\alpha x^\alpha, \tilde{\phi}_{0,1-m_1-\delta_1}^d \rangle \phi_{j,2^j-m_1-\delta_1}, \alpha = 1, \dots, n \\ 2^{-j} \frac{d}{dx} \phi_{j,k}^i = \phi_{j,k-1} - \phi_{j,k}, m_0 + 1 + \delta_0 \leq k \leq 2^j - m_1 - \delta_1. \end{cases} \quad (3.14)$$

On en déduit l'identité $\frac{d}{dx}V_j^{i,0,\delta} \oplus \phi_{j,m_0+\delta_0} = V_j^\delta$ et en particulier $\frac{d}{dx}V_j^{i,0,\delta} = \overline{V_j^\delta}$. De même pour les AMR duales on a les identités remarquables

$$\left\{ \begin{array}{l} 2^{-j} \frac{d}{dx} \tilde{\varphi}_{j,\alpha+1}^{\tilde{\delta}_0,(0)} = (\alpha+1) \tilde{\varphi}_{j,\alpha}^{d,\tilde{\delta}_0,(0)} - \langle x^{\alpha+1}, \phi_{0,\tilde{m}_0-1+\tilde{\delta}_0} \rangle \tilde{\varphi}_{j,\tilde{m}_0+\tilde{\delta}_0}^d, \quad \alpha = -1, \dots, \tilde{n}-2 \\ 2^{-j} \frac{d}{dx} \tilde{\varphi}_{j,\alpha+1}^{\tilde{\delta}_1,(1)} = -(\alpha+1) \tilde{\varphi}_{j,\alpha}^{d,\tilde{\delta}_1,(1)} + \langle (-1)^{\alpha+1} x^{\alpha+1}, \phi_{0,-\tilde{m}_1-1+\tilde{\delta}_1} \rangle \tilde{\varphi}_{j,2^j-\tilde{m}_1+1-\tilde{\delta}_1}^d, \\ \quad \alpha = -1, \dots, \tilde{n}-2 \\ 2^{-j} \frac{d}{dx} \tilde{\phi}_{j,k} = \tilde{\phi}_{j,k}^d - \tilde{\phi}_{j,k+1}^d, \quad \tilde{m}_0 + \tilde{\delta}_0 \leq k \leq 2^j - \tilde{m}_1 + 1 - \tilde{\delta}_1. \end{array} \right.$$

On en conclut, d'après la définition des AMR sur l'intervalle (1.76), que $\tilde{V}_j^{d,\tilde{\delta}} = \frac{d}{dx} \tilde{V}_j^{\tilde{\delta}}$.

Soient $(\{e_{j,k}\}_{k=0,\dots,\Delta_j}, \{\tilde{e}_{j,k}\}_{k=0,\dots,\Delta_j})$ des bases biorthogonales des espaces $(V_j^\delta, \tilde{V}_j^{\tilde{\delta}})$. On peut toujours supposer que $\tilde{e}_{j,0} = 1$. Alors, $e_{j,k}^i = \int_0^x e_{j,k}(x) dx$ et $\tilde{e}_{j,k}^d = \frac{d}{dx} \tilde{e}_{j,k}$ pour $k = 1, \dots, \Delta_j$ sont des bases biorthogonales des espaces $(V_j^{i,0,\delta}, \tilde{V}_j^{d,\tilde{\delta}})$. La propriété (ii) se démontre alors par une simple intégration par parties où les conditions aux limites $H_0^1(]0, 1[)$ sur l'AMR primale $V_j^{i,0,\delta}$ apparaissent bien comme essentielles.

Pour finir, prouvons par exemple la première assertion de (iii) i.e. l'identité $W_j = \frac{d}{dx} W_j^i$. On déduit de la formule de commutation que $P_j \circ \frac{d}{dx}(w_j) = \frac{d}{dx} \circ P_j^i(w_j) = 0$ pour tout $w_j \in W_j^i$ et donc $\frac{d}{dx} W_j^i \perp \tilde{V}_j^{\tilde{\delta}}$. D'après (i) on a en outre

$$V_{j+1}^\delta = \left(\frac{d}{dx} V_{j+1}^{i,0,\delta} \right) \oplus \mathbb{P}_0 = \frac{d}{dx} (V_j^{i,0,\delta} \oplus W_j^i) \oplus \mathbb{P}_0 = V_j^\delta \oplus \frac{d}{dx} W_j^i$$

ce qui prouve le résultat. \square

Remarque 3.2 *De la preuve précédente il résulte que si les hypothèses de la proposition 1.7 sont vérifiées pour le couple d'AMR sur l'intervalle $(V_j^\delta, \tilde{V}_j^{\tilde{\delta}})$, elles le sont automatiquement aussi pour le couple d'AMR $(V_j^{i,0,\delta}, \tilde{V}_j^{d,\tilde{\delta}})$.*

Remarque 3.3 *Soient $(\Psi_j = \{\psi_{j,k}\}_{k=0,\dots,2^j-1}, \tilde{\Psi}_j = \{\tilde{\psi}_{j,k}\}_{k=0,\dots,2^j-1})$ des bases d'ondelettes biorthogonales de (W_j, \tilde{W}_j) . De la propriété (iii) on déduit par intégration par parties que $(\Psi_j^i = \{\psi_{j,k}^i\}_{k=0,\dots,2^j-1}, \tilde{\Psi}_j^d = \{\tilde{\psi}_{j,k}^d\}_{k=0,\dots,2^j-1})$ avec $\psi_{j,k}^i(x) = 2^j \int_0^x \psi_{j,k}(t) dt$ et $\tilde{\psi}_{j,k}^d = 2^{-j} \frac{d}{dx} \tilde{\psi}_{j,k}$, définissent des bases d'ondelettes biorthogonales des espaces (W_j^i, \tilde{W}_j^d) .*

3.3 Stabilisation par raffinement local de la vitesse

On considère, pour la discrétisation de la vitesse, une AMR vectorielle de \vec{X} i.e. une suite emboîtée de sous espaces de \vec{X} , $\vec{X}_j \subset \vec{X}_{j+1} \subset \vec{X}$, dont l'union est dense dans \vec{X} . De même, pour la discrétisation de la pression, on se donne une AMR scalaire de M , i.e. une suite de sous espaces emboîtés de M , $M_j \subset M_{j+1} \subset M$, dont l'union est dense dans M .

On définit des décompositions multiéchelles des espaces \vec{X} et M par la donnée de projecteurs

$$\vec{P}_j = (P_j^i, i = 1, \dots, d) : \vec{X} \rightarrow \vec{X}_j$$

et

$$P_j : M \rightarrow M_j$$

vérifiant les propriétés de biorthogonalité $P_j^i P_{j+1}^i = P_j^i$, $i = 1, \dots, d$, et $P_j P_{j+1} = P_j$. On notera \vec{W}_j (resp. W_j) les espaces d'ondelettes ou de détails définis comme les images des projecteurs $\vec{Q}_j = \vec{P}_{j+1} - \vec{P}_j$ (resp. $Q_j = P_{j+1} - P_j$). Les espaces d'ondelettes sont supposés munis de bases de Riesz locales (de supports de taille $\sim 2^{-j}$) et l'on notera

$$\vec{\Psi}_{\vec{\nabla}} = \prod_{i=1}^d \Psi_{\nabla_i}^i = \left\{ \vec{\psi}_{\lambda_{\vec{a}}}, \lambda_{\vec{a}} \in \vec{\nabla} \right\} \text{ où } \Psi_{\nabla_i}^i = \left\{ \psi_{\lambda_{u_i}}^i, \lambda_{u_i} \in \nabla_i \right\},$$

la base multiéchelle de \vec{X} , et

$$\Psi_{\nabla} = \{ \psi_{\lambda_p}, \lambda_p \in \nabla \}$$

la base multiéchelle de M . Ces bases seront supposées stables dans \vec{X} et M i.e.

$$\|\vec{u}\|_{\vec{X}} \sim \left(\sum_{i=1}^d \sum_{\lambda_{u_i} \in \nabla_i} 2^{2|\lambda_{u_i}|} |u_{\lambda_{u_i}}^i|^2 \right)^{1/2} \text{ où } \vec{u} = \left(\sum_{\lambda_{u_i} \in \nabla_i} u_{\lambda_{u_i}}^i \psi_{\lambda_{u_i}}^i, i = 1, \dots, d \right), \quad (3.15)$$

et

$$\|q\|_M \sim \left(\sum_{\lambda \in \nabla} |q_{\lambda}|^2 \right)^{1/2} \text{ où } q = \sum_{\lambda \in \nabla} q_{\lambda} \psi_{\lambda}. \quad (3.16)$$

De telles décompositions multiéchelles sont par exemple générées soit par des ondelettes éléments finis \mathbb{P}_1 sur des triangulations dyadiques quasi uniformes (en 2D), soit dans le cadre de la décomposition de domaine du §1.4.

La proposition suivante énonce, sous des hypothèses minimales, que la discrétisation du problème de Stokes (\vec{X}_{j+K}, M_j) satisfera toujours la condition LBB uniformément en j , pour un entier K suffisamment grand mais indépendant de l'échelle j .

Proposition 3.3 *S'il existe γ , $0 < \gamma \leq 1$ tel que les projecteurs biorthogonaux \vec{P}_j satisfont les estimations directes*

$$\|\vec{u} - \vec{P}_j \vec{u}\|_{(H^{1-\gamma}(\Omega))^d} \leq C_1 2^{-j\gamma} \|\vec{u}\|_{\vec{X}}, \text{ pour tout } \vec{u} \in \vec{X}, \quad (3.17)$$

et les espaces M_j les estimations inverses

$$\|p_j\|_{H^{\gamma}(\Omega)} \leq C_2 2^{j\gamma} \|p_j\|_M, \text{ pour tout } p_j \in M_j, \quad (3.18)$$

ce qui en particulier implique l'hypothèse de régularité $M_j \subset H^{\gamma}(\Omega)$ de la pression, alors il existe un entier $K \in \mathbb{N}^+$, indépendant de j , tel que le couple (\vec{X}_J, M_j) vérifie la condition LBB uniformément en j quelque soit $J \geq j + K$.

Preuve. La condition Inf-Sup pour le problème de Stokes sur $\vec{X} \times M$ équivaut, pour toute pression $p \in M$, à l'existence d'une vitesse $\vec{v} \in \vec{X}$ telle que $\nabla \cdot \vec{v} = p$ et $\|\vec{v}\|_{\vec{X}} \leq \|p\|_M$ (voir par exemple [17]). Pour une pression quelconque $p = p_j$ dans M_j , on pose, pour une telle vitesse \vec{v} ,

$$\vec{v}_J = \vec{P}_J \vec{v} \in \vec{X}_J$$

et l'on va estimer le terme $\frac{\langle \nabla \cdot (\vec{I} - \vec{P}_J) \vec{v}, p_j \rangle}{\|\vec{v}\|_{\vec{X}}}$ en utilisant les hypothèses d'estimations directes et inverses.

$$\begin{aligned} \langle \nabla \cdot (\vec{I} - \vec{P}_J) \vec{v}, p_j \rangle &\leq \|p_j\|_{H^\gamma(\Omega)} \|\nabla \cdot (\vec{I} - \vec{P}_J) \vec{v}\|_{H^\gamma(\Omega)} \\ &\leq \|p_j\|_{H^\gamma(\Omega)} \sup_{\phi \in \dot{H}^\gamma} \frac{\langle (\vec{I} - \vec{P}_J) \vec{v}, \vec{\nabla} \phi \rangle_{H_0^{1-\gamma}(\Omega)^d, H^{\gamma-1}(\Omega)^d}}{\|\phi\|_{H^\gamma}} \\ &\leq \|p_j\|_{H^\gamma(\Omega)} \|(\vec{I} - \vec{P}_J) \vec{v}\|_{H^{1-\gamma}(\Omega)^d} \leq C_1 C_2 2^{-(J-j)\gamma} \|p_j\|_M \|\vec{v}\|_{\vec{X}}. \end{aligned}$$

Ainsi pour toute pression $p_j \in M_j$

$$\langle \nabla \cdot \vec{v}_J, p_j \rangle \geq \|\vec{P}_J\|_{\vec{X}}^{-1} (1 - C_1 C_2 2^{-(J-j)\gamma}) \|\vec{v}_J\|_{\vec{X}} \|p_j\|_M. \quad (3.19)$$

Les projecteurs \vec{P}_J étant uniformément bornés dans \vec{X} , on conclut que pour $J - j$ tel que

$$C_1 C_2 2^{-(J-j)\gamma} < 1,$$

la condition LBB est vérifiée uniformément en j . \square

Dans le cadre de discrétisations en ondelettes, le projecteur biorthogonal \vec{P}_j vérifie classiquement les estimations (3.17) sur l'intervalle $\gamma \in [0, 1]$ et les estimations inverses pour M_j (3.18) sont vérifiées sur l'intervalle $\gamma \in [0, \sigma_2[$ où $H^{\sigma_2}(\Omega)$ désigne la régularité des ondelettes de pression.

On s'intéresse maintenant au cas d'une discrétisation non uniforme du problème de Stokes dans les bases d'ondelettes $(\vec{\Psi}_\nabla, \Psi_\nabla)$. Soit $\Lambda_p \subset \nabla$ un sous ensemble d'indices d'ondelettes de pression engendrant le sous espace M_{Λ_p} de M . On cherche à construire un ensemble d'indices d'ondelettes de vitesse

$$\Lambda_{\vec{u}} = \prod_{i=1}^d \Lambda_{u_i} \subset \vec{\nabla}$$

engendrant $\vec{X}_{\Lambda_{\vec{u}}}$ tel que le couple $(\vec{X}_{\Lambda_{\vec{u}}}, M_{\Lambda_p})$ vérifie la condition LBB uniformément en Λ_p .

Pour $K \in \mathbb{N}$, on définit $\Lambda_{\vec{u}}^K = \prod_{i=1}^d \Lambda_{u_i}^K$ où

$$\Lambda_{u_i}^K = \bigcup_{\lambda_p \in \Lambda_p} \left\{ \lambda_{u_i}, \text{Supp} \psi_{\lambda_{u_i}}^i \cap \text{Supp} \psi_{\lambda_p} \neq \emptyset \text{ et } |\lambda_{u_i}| \leq |\lambda_p| + K \right\}. \quad (3.20)$$

On aura recours à la version suivante du lemme de Schur dont la démonstration se trouve par exemple dans [81].

Lemme 3.1 (*lemme de Schur*): Soit $a = \{a_{i,j}\}_{(i,j) \in \mathbb{N}}$ une matrice bi-infinie, s'il existe un vecteur $\{\omega(i)\}_{i \in \mathbb{N}}$ et une constante C tels que $\omega(i) > 0$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et

$$\sum_{i \in \mathbb{N}} a_{i,j} \omega(i) \leq C \omega(j), \quad \sum_{j \in \mathbb{N}} a_{i,j} \omega(j) \leq C \omega(i),$$

alors la matrice a est uniformément bornée de $l^2(\mathbb{N})$ dans $l^2(\mathbb{N})$ avec une norme inférieure ou égale à C .

On note σ_p , $2 \leq p \leq \infty$ la borne supérieure de la régularité Sobolev $W^{\sigma_p, p}(\Omega)$ de M_j du moins si $M_j \subset L^p(\Omega)$. Dans tous les cas on supposera $\sigma_2 > 0$. Les ondelettes de vitesse $\psi_{\lambda_{u_i}}^i$ sont supposés avoir leurs $n_u \geq 1$ premiers moments nuls quelque soit $i = 1, \dots, d$.

Proposition 3.4 Soit $\alpha_p = \min(n_u + 1, \sigma_p) + \frac{d}{2} - \frac{d}{p}$. S'il existe un $p \geq 2$ tel que $\beta_p > 0$ où

(i) $\beta_p = \alpha_p - \frac{d}{2}$ en général,

(ii) $\beta_p = \alpha_p - \frac{d-1}{2}$ sous l'hypothèse supplémentaire que les ondelettes de pression sont polynômiales par morceaux de degré $\leq n_u - 1$,

alors pour K suffisamment grand, indépendant de Λ_p , la discrétisation $(\vec{X}_{\Lambda_{\vec{u}}^K}, M_{\Lambda_p})$ vérifie la condition LBB uniformément en Λ_p .

Preuve. Pour $\vec{w} = (w^i, i = 1, \dots, d)$ où $w^i = \sum_{\lambda_{u_i} \in \nabla_{u_i}} w_{\lambda_{u_i}}^i \psi_{\lambda_{u_i}}^i$, on notera en abrégé $w_{\lambda_{\vec{u}}} = (w_{\lambda_{u_i}}^i, i = 1, \dots, d)$ les coefficients d'ondelettes et $\sum_{\lambda_{\vec{u}} \in \nabla_{\vec{u}}} w_{\lambda_{\vec{u}}} \vec{\psi}_{\lambda_{\vec{u}}}$ la décomposition en ondelettes de \vec{w} . D'autre part, pour tout ensemble d'indices $\Lambda_{\vec{u}} \subset \nabla_{\vec{u}}$, on notera $\vec{Q}_{\Lambda_{\vec{u}}} \vec{w}$ la projection $\sum_{\lambda_{\vec{u}} \in \Lambda_{\vec{u}}} w_{\lambda_{\vec{u}}} \vec{\psi}_{\lambda_{\vec{u}}}$.

Comme dans le cas uniforme, pour toute pression $p \in M_{\Lambda_p} = \sum_{\lambda_p \in \Lambda_p} p_{\lambda_p} \psi_{\lambda_p}$, on considère la vitesse

$$\vec{v} = \sum_{\lambda_{\vec{u}} \in \Lambda_{\vec{u}}} v_{\lambda_{\vec{u}}} \vec{\psi}_{\lambda_{\vec{u}}} \in \vec{X}$$

telle que $\nabla \cdot \vec{v} = p$ et $\|\vec{v}\|_{\vec{X}} \leq \|p\|_M$. On cherche ensuite à estimer le terme

$$\langle \nabla \cdot \vec{v}, p \rangle - \langle \nabla \cdot \vec{Q}_{\Lambda_{\vec{u}}^K} \vec{v}, p \rangle = \langle \nabla \cdot \vec{Q}_{\nabla/\Lambda_{\vec{u}}^K} \vec{v}, p \rangle.$$

De la définition (3.20), quelque soient $\lambda_p \in \Lambda_p$ et $\lambda_{\vec{u}} \in \nabla/\Lambda_{\vec{u}}^K$, alors $|\langle \partial_{x_i} \psi_{\lambda_{u_i}}^i, \psi_{\lambda_p} \rangle| \neq 0$, $i = 1, \dots, d$ seulement si $|\lambda_{u_i}| > |\lambda_p| + K$, et dans ce cas de figure on a l'estimation classique

$$|\langle \partial_{x_i} \psi_{\lambda_{u_i}}^i, \psi_{\lambda_p} \rangle| \lesssim 2^{|\lambda_{u_i}|} 2^{-(|\lambda_{u_i}| - |\lambda_p|) \alpha_p} \chi_{\text{Supp} \psi_{\lambda_{u_i}}^i \cap \text{Supp} \psi_{\lambda_p}}$$

où α_p est défini dans l'énoncé et χ_S est la fonction caractéristique de l'ensemble S . Il reste à appliquer le lemme de Schur à la matrice bi-infinie a définie comme suit sur l'ensemble d'indices $\nabla_i \times \nabla$ (les indices sont ordonnés par échelle croissante $|\lambda|$ et les termes manquant en espace $a_{\lambda_{u_i}, \lambda_p}$ sont remplacés par 0 de sorte que l'on peut considérer en fait que les ensembles ∇_i et ∇ coïncident).

$$a_{\lambda_{u_i}, \lambda_p} = \begin{cases} 2^{-|\lambda_{u_i}|} |\langle \partial_{x_i} \psi_{\lambda_{u_i}}^i, \psi_{\lambda_p} \rangle| & \text{si } \lambda_{u_i} \in \nabla_i / \Lambda_{u_i}^K \text{ et } \lambda_p \in \Lambda_p \\ \text{sinon } 0. \end{cases}$$

Posant $\omega(\lambda) = 2^{-\theta|\lambda|}$ dans le lemme de Schur, le paramètre θ est choisi de façon à obtenir la meilleure estimation de la norme $\|a\|_{l_2(\nabla)}$. La première somme du lemme se majore alors par

$$\sum_{\lambda_p \in \nabla} a_{\lambda_{u_i}, \lambda_p} 2^{-\theta|\lambda_p|} \lesssim \left(\sum_{j>K} 2^{-(\alpha_p - \theta)j} \right) 2^{-\theta|\lambda_{u_i}|} \lesssim \left(2^{-(\alpha_p - \theta)K} \right) 2^{-\theta|\lambda_{u_i}|},$$

tandis que pour la seconde on distingue le cas général (i) pour lequel

$$\sum_{\lambda_{u_i} \in \nabla_i} a_{\lambda_{u_i}, \lambda_p} 2^{-\theta|\lambda_{u_i}|} \lesssim \left(\sum_{j>K} 2^{-(\alpha_p + \theta - d)j} \right) 2^{-\theta|\lambda_p|} \lesssim \left(2^{-(\alpha_p + \theta - d)K} \right) 2^{-\theta|\lambda_p|},$$

et l'hypothèse (ii) pour laquelle on exploite l'annulation des termes $a_{\lambda_{u_i}, \lambda_p}$ lorsque le support de l'ondelette $\psi_{\lambda_{u_i}}^i$ n'intersecte pas le support singulier de ψ_{λ_p} . Ainsi on obtient

$$\sum_{\lambda_{u_i} \in \nabla_i} a_{\lambda_{u_i}, \lambda_p} 2^{-\theta|\lambda_{u_i}|} \lesssim \left(\sum_{j>K} 2^{-(\alpha_p + \theta - (d-1))j} \right) 2^{-\theta|\lambda_p|} \lesssim \left(2^{-(\alpha_p + \theta - (d-1))K} \right) 2^{-\theta|\lambda_p|}.$$

On conclut que le choix optimal du paramètre θ est égal à $\frac{d}{2}$ dans le premier cas (i) et à $\frac{d-1}{2}$ dans le second (ii), ce qui donne l'estimation $\|a\|_{l_2(\nabla)} \lesssim 2^{-\beta_p K}$. La démonstration s'achève en arguant de la stabilité des décompositions multi-échelles (3.15) et (3.16) et en particulier aussi de l'uniforme stabilité des projecteurs $\vec{Q}_{\Lambda_{\frac{d}{2}}^K}$. On obtient

$$|\langle \nabla \cdot \vec{Q}_{\vec{\chi}/\Lambda_{\frac{d}{2}}^K} \vec{v}, p \rangle| = |\langle \nabla \cdot \vec{v}, p \rangle - \langle \nabla \cdot \vec{Q}_{\Lambda_{\frac{d}{2}}^K} \vec{v}, p \rangle| \leq C 2^{-\beta_p K} \|\vec{v}\|_{\vec{\chi}} \|p\|_M$$

et donc

$$\begin{aligned} |\langle \nabla \cdot \vec{Q}_{\Lambda_{\frac{d}{2}}^K} \vec{v}, p \rangle| &\geq |\langle \nabla \cdot \vec{v}, p \rangle| - |\langle \nabla \cdot \vec{v}, p \rangle - \langle \nabla \cdot \vec{Q}_{\Lambda_{\frac{d}{2}}^K} \vec{v}, p \rangle| \\ &\geq (1 - C 2^{-\beta_p K}) \|\vec{v}\|_{\vec{\chi}} \|p\|_M \\ &\gtrsim (1 - C 2^{-\beta_p K}) \|\vec{Q}_{\Lambda_{\frac{d}{2}}^K} \vec{v}\|_{\vec{\chi}} \|p\|_M. \end{aligned}$$

□

Remarque 3.4 En particulier la proposition 3.4 s'applique pour la discrétisation éléments finis du problème de Stokes $(\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_1)$ (avec pression continue) ou $(\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_0)$, avec dans le premier cas $\beta = \frac{3}{2}$ et dans le second $\beta = \frac{1}{2}$.

Proposition 3.5 *Sous l'hypothèse de structure d'arbre minimale suivante de l'ensemble d'indices Λ_p :*

$$\forall \lambda_p \in \Lambda_p, \exists \lambda'_p \in \Lambda_p : |\lambda'_p| = |\lambda_p| - 1 \text{ et } \text{Supp} \psi_{\lambda_p} \subset \text{Supp} \psi_{\lambda'_p},$$

alors l'ensemble d'indices d'ondelettes de vitesse $\Lambda_{\vec{u}}^K$ (3.20) vérifie

$$\#\Lambda_{\vec{u}}^K \lesssim 2^{Kd} \#\Lambda_p$$

avec une constante indépendante de K et de Λ_p .

Preuve. Il suffit de compter les ondelettes de vitesse que l'on rajoute pour chaque ondelette ψ_{λ_p} par ordre décroissant de l'échelle $|\lambda_p|$. Celles d'échelles $|\lambda_{u_i}| \geq |\lambda_p|$ sont au nombre de $\sim 2^{Kd}$. Les autres sont celles d'échelles $|\lambda_{u_i}| < |\lambda_p|$ dont les supports intersectent le support de ψ_{λ_p} . Or par l'hypothèse de structure d'arbre précédente, il est inutile de les décompter à ce stade car elles seront prises en compte lors du décompte aux échelles $|\lambda'_p| < |\lambda_p|$. \square

Remarque 3.5 *Si l'on suppose en outre que la discrétisation uniforme (\vec{X}_{j+K_0}, M_j) satisfait la condition LBB uniformément en j , alors la proposition 3.4 reste vraie (avec éventuellement une autre valeur de K) en tronquant l'ensemble $\Lambda_{\vec{u}}^K$ à l'échelle $J = \max_{\lambda_p \in \Lambda_p} |\lambda_p| + K_0$ dans la définition (3.20). En particulier c'est le cas des discrétisations éléments finis $\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_1$ et $\mathbb{P}_1 - \mathbb{P}_0$ avec $K_0 = 1$ (voir par exemple [58], [17], [86] pour l'analyse de la condition LBB en éléments finis).*

Preuve. Si la condition LBB est vérifiée uniformément en J pour la discrétisation (\vec{X}_{J+K_0}, M_J) , alors pour toute pression $p \in M_{\Lambda_p}$ il existe une vitesse $\vec{v}_J \in \vec{X}_J$ telle que $\langle \nabla \cdot \vec{v}_J, p \rangle = \|p\|_M^2$ et $\|\vec{v}_J\|_{\vec{X}} \lesssim \|p\|_M$. La preuve de la proposition 3.4 s'applique alors en remplaçant \vec{v} par \vec{v}_J . \square

Remarque 3.6 *Dans la définition de (3.20) on aurait pu aussi considérer la troncature en échelle*

$$\| |\lambda_{u_i}| - |\lambda_p| \| \leq K$$

au lieu de $|\lambda_{u_i}| \leq |\lambda_p| + K$. Il faut alors faire des hypothèses supplémentaires sur la régularité de la vitesse et le nombre de moments nuls des ondelettes de pression pour obtenir la condition LBB uniforme.

Soit τ_p la borne supérieure de la régularité de la vitesse dans $W^{s,p}$ et n_p le nombre de moments nuls de la pression, alors la proposition 3.4 reste vraie en posant cette fois pour (i)

$$\alpha_p = \min(n_u + 1, \sigma_p, n_p, \tau_p - 1) + \frac{d}{2} - \frac{d}{p}$$

et en supposant en outre pour (ii) que les ondelettes de vitesse sont des polynômes par morceaux de degré au plus $n_p - 1$. Dans ce cas,

$$\#\Lambda_{\vec{u}}^K \lesssim 2^{Kd} \#\Lambda_p$$

sans aucune hypothèse sur Λ_p .

Le rapport $\#\Lambda_{\vec{u}}^K / \#\Lambda_p$ croît avec K comme 2^K et avec la taille du support des ondelettes. Malgré son optimalité asymptotique, le résultat général de la proposition 3.4 est de ce fait en toute rigueur inapplicable.

Un objectif raisonnable serait d'obtenir, dans la définition de l'ensemble $\Lambda_{\vec{u}}^K$, un raffinement en échelle d'au plus un niveau $K \leq 1$ et en outre d'affaiblir considérablement la contrainte sur les supports $\text{Supp}\psi_{\lambda_{u_i}}^i \cap \text{Supp}\psi_{\lambda_p} \neq \emptyset$.

Dans les deux paragraphes suivants, on va considérer deux discrétisations spécifiques pour lesquelles grossièrement il suffira de rajouter au voisinage de chaque ondelette de pression, d (§3.4) et une (§3.5) ondelette(s) de vitesse de même échelle, pour obtenir la condition LBB.

3.4 Première famille de discrétisations

On rappelle la construction introduite dans [42] qui s'applique à une discrétisation uniforme du problème de Stokes sur les domaines tensoriels $]0, 1[^d$, puis on étudie son adaptation au cas de discrétisations non uniformes.

Le lemme de Fortin suivant [17] énonce une condition nécessaire et suffisante pour que la discrétisation $(\vec{X}_h \subset \vec{X}, M_h \subset M)$ satisfasse la condition LBB uniforme.

Lemme 3.2 *La condition LBB est satisfaite uniformément si et seulement si il existe des opérateurs linéaires \vec{O}_h de \vec{X} dans \vec{X}_h , uniformément bornés dans \vec{X} et tels que*

$$\langle \nabla \cdot (\vec{I} - \vec{O}_h)\vec{v}, q_h \rangle = 0 \forall \vec{v} \in \vec{X} \text{ et } q_h \in M_h \quad (3.21)$$

La construction de [42] utilise de façon essentielle les propriétés de dérivation/intégration des AMR biorthogonales du §3.2 et la biorthogonalité, afin d'engendrer une discrétisation vitesse-pression (\vec{X}_j, M_j) , telle que le projecteur biorthogonal \vec{O}_j associé à la vitesse vérifie naturellement les hypothèses du lemme de Fortin. On commence par décrire la construction dans le cas simple des conditions aux limites périodiques puis on rappelle les adaptations nécessaires à la prise en compte des conditions aux limites sur $]0, 1[^d$.

Dans les deux cas, en suivant les idées de [11], on étend la construction au cas de discrétisations non uniformes.

Dans un souci d'économie de notations, les constructions sont présentées en dimension 2, leur extension aux dimensions supérieures étant dans tous les cas immédiates.

Cas périodique

Soit le couple de générateurs biorthogonaux $(\phi, \tilde{\phi})$ sur \mathbb{R} de régularités dans $H^s(\mathbb{R})$ notées τ et $\tilde{\tau}$ telles que $\tau > 1$ et $\tilde{\tau} > 1$ et d'ordres d'approximation $n \geq 1, \tilde{n} \geq 2$. D'après la proposition 3.1, on peut définir, par dérivation/intégration, un nouveau couple de générateurs biorthogonaux $(\phi^i, \tilde{\phi}^d)$ de régularités $\tau + 1$ et $\tilde{\tau} - 1$ et d'ordres d'approximation $n + 1, \tilde{n} - 1$.

On notera (V_j^p, \tilde{V}_j^p) et $(V_j^{i,p}, \tilde{V}_j^{d,p})$ les AMR périodisées sur le tore \mathbb{T} associées à ces générateurs, $(P_j, \tilde{P}_j), (P_j^i, \tilde{P}_j^d)$ les projecteurs biorthogonaux et $(W_j^p, \tilde{W}_j^p), (W_j^{i,p}, \tilde{W}_j^{d,p})$ les espaces d'ondelettes.

En considérant le problème de Stokes sur le tore \mathbb{T}^d , on rappelle la proposition suivante de [42]. La preuve, simple, est donnée pour la commodité du lecteur.

Proposition 3.6 *La discrétisation*

$$\begin{cases} \vec{X}_j = \overline{(V_j^{i,p} \otimes V_j^p, V_j^p \otimes V_j^{i,p})} \subset \vec{X} \\ M_j = \tilde{V}_j^p \otimes \tilde{V}_j^p \subset M \end{cases} \quad (3.22)$$

satisfait la condition LBB uniformément en j .

Preuve. Soit le projecteur biorthogonal $\vec{\mathcal{O}}_j = (P_j^i \otimes P_j, P_j \otimes P_j^i)$. On va montrer qu'il satisfait toutes les hypothèses du lemme de Fortin.

Les projecteurs biorthogonaux sur le tore \mathbb{T}^1 préservent la valeur moyenne nulle dans la mesure où leur adjoint reproduit les constantes. On en déduit que $\vec{\mathcal{O}}_j$ est un projecteur biorthogonal uniformément stable de \vec{X} sur \vec{X}_j . La propriété (3.21) du lemme se déduit de la formule de commutation (3.9) et de la biorthogonalité: pour tout $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \vec{X}$ et quelque soit $q_j \in M_j$

$$\begin{aligned} \langle \nabla \cdot \vec{\mathcal{O}}_j \vec{v}, q_j \rangle &= \langle P_j \otimes P_j \partial_{x_1} v_1 + P_j \otimes P_j \partial_{x_2} v_2, q_j \rangle \\ &= \langle \nabla \cdot \vec{v}, \tilde{P}_j \otimes \tilde{P}_j q_j \rangle \\ &= \langle \nabla \cdot \vec{v}, q_j \rangle. \end{aligned}$$

□

Remarque 3.7 *La discrétisation (3.22) génère un ordre d'approximation $\min(n - 1, \tilde{n})$ du problème de Stokes au sens des estimations a priori*

$$\begin{aligned} \|\vec{u} - \vec{u}_j\|_{\vec{X}} &\lesssim 2^{-js_u} \|u\|_{H^{s_u+1}} \forall s_u \leq n - 1. \\ \|p - p_j\|_M &\lesssim 2^{-js_u} \|u\|_{H^{s_u+1}} + 2^{-js_p} \|p\|_{H^{s_p}}, \forall s_u \leq n - 1 \text{ et } s_p \leq \tilde{n} \end{aligned}$$

où l'on notera que l'erreur de consistance (cf (3.6)) est dans ce cas présente nulle.

Preuve. Soient $D_j = \nabla \cdot \vec{X}_j$ et $\vec{V}_j = \{\vec{v}_j \in \vec{X}_j, \langle \nabla \cdot \vec{v}_j, q_j \rangle = 0, \forall q_j \in M_j\}$. Pour cette discrétisation sur le tore \mathbb{T}^d , la propriété de conformité $\vec{V}_j \subset \vec{V}$ est vérifiée, comme on le déduit facilement de la condition LBB et de l'égalité des dimensions des espaces D_j et M_j . Les estimations d'erreurs sont alors classiquement déduites des résultats généraux abstraits (3.6, 3.7), où l'erreur de consistance est ici nulle. \square

Dans le cas périodique, nous allons étendre le résultat précédent au cas d'une discrétisation non uniforme est immédiate. Soient les ensembles $\nabla_j := \{0, \dots, 2^j - 1\}$ et $\mathcal{E} := \{(0,1), (1,0), (1,1)\}$.

Pour des générateurs sur la droite réelle (ϕ^1, ψ^1) , (ϕ^2, ψ^2) , et $k_\varepsilon \in \nabla_j$, $j \in \mathbb{N}_+$, on notera $\psi_{j,k_1,k_2,(0,1)} = \phi_{j,k_1}^{1,p} \otimes \psi_{j,k_2}^{2,p}$, $\psi_{j,k_1,k_2,(1,0)} = \psi_{j,k_1}^{1,p} \otimes \phi_{j,k_2}^{2,p}$ et $\psi_{j,k_1,k_2,(1,1)} = \psi_{j,k_1}^{1,p} \otimes \psi_{j,k_2}^{2,p}$, les ondelettes tensorielles isotropes sur le tore \mathbb{T}^2 . Alors l'ensemble

$$\nabla := \left(\bigcup_{j \in \mathbb{N}_+} \{j\} \times \nabla_j \times \nabla_j \right) \times \mathcal{E}, \quad (3.23)$$

désigne l'ensemble des indices d'ondelettes isotropes de valeur moyenne nulle.

De même soit $\nabla^1 := \{-1\} \bigcup_{j \in \mathbb{N}_+} \{j\} \times \nabla_j$ l'ensemble des indices d'ondelettes périodiques sur le tore \mathbb{T}^1 , où par convention $\psi_{\lambda_1} = 1$ pour $\lambda_1 = -1$ et $\psi_{\lambda_1} = \psi_{j,k}^p$ pour $\lambda_1 = (j,k)$. Alors

$$\nabla := \nabla^1 \times \nabla^1 / \{-1, -1\} \quad (3.24)$$

désigne l'ensemble des indices d'ondelettes anisotropes de valeur moyenne nulle.

Dans les deux cas, avec des notations immédiates, pour $\lambda_p \in \nabla$, on notera $(\tilde{\psi}_{\lambda_p}, \psi_{\lambda_p})$ les ondelettes biorthogonales de pression et pour $\lambda_{\vec{u}} = (\lambda_{u_1}, \lambda_{u_2}) \in \nabla \times \nabla$, $(\vec{\psi}_{\lambda_{\vec{u}}} = (\psi_{\lambda_{u_1}}, \psi_{\lambda_{u_2}}), \tilde{\vec{\psi}}_{\lambda_{\vec{u}}} = (\tilde{\psi}_{\lambda_{u_1}}, \tilde{\psi}_{\lambda_{u_2}}))$ les ondelettes biorthogonales de vitesse.

Etant donné l'ensemble $\Lambda_p \subset \nabla$ engendrant l'espace

$$M_{\Lambda_p} = S\{\tilde{\psi}_{\lambda_p}, \lambda_p \in \Lambda_p\} \subset M,$$

on cherche à construire l'ensemble minimal d'indices d'ondelettes de vitesse $\Lambda_{\vec{u}} = \Lambda_{u_1} \times \Lambda_{u_2} \subset \nabla \times \nabla$ engendrant l'espace

$$\vec{X}_{\Lambda_{\vec{u}}} = S\{\vec{\psi}_{\lambda_{\vec{u}}}, \lambda_{\vec{u}} \in \Lambda_{\vec{u}}\} \subset \vec{X},$$

tel que le projecteur biorthogonal

$$\vec{O}_{\Lambda_{\vec{u}}} \vec{u} = (\mathcal{O}_{\Lambda_{u_1}} u_1, \mathcal{O}_{\Lambda_{u_2}} u_2) := \left(\sum_{\lambda_{u_1} \in \Lambda_{u_1}} \langle u_1, \tilde{\psi}_{\lambda_{u_1}} \rangle \psi_{\lambda_{u_1}}, \sum_{\lambda_{u_2} \in \Lambda_{u_2}} \langle u_2, \tilde{\psi}_{\lambda_{u_2}} \rangle \psi_{\lambda_{u_2}} \right) \quad (3.25)$$

de \vec{X} sur $\vec{X}_{\Lambda_{\vec{u}}}$ satisfasse les propriétés du lemme de Fortin. C'est une condition suffisante d'obtention de la condition LBB uniformément en Λ_p .

Proposition 3.7 *Cet ensemble minimal est défini par*

$$\begin{cases} \Lambda_{u_1} = \Lambda_p \cup \{(j, (k_1 + 1)[2^j], k_2, (0,1)) \text{ t.q. } (j, k_1, k_2, (0,1)) \in \Lambda_p\} \\ \Lambda_{u_2} = \Lambda_p \cup \{(j, k_1, (k_2 + 1)[2^j], (1,0)) \text{ t.q. } (j, k_1, k_2, (1,0)) \in \Lambda_p\} \end{cases} \quad (3.26)$$

dans le cas des ondelettes isotropes (3.23) et par

$$\Lambda_{u_1} = \Lambda_{u_2} = \Lambda_p, \quad (3.27)$$

pour les ondelettes anisotropes (3.24). En particulier $\#\Lambda_{\vec{u}} = 2\#\Lambda_p$ ($d\#\Lambda_p$ en dimension d) dans le cas anisotrope alors que $\#\Lambda_{\vec{u}} \leq 3\#\Lambda_p$ ($(2d-1)\#\Lambda_p$ en dimension d) dans le cas isotrope.

Preuve. L'ensemble minimal $\Lambda_{\vec{u}}$ tel que le projecteur $\vec{O}_{\Lambda_{\vec{u}}}$ satisfait les hypothèses du lemme de Fortin est donné par

$$\begin{cases} \Lambda_{u_1} = \{\lambda_{u_1} : \exists \lambda_p \in \Lambda_p \langle \partial_x \psi_{\lambda_{u_1}}, \tilde{\psi}_{\lambda_p} \rangle \neq 0\} \\ \Lambda_{u_2} = \{\lambda_{u_2} : \exists \lambda_p \in \Lambda_p \langle \partial_y \psi_{\lambda_{u_2}}, \tilde{\psi}_{\lambda_p} \rangle \neq 0\} \end{cases} \quad (3.28)$$

L'assertion découle alors directement de la proposition 3.1. \square

Remarque 3.8 On verra au §3.5, dans le cas particulier d'ondelettes orthogonales (i.e. $\phi = \tilde{\phi}$), que ces ensembles ne sont pas optimaux dans le sens où ce ne sont pas les ensembles minimaux tels que la condition LBB soit satisfaite uniformément en Λ_p .

Domaines tensoriels $]0, 1[^d$

On reprend les hypothèses du paragraphe précédent sur les générateurs biorthogonaux. La prise en compte des conditions aux limites non périodiques pour la vitesse et la pression nécessite l'introduction de 3 AMR biorthogonales distinctes. Avec les notations de la proposition 3.2 on va considérer les couples d'AMR

$$\begin{cases} (V_j^\delta, \tilde{V}_j^\delta) \subset (H^1(]0, 1[), H^1(]0, 1[)) \\ (V_j^{0,\delta-1}, \tilde{V}_j^\delta) \subset (H_0^1(]0, 1[), H^1(]0, 1[)) \\ (V_j^{i,0,\delta}, \tilde{V}_j^{d,\delta}) \subset (H_0^1(]0, 1[), L^2(]0, 1[)). \end{cases} \quad (3.29)$$

Ils définissent des AMR biorthogonales sur l'intervalle si et seulement si les hypothèses de la proposition 1.7 sont vérifiées pour les deux premiers couples, ce que l'on supposera toujours par la suite. Il résulte alors de la remarque 3.2 que ces hypothèses sont aussi satisfaites pour le troisième couple.

On notera (P_j, \tilde{P}_j) , $(P_j^0, \tilde{P}_j^\#)$, (P_j^i, \tilde{P}_j^d) , les couples de projecteurs biorthogonaux associés et (W_j, \tilde{W}_j) , $(W_j^0, \tilde{W}_j^\#)$, (W_j^i, \tilde{W}_j^d) les espaces d'ondelettes. Moyennant ces adaptations, le résultat de la proposition 3.6 sur le tore \mathbb{T}^d s'étend aux domaines tensoriels [42]. La preuve est rappelée pour une meilleure compréhension de l'analyse des discrétisations non uniformes qui va suivre.

Proposition 3.8 *La discrétisation*

$$\begin{cases} \vec{X}_j = (V_j^{i,0,\delta} \otimes V_j^{0,\delta-1}, V_j^{0,\delta-1} \otimes V_j^{i,0,\delta}), \\ M_j = \tilde{V}_j^\delta \otimes \tilde{V}_j^\delta, \end{cases} \quad (3.30)$$

satisfait la condition LBB uniformément en j et vérifie les estimations d'erreurs a priori

$$\|\vec{u} - \vec{u}_j\|_{\vec{X}} + \|p - p_j\|_M \lesssim 2^{-js_u} \|u\|_{H^{s_u+1}} + 2^{-js_p} \|p\|_{H^{s_p}}, \forall s_u \leq n-1, s_p \leq \tilde{n}.$$

Preuve. Comme dans le cas périodique on va montrer que le projecteur biorthogonal

$$\vec{\mathcal{O}}_j = (P_j^i \otimes P_j^0, P_j^0 \otimes P_j^i)$$

de \vec{X} sur \vec{X}_j , uniformément stable en norme \vec{X} , satisfait l'hypothèse (3.21) du lemme de Fortin. Pour tout $\vec{v} = (v_1, v_2) \in \vec{X}$ et quelque soit $q_j \in M_j$ on a d'après la proposition 3.2

$$\begin{aligned} \langle \nabla \cdot \vec{\mathcal{O}}_j \vec{v}, q_j \rangle &= \langle P_j \otimes P_j^0 \partial_{x_1} v_1 + P_j^0 \otimes P_j \partial_{x_2} v_2, q_j \rangle \\ &= \langle \partial_{x_1} v_1, \tilde{P}_j^\# \otimes \tilde{P}_j q_j \rangle + \langle \partial_{x_2} v_2, \tilde{P}_j \otimes \tilde{P}_j^\# q_j \rangle \\ &= \langle \nabla \cdot \vec{v}, q_j \rangle. \end{aligned}$$

On voit qu'il est essentiel que l'AMR duale de $V_j^{0,\delta-1}$ (i.e. l'image du projecteur $\tilde{P}_j^\#$) soit égale à \tilde{V}_j^δ . Les estimations d'erreurs découlent directement des estimations générales (3.6, 3.7). \square

Remarque 3.9 Contrairement au cas des conditions aux limites périodiques, la dimension de l'espace $D_j = \nabla \cdot \vec{X}_j$ est ici strictement supérieure à celle de l'espace M_j . Ainsi le sous espace des vitesses à divergence discrète nulle $\vec{V}_j = \{\vec{v}_j \in \vec{X}_j, \langle \nabla \cdot \vec{v}_j, q_j \rangle = 0, \forall q_j \in M_j\}$ n'est plus un sous espace de \vec{V} et l'erreur d'approximation de la vitesse dépend de l'approximation de la pression.

Les expériences numériques du §3.8 mettront en évidence que cette erreur de consistance se trouve en fait concentrée sur un voisinage de largeur 2^{-j} de la frontière. Cette propriété repose heuristiquement sur le fait que l'approximation dans $\vec{V}_j \cap \vec{V}$ des vitesses à divergence nulle est optimale en dehors d'un voisinage de largeur 2^{-j} de la frontière. Une démonstration rigoureuse nécessiterait d'étendre les estimations intérieures de [84] à la formulation variationnelle non conforme de la vitesse sur \vec{V}_j .

L'extension de la proposition 3.7 au cas de conditions aux limites non périodiques est rendue plus délicate du fait des conditions aux limites sur l'AMR $V_j^{0,\delta-1}$. Étant donnée les AMR primales \vec{X}_j et M_j de la proposition 3.8, les ondelettes de vitesse sont définies par l'AMR duale

$$\tilde{\vec{X}}_j = (\tilde{V}_j^{d,\delta} \otimes \tilde{V}_j^\delta, \tilde{V}_j^\delta \otimes \tilde{V}_j^{d,\delta}), \quad (3.31)$$

et les ondelettes de pression par l'AMR duale

$$\widetilde{M}_j = \overline{V_j^\delta \otimes V_j^\delta}. \quad (3.32)$$

Elles sont bien sûr obtenues par produit tensoriel d'ondelettes et de fonctions d'échelle sur l'intervalle. Soient les bases d'ondelettes sur l'intervalle $\Psi_j^i = \{\psi_{j,k}^i, k \in \nabla_j\}$, $\Psi_j^0 = \{\psi_{j,k}^0, k \in \nabla_j\}$, $\tilde{\Psi}_j = \{\tilde{\psi}_{j,k}, k \in \nabla_j\}$ des espaces W_j^i , W_j^0 et \widetilde{W}_j . Il est possible de choisir les bases Ψ_j^i et $\tilde{\Psi}_j$ telles que les bases multiéchelles

$$\frac{d}{dx} \bigcup_{j \geq j_0} \Psi_j^i \text{ et } \bigcup_{j \geq j_0} \tilde{\Psi}_j$$

soient biorthogonales. Cependant, du fait que $\widetilde{W}_j^\# = \widetilde{V}_{j+1}^\delta \cap (V_j^{0,\delta-1})^\perp$ diffère de $\widetilde{W}_j = \widetilde{V}_{j+1}^\delta \cap (V_j^\delta)^\perp$, les bases Ψ_j^0 ne peuvent être construites telles que les bases multiéchelles

$$\bigcup_{j \geq j_0} \Psi_j^0 \text{ et } \bigcup_{j \geq j_0} \tilde{\Psi}_j$$

soient biorthogonales. Ainsi, par rapport au cas périodique, il va falloir rajouter des ondelettes supplémentaires de vitesse dans l'ensemble $\Lambda_{\vec{u}}$ afin que le projecteur biorthogonal $\vec{\mathcal{O}}_{\Lambda_{\vec{u}}}$ (3.25), satisfasse les hypothèses du lemme de Fortin. Ces ondelettes se déduiront facilement du lemme suivant.

On appelle “ondelettes frontière”, en abrégé b.w., (resp. “fonctions d'échelle frontière” en abrégé b.s.f.) sur le domaine $[0, 1]^d$, les ondelettes de base tensorielles (resp. les fonctions d'échelle tensorielles) qui ne sont pas des ondelettes de base tensorielles (resp. des fonctions d'échelle tensorielles) sur \mathbb{R}^d . Dans le cas de bases isotropes, ces ondelettes et fonctions d'échelle sont bien sûr localisées dans un voisinage de largeur 2^{-j} de la frontière où j est l'échelle de l'ondelette considérée. Les autres fonctions de base seront qualifiées d'ondelettes ou fonctions d'échelle “intérieures”.

Lemme 3.3 *On note Φ_j^0 et Ψ_j^0 les bases de fonctions d'échelle et d'ondelettes des espaces $V_j^{0,\delta-1}$ et W_j^0 et $\tilde{\Psi}_j$ la base d'ondelettes de \widetilde{W}_j .*

Soient $\tilde{\psi}_{j,k} \in \tilde{\Psi}_j$ et $\psi_{j',k'}^0 \in \Psi_{j'}^0$, où $j \geq j_0$ et $j' \geq j_0$, si $\langle \tilde{\psi}_{j,k}, \psi_{j',k'}^0 \rangle \neq 0$ alors

$$\begin{cases} j = j' \text{ et } k = k' \text{ ou} \\ j' \leq j \text{ et } \psi_{j,k} \text{ et } \psi_{j',k'}^0 \text{ sont des b.w. associées à la même extrémité } 0 \text{ ou } 1. \end{cases}$$

De même soient $\tilde{\psi}_{j,k} \in \tilde{\Psi}_j$ et $\varphi_{j',k'}^0 \in \Phi_{j'}^0$, telles que $j_0 \leq j' \leq j$. Si $\langle \tilde{\psi}_{j,k}, \varphi_{j',k'}^0 \rangle \neq 0$, alors $\tilde{\psi}_{j,k}$ et $\varphi_{j',k'}^0$ sont des b.w. et b.s.f. associées à la même extrémité.

Preuve. Si $j' > j$ alors $\widetilde{W}_j \subset \widetilde{V}_{j+1}^\delta \subset \widetilde{V}_{j'}^\delta \perp W_{j'}^0$ et donc le produit scalaire $\langle \tilde{\psi}_{j,k}, \psi_{j',k'}^0 \rangle$ est nul. Si $j' = j$ et $k \neq k'$, ce produit scalaire est non nul seulement si les ondelettes sont des b.w. associées à la même extrémité, puisque d'une

part Ψ_j^0 est biorthogonal à $\tilde{\Psi}_j^\sharp$ et d'autre part les bases $\tilde{\Psi}_j^\sharp$ et $\tilde{\Psi}_j$ coïncident sauf aux extrémités 0 et 1. Enfin si $j' < j$, alors $W_{j'}^0 \subset V_j(\mathbb{R})|_{]0,1[} \perp (\widetilde{W}_j \cap \widetilde{W}_j(\mathbb{R}))$ et $W_{j'} \cap W_{j'}(\mathbb{R}) \subset V_j^{int,\delta} \perp \widetilde{W}_j$ ce qui termine la preuve de la première propriété.

Pour la seconde, il suffit de noter que d'une part $(\widetilde{W}_j \cap \widetilde{W}_j(\mathbb{R})) \perp V_{j'}^{0,\delta-1}$ et d'autre part $V_{j'}^{int,\delta} \subset V_j^{int,\delta} \perp \widetilde{W}_j$. \square

Les ondelettes de vitesse issues de la définition (3.28) de l'ensemble $\Lambda_{\vec{a}}$ se déduisent facilement du lemme précédent. Pour les ondelettes ou fonctions d'échelle de pression "intérieures", il va suffire d'inclure les mêmes ondelettes de vitesse "intérieures" données par la proposition 3.7 (dans les deux cas isotropes ou anisotropes). Pour une ondelette ou fonction d'échelle de pression "frontière", il faut rajouter l'ensemble des ondelettes de vitesse frontières aux échelles inférieures et situées dans un voisinage de l'ondelette de pression. Ceci est précisé en dimension 2 par la proposition suivante dont la conclusion principale est que, sous une hypothèse de structure d'arbre minimale de l'ensemble d'indices Λ_p , au voisinage de la frontière seulement, le rapport $\#\Lambda_p/\#\Lambda_{\vec{a}}$ reste toujours borné par d dans le cas anisotrope et par $(2d - 1)$ dans le cas isotrope. Dans les exemples concrets il devrait dans tous les cas être proche de d .

Proposition 3.9 *On appelle indice "frontière" (en abrégé b.s.) k d'une ondelette ou fonction d'échelle de base sur l'intervalle, un indice k associé à une ondelette $\psi_{j,k}$ ou une fonction d'échelle $\varphi_{j,k}$ frontière. Dans cette proposition les indices frontière des paires (k_1, k'_1) ou (k_2, k'_2) seront toujours implicitement associés aux mêmes extrémités 0 ou 1.*

Dans le cas anisotrope l'ensemble minimal $\Lambda_{\vec{a}}$ de la définition s'écrit pour la première composante Λ_{u_1}

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \tilde{\varphi}_{j_0, k_1} \otimes \tilde{\psi}_{j_2, k_2} \in M_{\Lambda_p}, \varphi_{j_0, k'_1}^i \otimes \psi_{j_2, k'_2}^0 \in X_{\Lambda_{u_1}} \text{ pour} \\ \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{si } k_1 \text{ b.s., } k'_1 \text{ b.s.; sinon } k'_1 = k_1, k_1 + 1, \\ \text{si } k_2 \text{ b.s., } j'_2 \leq j_2, k'_2 \text{ b.s.; sinon } j'_2 = j_2, k'_2 = k_2. \end{array} \right. \\ \forall \tilde{\psi}_{j_1, k_1} \otimes \tilde{\varphi}_{j_0, k_2} \in M_{\Lambda_p}, \psi_{j_1, k_1}^i \otimes \varphi_{j_0, k_2}^0 \in X_{\Lambda_{u_1}}. \\ \forall \tilde{\psi}_{j_1, k_1} \otimes \tilde{\psi}_{j_2, k_2} \in M_{\Lambda_p}, \psi_{j_1, k_1}^i \otimes \psi_{j_2, k'_2}^0 \in X_{\Lambda_{u_1}} \text{ pour} \\ \quad \text{si } k_2 \text{ b.s., } j'_2 \leq j_2, k'_2 \text{ b.s.; sinon } j'_2 = j_2, k'_2 = k_2. \end{array} \right.$$

et symétriquement pour la deuxième composante Λ_{u_2} . Dans le cas anisotrope cet

ensemble $\Lambda_{\vec{u}}$ s'écrit pour la première composante

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \tilde{\varphi}_{j,k_1} \otimes \tilde{\psi}_{j,k_2} \in M_{\Lambda_p} \left\{ \begin{array}{l} \varphi_{j',k'_1}^i \otimes \psi_{j',k'_2}^0 \in X_{\Lambda_{u_1}} \text{ pour} \\ \left\{ \begin{array}{l} \text{si } k_2 \text{ b.s., } j' < j, k'_2 \text{ b.s., } k'_1 \text{ t.q. } \langle \frac{d}{dx} \varphi_{j',k'_1}^i, \tilde{\varphi}_{j,k_1} \rangle \neq 0, \\ \text{sinon } j = j', k'_2 = k_2, \text{ et } \left\{ \begin{array}{l} \text{si } k_1 \text{ b.s., } k'_1 \text{ b.s.} \\ \text{sinon } k'_1 = k_1, k_1 + 1. \end{array} \right. \end{array} \right. \\ \psi_{j',k'_1}^i \otimes \varphi_{j',k'_2}^0 \in X_{\Lambda_{u_1}} \text{ si } k_2 \text{ b.s. et pour} \\ j' < j, k'_2 \text{ b.s., } k'_1 \text{ t.q. } \langle \frac{d}{dx} \psi_{j',k'_1}^i, \tilde{\varphi}_{j,k_1} \rangle \neq 0. \\ \psi_{j',k'_1}^i \otimes \psi_{j',k'_2}^0 \in X_{\Lambda_{u_1}} \\ \text{si } k_2 \text{ b.s., } j' \leq j, k'_2 \text{ b.s., } k'_1 \text{ t.q. } \langle \frac{d}{dx} \psi_{j',k'_1}^i, \tilde{\varphi}_{j,k_1} \rangle \neq 0. \end{array} \right. \\ \forall \tilde{\psi}_{j,k_1} \otimes \tilde{\varphi}_{j,k_2} \in M_{\Lambda_p}, \psi_{j,k_1}^i \otimes \varphi_{j,k_2}^0 \in X_{\Lambda_{u_1}}. \\ \forall \tilde{\psi}_{j,k_1} \otimes \tilde{\psi}_{j,k_2} \in M_{\Lambda_p} \left\{ \begin{array}{l} \psi_{j,k_1}^i \otimes \psi_{j,k_2}^0 \in X_{\Lambda_{u_1}}. \\ \psi_{j,k_1}^i \otimes \varphi_{j,k_2}^0 \in X_{\Lambda_{u_1}}, \text{ si } k_2 \text{ b.s. et } k'_2 \text{ b.s..} \end{array} \right. \end{array} \right.$$

et symétriquement pour la deuxième composante.

Preuve. C'est une conséquence directe du lemme 3.3 et de la définition (3.28). \square

Remarque 3.10 Une discrétisation alternative de la pression est induit par le choix de l'AMR duale

$$\widetilde{M}_j = \overline{V_j^{0,\delta-1} \otimes V_j^{0,\delta-1}}. \quad (3.33)$$

En d'autres termes, on considère les espaces d'ondelettes sur l'intervalle $\widetilde{W}_j^\# = \widetilde{V}_{j+1}^\delta \cap (V_j^{0,\delta-1})^\perp$, engendrés par les bases d'ondelettes $\tilde{\Psi}_j^\# = \{\tilde{\psi}_{j,k}^\#, k \in \nabla_j\}$, au lieu de l'espace \widetilde{W}_j .

Alors les bases multiéchelles

$$\bigcup_{j \geq j_0} \Psi_j^0 \text{ et } \bigcup_{j \geq j_0} \tilde{\Psi}_j^\#$$

peuvent cette fois être choisies biorthogonales et ces sont les bases

$$\frac{d}{dx} \bigcup_{j \geq j_0} \Psi_j^i \text{ et } \bigcup_{j \geq j_0} \tilde{\Psi}_j^\#$$

qui ne sont plus biorthogonales au voisinage des extrémités. Comme dans le lemme 3.3, ce défaut de biorthogonalité impliquera seulement, pour une ondelette "frontière" $\tilde{\psi}_{j,k}^\#$, les ondelettes frontières $\psi_{j',k'}^i$ au échelles inférieures $j' \leq j$. Ce choix donne donc des résultats similaires au précédent, en revanche il est préférable en dimension $d \geq 3$, dans la mesure où l'espace W_j^i intervient dans une seule direction alors que l'espace W_j^0 apparaît dans les $d - 1$ directions restantes.

A ce stade, on va discuter la réalisation pratique de cette discrétisation sur les domaines tensoriels $]0, 1[^d$, en anticipant les résultats numériques du §3.8. On considère les deux familles de générateurs à supports compacts les plus utilisées, à savoir les ondelettes splines biorthogonales de [29] (§1.2.1) et les ondelettes orthogonales de Daubechies [50] (§1.2.2).

On retient les critères suivant pour évaluer la discrétisation du problème de Stokes: l'ordre d'approximation tel qu'il est défini par la proposition 3.8, la taille des supports des ondelettes et le nombre de conditionnement de l'opérateur laplacien et d'Uzawa après préconditionnement diagonal, comme mesure de la complexité de la discrétisation.

La contrainte principale de cette construction provient des conditions $\tau > 1$ et $\tilde{\tau} > 1$ sur les régularités des générateurs primaux et duaux ϕ et $\tilde{\phi}$, qui conduisent à des valeurs élevées du paramètre \tilde{n} , dans le cas des ondelettes splines. Ceci accroît la taille des supports des ondelettes (de l'ordre de $n + \tilde{n}$), et pénalise la construction sur l'intervalle en terme de profil d'erreur et de conditionnements comme illustré aux §1.3.6 et §2.1.3. De plus, l'ordre d'approximation du problème de Stokes reste limité par la valeur de n : il est égal à $\min(n - 1, \tilde{n})$ pour le choix des générateurs ($\phi = \phi^n, \tilde{\phi} = \tilde{\phi}^{n, \tilde{n}}$) et à $\min(\tilde{n} - 1, n)$ pour le choix symétrique ($\phi = \tilde{\phi}^{n, \tilde{n}}, \tilde{\phi} = \phi^n$).

En d'autres termes la taille des supports des ondelettes et l'instabilité de la construction augmentent bien plus vite que l'ordre d'approximation, limitant en pratique la construction à des petites valeurs des paramètres (n, \tilde{n}) .

De ces remarques et des expériences numériques des §1.3.6 et 3.8, on retiendra essentiellement les choix de discrétisations obtenus pour $(n = 2, \tilde{n} = 5)$ i.e.

$$\vec{X}_j = S(\tilde{\Phi}_j^{n-1, \tilde{n}} \otimes \tilde{\Phi}_j^{n, \tilde{n}-1}, \tilde{\Phi}_j^{n, \tilde{n}-1} \otimes \tilde{\Phi}_j^{n-1, \tilde{n}}), M_j = \overline{S(\Phi_j^n \otimes \Phi_j^n)} \quad (3.34)$$

d'ordre d'approximation $n = 2$ et le choix symétrique

$$\vec{X}_j = S(\Phi_j^{n+1} \otimes \Phi_j^n, \Phi_j^n \otimes \Phi_j^{n+1}), M_j = \overline{S(\tilde{\Phi}_j^{n, \tilde{n}-1} \otimes \tilde{\Phi}_j^{n, \tilde{n}-1})} \quad (3.35)$$

d'ordre d'approximation $n - 1 = 1$. La valeur suivante admissible (3,7) du couple (n, \tilde{n}) , induisant des ordres d'approximations 3 dans le premier cas et 2 dans le second, serait trop "instable".

Un choix alternatif de générateurs consiste à retenir les ondelettes orthogonales à supports compacts de Daubechies [50], i.e. avec les notations du §1.2.2

$$\phi = \tilde{\phi} = \phi^{D, n_d}.$$

On obtient ainsi un ordre d'approximation $n_d - 1$ du problème de Stokes, pour une taille du support des ondelettes égal à $2n_d$.

On verra cependant dans les expériences numériques du §3.8, que ce choix de discrétisation donne lieu, aux coins, à des pics d'erreur sur la pression très élevés (bien que l'ordre d'approximation soit obtenu) ainsi qu'à des conditionnements très

mauvais pour le préconditionnement du laplacien (bien que uniformément bornés). Cette dernière instabilité est en particulier due à l'utilisation de l'AMR "presque" orthogonale $(V_j^{0,\delta}, V_j^{\delta-1})$.

La nouvelle discrétisation introduite dans le paragraphe suivant montre qu'il est en fait inutile d'avoir recours au générateur dual $\tilde{\phi}$ pour discrétiser la pression et que le générateur primal ϕ permet aussi de satisfaire la condition LBB uniforme. Ce faisant on obtient un meilleur ordre d'approximation.

3.5 Deuxième famille de discrétisations

On reprend les notations et hypothèses du paragraphe précédent pour les générateurs sur la droite réelle $(\phi, \tilde{\phi})$ et $(\phi^i, \tilde{\phi}^d)$, ainsi que les AMR sur le tore \mathbb{T}^1 et sur l'intervalle $]0, 1[$.

Considérons des conditions aux limites périodiques. Cette seconde construction n'utilise plus explicitement les AMR duales $\tilde{V}_j^{d,p}$ et \tilde{V}_j^p . Soit la discrétisation

$$\begin{cases} \vec{X}_j = (\overline{V_j^{i,p} \otimes V_j^p}, \overline{V_j^p \otimes V_j^{i,p}}), \\ M_j = \overline{V_j^p \otimes V_j^p}, \end{cases} \quad (3.36)$$

on remarque essentiellement que

$$\nabla \cdot \vec{X}_j = M_j.$$

Ainsi pour toute pression $q_j \in M_j$, il existe une vitesse $\vec{v}_j \in \vec{X}_j$ telle que $\nabla \cdot \vec{v}_j = q_j$. Si de plus cette vitesse peut être choisie telle que de plus $\|\vec{v}_j\|_{\vec{X}} \lesssim \|q_j\|_M$ uniformément en j , alors pour toute pression $q_j \in M_j$ on a trivialement l'inégalité

$$\sup_{\vec{w}_j \in \vec{X}_j} \frac{\langle \nabla \cdot \vec{w}_j, q_j \rangle}{\|\vec{w}_j\|_{\vec{X}}} \geq \frac{\|q_j\|_M^2}{\|\vec{w}_j\|_{\vec{X}}} \gtrsim \|q_j\|_M,$$

qui énonce que la condition LBB est satisfaite uniformément en j . Le même raisonnement s'applique dans le cas d'une discrétisation non uniforme où les ondelettes de vitesse $\psi_{\lambda_{\vec{a}}}$ sont les mêmes que dans le cas de la discrétisation du paragraphe précédent et les ondelettes de pression sont cette fois les ondelettes primales ψ_{λ_p} .

Afin de construire explicitement une telle vitesse, on va dans les deux cas, uniformes et non uniforme, utiliser les décompositions en bases d'ondelettes de la vitesse et de la pression. Etant donné un ensemble d'indices d'ondelettes de pression Λ_p , on définira l'ensemble d'indices d'ondelettes de vitesse $\Lambda_{\vec{a}}$ tel que l'on puisse associer à toute pression $q \in M_{\Lambda_p}$, une vitesse $\vec{v} \in \vec{X}_{\Lambda_{\vec{a}}}$ vérifiant les propriétés $\nabla \cdot \vec{v} = q$ et $\|\vec{v}\|_{\vec{X}} \lesssim \|q\|_M$. Ceci garantit que la discrétisation $(\vec{X}_{\Lambda_{\vec{a}}}, M_{\Lambda_p})$ vérifie la condition LBB uniformément en Λ_p .

L'adaptation de cette approche aux conditions aux limites non périodiques est en revanche plus délicate dans la mesure où la relation $\nabla \cdot \vec{X}_j = M_j$ n'est plus vérifiée du fait des conditions aux limites de Dirichlet homogènes sur la vitesse.

On prouvera cependant que la discrétisation uniforme sur $]0, 1[^d$ satisfait la condition LBB uniformément en j si les AMR $V_j^{0, \delta-1}$ et V_j^δ satisfont une condition Inf-Sup uniforme en j . On se ramène ainsi à l'étude d'un problème en dimension 1 quelque soit par ailleurs la dimension d du problème. D'autre part on montrera que cette condition est entraînée par l'étude d'un nombre fini de niveaux j .

La discrétisation non uniforme sur $]0, 1[^d$ sera traitée avec les techniques du §3.3 au bord du domaine alors que les résultats du §3.5 dans le cas périodique s'appliqueront toujours à l'intérieur de celui-ci.

Cas périodique

On énonce la proposition dans le cas d'une discrétisation non uniforme qui contient comme cas particulier la discrétisation uniforme. On reprend les notations du §3.4 pour les ensembles d'indices des ondelettes isotropes et anisotropes (3.23) et (3.24) et les ondelettes associées.

Proposition 3.10 *Soit $\Lambda_p \subset \nabla$ l'ensemble d'indices d'ondelettes de pression (isotropes ou anisotropes) engendrant le sous espace M_{Λ_p} . On pose $\vec{X}_{\Lambda_{\vec{u}}} = (X_{\Lambda_{u_1}}, X_{\Lambda_{u_2}})$, alors la discrétisation $(M_{\Lambda_p}, \vec{X}_{\Lambda_{\vec{u}}})$ satisfait la condition LBB uniformément en Λ_p pour*

$$\begin{cases} \Lambda_{u_1} = \{(j_1, k_1, j_2, k_2) \in \Lambda_p \text{ t.q. } j_1 \geq j_2 \geq 0\} \cup \{(j_1, k_1, -1) \in \Lambda_p\} \\ \Lambda_{u_2} = \{(j_1, k_1, j_2, k_2) \in \Lambda_p \text{ t.q. } 0 \leq j_1 < j_2\} \cup \{(-1, j_2, k_2) \in \Lambda_p\} \end{cases} \quad (3.37)$$

dans le cas des ondelettes anisotropes et

$$\begin{cases} \Lambda_{u_1} = \{(j, k_1, k_2, (1, 0)) \in \Lambda_p\} \cup \{(j, k_1, k_2, (1, 1)) \in \Lambda_p \cap S_p^1\} \\ \Lambda_{u_2} = \{(j, k_1, k_2, (0, 1)) \in \Lambda_p\} \cup \{(j, k_1, k_2, (1, 1)) \in \Lambda_p \cap S_p^2\} \end{cases} \quad (3.38)$$

dans le cas des ondelettes isotropes où (S_p^1, S_p^2) est une partition arbitraire de l'ensemble $\{(j, k_1, k_2, (1, 1)) \in \Lambda_p\}$.

Preuve. Dans le cas de décompositions anisotropes, soit la partition de Λ_p définie par les 4 ensembles $E_p^1 = \{(j_1, k_1, j_2, k_2) \in \Lambda_p \text{ t.q. } j_1 \geq j_2 \geq 0\}$, $E_p^2 = \{(j_1, k_1, j_2, k_2) \in \Lambda_p \text{ t.q. } 0 \leq j_1 < j_2\}$, $E_p^3 = \{(j_1, k_1, -1) \in \Lambda_p\}$ et $E_p^4 = \{(-1, j_2, k_2) \in \Lambda_p\}$. Pour toute pression $p \in M_{\Lambda_p}$

$$p = \sum_{\lambda_p \in E_p^1 \cup E_p^2} p_{\lambda_p} \psi_{j_1, k_1}^p \otimes \psi_{j_2, k_2}^p + \sum_{\lambda_p \in E_p^3} p_{\lambda_p} \psi_{j_1, k_1}^p \otimes 1 + \sum_{\lambda_p \in E_p^4} p_{\lambda_p} 1 \otimes \psi_{j_2, k_2}^p,$$

on considère la vitesse $\vec{u} = (u_1, u_2)$ telle que

$$\begin{cases} u_1 = \sum_{\lambda_p \in E_p^1} -2^{-j_1+2} p_{\lambda_p} \psi_{j_1, k_1}^{i,p} \otimes \psi_{j_2, k_2}^p + \sum_{\lambda_p \in E_p^3} -2^{-j_1+2} p_{\lambda_p} \psi_{j_1, k_1}^{i,p} \otimes 1 \\ u_2 = \sum_{\lambda_p \in E_p^2} -2^{-j_2+2} p_{\lambda_p} \psi_{j_1, k_1}^p \otimes \psi_{j_2, k_2}^{i,p} + \sum_{\lambda_p \in E_p^4} -2^{-j_2+2} p_{\lambda_p} 1 \otimes \psi_{j_2, k_2}^{i,p}, \end{cases}$$

de sorte que, d'après la proposition 3.1, on ait l'égalité $\nabla \cdot \vec{u} = p$. La majoration $\|\vec{u}\|_{\vec{X}} \lesssim \|p\|_M$ se déduit alors directement des équivalences de normes en bases anisotropes suivantes: $\forall q \in M$ et $v \in X(\mathbb{T}^2)$

$$\|q\|_M \sim \left(\sum_{\lambda_p \in \nabla} |q_{\lambda_p}|^2 \right)^{1/2}, \quad \|v\|_{X(\mathbb{T}^2)} \sim \left(\sum_{\lambda=(j_1, k_1, j_2, k_2) \in \nabla} (2^{2j_1} + 2^{2j_2}) |v_\lambda|^2 \right)^{1/2}.$$

Le cas de la décomposition isotrope se démontre de même en considérant cette fois la partition $S_p^i, i = 1, \dots, 4$, où les ensembles S_p^1, S_p^2 sont définis dans l'énoncé et $S_p^3 = \{(j, k_1, k_2, (1, 0)) \in \Lambda_p\}$, $S_p^4 = \{(j, k_1, k_2, (0, 1)) \in \Lambda_p\}$. \square

Remarque 3.11 *On remarque que dans les deux cas (et quelque soit la dimension $d \geq 2$)*

$$\#\Lambda_{\vec{u}} = \#\Lambda_p$$

soit d fois moins d'ondelettes que pour la discrétisation du §3.4. C'est le cardinal minimal de l'ensemble $\Lambda_{\vec{u}}$ qui permet d'obtenir la condition LBB car pour $\#\Lambda_{\vec{u}} < \#\Lambda_p$, la discrétisation comporte nécessairement au moins $\#\Lambda_p - \#\Lambda_{\vec{u}}$ modes parasites de pression.

Dans le cas particulier de générateurs orthogonaux $\tilde{\phi} = \phi$, on voit que la discrétisation du paragraphe 3.4 obtenue par le lemme de Fortin appliqué au projecteur biorthogonal $\vec{O}_{\Lambda_{\vec{u}}}$ est loin de fournir un résultat optimal.

Remarque 3.12 *Ce résultat optimal s'utilise différemment dans le cas d'une approximation adaptative et dans celui d'une approximation uniforme du problème de Stokes.*

Dans le premier cas (voir §3.9), les espaces de pression $M_{\Lambda_p^n}$ et de vitesse $\vec{X}_{\Lambda_{\vec{u}}^n}$ sont raffinés par l'algorithme adaptatif et l'obtention de la condition LBB implique une contrainte sur l'ensemble $\Lambda_{\vec{u}}^n$ qui doit contenir un des sous ensembles $\Lambda_{\vec{u}}$ (non unique dans le cas isotrope) associé à Λ_p^n selon la proposition 3.10.

Le second cas correspond à $\Lambda = \Lambda_j$ i.e. $M_{\Lambda_j} = M_j$. De façon à obtenir un ordre d'approximation linéaire optimal du problème de Stokes, la discrétisation de la vitesse choisie est \vec{X}_j et non l'espace $\vec{X}_{\Lambda_{\vec{u}}} \subset \vec{X}_j$ de la proposition 3.10 obtenu pour $\Lambda = \Lambda_j$ dont les propriétés d'approximation linéaire ne sont pas bonnes. La discrétisation (3.36) satisfait alors les estimations a priori

$$\begin{aligned} \|\vec{u} - \vec{u}_j\|_{\vec{X}} &\lesssim 2^{-js_u} \|u\|_{H^{s_u+1}} \forall s_u \leq n-1. \\ \|p - p_j\|_M &\lesssim 2^{-js_u} \|u\|_{H^{s_u+1}} + 2^{-js_p} \|p\|_{H^{s_p}}, \forall s_u \leq n-1 \text{ et } s_p \leq n. \end{aligned}$$

i.e. admet pour ordre d'approximation $n-1$.

Preuve. Par construction $D_j := \nabla \cdot \vec{X}_j = M_j$ et donc l'erreur de consistance dans l'approximation de la vitesse est nulle. Les estimations d'erreur se déduisent alors de la condition LBB et des estimations générales (3.6, 3.7). \square

Domaine tensoriel $]0, 1[^d$

A nouveau la présentation est faite essentiellement en dimension $d = 2$ par commodité d'écriture, son extension à toute autre dimension $d \geq 3$ étant immédiate. Soit la discrétisation uniforme du problème de Stokes

$$\begin{cases} \vec{X}_j^\delta = (V_j^{i,0,\delta} \otimes V_j^{0,\delta}, V_j^{0,\delta} \otimes V_j^{i,0,\delta}) \subset \vec{X}, \\ M_j^\delta = \overline{V_j^\delta} \otimes V_j^\delta \subset M. \end{cases} \quad (3.39)$$

D'après la proposition 3.2 on remarque que

$$D_j^\delta : = \nabla \cdot \vec{X}_j^\delta = \overline{V_j^\delta} \otimes V_j^{0,\delta} + V_j^{0,\delta} \otimes \overline{V_j^\delta}$$

est un sous espace de M_j^δ . Par conséquent, le noyau du gradient discret

$$N_j^\delta : = \{q_j \in M_j^\delta, \text{ t.q. } \langle \nabla \cdot \vec{v}_j, q_j \rangle = 0 \forall \vec{v}_j \in \vec{X}_j^\delta\} = (D_j^\delta)^\perp \cap M_j^\delta \quad (3.40)$$

est le complémentaire orthogonal de D_j^δ dans M_j^δ . Des calculs simples montrent que $\dim N_j^\delta = 4$ en dimension $d = 2$ (les 4 coins du carré) et $\dim N_j^\delta = 12(\Delta_j - 1) + 8$ en dimension $d = 3$ (le "wire basket"), où Δ_j désigne la dimension de l'AMR $V_j^{i,0,\delta}$ (et donc $\Delta_j + 1$ celle de l'AMR V_j^δ). Ce noyau, définissant les *modes parasites* de la discrétisation, est facile à caractériser. Soit le sous espace de dimension 2

$$\begin{aligned} K_j^\delta : &= \{q_j \in V_j^\delta \text{ t.q. } \langle v_j, q_j \rangle = 0 \text{ pour tout } v_j \in V_j^{0,\delta}\} \\ &= (V_j^{0,\delta})^\perp \cap V_j^\delta. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Alors en dimension $d = 2$

$$N_j^\delta = K_j^\delta \otimes K_j^\delta$$

et en dimension $d = 3$

$$N_j^\delta = (K_j^\delta \otimes K_j^\delta \otimes K_j^\delta) \oplus (V_j^{0,\delta} \otimes K_j^\delta \otimes K_j^\delta) \oplus (K_j^\delta \otimes V_j^{0,\delta} \otimes K_j^\delta) \oplus (K_j^\delta \otimes K_j^\delta \otimes V_j^{0,\delta})$$

Pour traiter ces modes parasites, une première possibilité consiste à conserver la discrétisation (3.39) et à filtrer les modes parasites à chaque itérations du solveur itératif. Dans ce cas, la condition LBB doit être réécrite en faisant intervenir la norme M quotientée par le noyau du gradient discret (voir [17]), i.e.

$$\inf_{q_j \in M_j^\delta} \sup_{\vec{v}_j \in \vec{X}_j^\delta} \frac{\langle \nabla \cdot \vec{v}_j, q_j \rangle}{\|\vec{v}_j\|_{\vec{X}} \|q_j\|_{M/N_j^\delta}} \geq \beta > 0. \quad (3.42)$$

Cependant, il est plus commode de modifier la discrétisation de façon à éliminer ces modes parasites. Pour se faire on utilise essentiellement la possibilité de contrôler la dimension des AMR sur l'intervalle en jouant sur les paramètres $(\delta, \tilde{\delta})$ tout en conservant leurs ordres d'approximation optimaux.

On introduit les deux hypothèses fondamentales suivantes sur les AMR sur l'intervalle $V_j^{0,\delta-1}$ et V_j^δ .

Hypothèse 3.1 *Pour tout $j \geq j_0$, les AMR $V_j^{0,\delta}$ et $V_j^{\delta+1}$ (de même dimension $\Delta_j - 1$) vérifient la condition Inf-Sup*

$$\inf_{v_j^0 \in V_j^{0,\delta}} \sup_{v_j \in V_j^{\delta+1}} \frac{\langle v_j^0, v_j \rangle}{\|v_j^0\|_{L^2} \|v_j\|_{L^2}} \geq \gamma_j > 0. \quad (3.43)$$

i.e. de façon équivalente (d'après le lemme 1.1) $(V_j^{\delta+1})^\perp \cap V_j^{0,\delta} = \{0\}$ ou encore $(V_j^{0,\delta})^\perp \cap V_j^{\delta+1} = \{0\}$.

Hypothèse 3.2 *La condition Inf-Sup de l'hypothèse précédente est satisfaite uniformément en j , i.e. il existe $\gamma > 0$ tel que $\gamma_j \geq \gamma$ pour tout $j \geq j_0$. De façon équivalente (à nouveau en invoquant le lemme 1.1), en posant $K_j = (V_j^{0,\delta})^\perp \cap V_j^\delta$, la décomposition $V_j^\delta = K_j \oplus V_j^{\delta+1}$ est L^2 stable uniformément en j .*

Sous l'hypothèse 3.1 il est très facile de modifier la discrétisation (3.39) de façon à supprimer les modes parasites, alors que l'hypothèse 3.2 plus forte suffira à obtenir la condition LBB uniforme. On proposera ensuite une méthode numérique pour tester cette propriété 3.2, pour un choix fixé de générateur ϕ et du paramètre δ .

Proposition 3.11 *Sous l'hypothèse 3.1 la discrétisation du problème de Stokes (écrite ici en dimension $d = 2$) n'admet aucun mode parasite quelque soit la dimension $d \geq 2$.*

$$\begin{cases} \vec{X}_j = \frac{(V_j^{i,0,\delta} \otimes V_j^{0,\delta}, V_j^{0,\delta} \otimes V_j^{i,0,\delta})}{V_j^\delta \otimes V_j^{\delta+1} + V_j^{\delta+1} \otimes V_j^\delta}, \\ M_j = \overline{V}_j^\delta \otimes V_j^{\delta+1} + V_j^{\delta+1} \otimes \overline{V}_j^\delta. \end{cases} \quad (3.44)$$

Preuve. Soit $D_j = \nabla \cdot \vec{X}_j$, on va montrer que $N_j = (D_j)^\perp \cap M_j = \{0\}$. Soit $M_j^* = V_j^\delta \otimes V_j^{\delta+1} + V_j^{\delta+1} \otimes V_j^\delta$ et $D_j^* = V_j^\delta \otimes V_j^{0,\delta} + V_j^{0,\delta} \otimes V_j^\delta$ où l'on a relâché la contrainte de valeur moyenne nulle sur les espaces M_j et D_j . On remarque tout d'abord que $(D_j)^\perp \cap M_j = (D_j^*)^\perp \cap M_j^*$ puisque d'une part $D_j^\perp = (D_j^*)^\perp \oplus \mathbb{P}_0$ et d'autre part $M_j^* = M_j \oplus \mathbb{P}_0$.

En dimension $d = 2$, on montre facilement que D_j^* est un sous espace de codimension 4 de $V_j^\delta \otimes V_j^\delta$ et l'on vérifie que $(D_j^*)^\perp \cap (V_j^\delta \otimes V_j^\delta) = K_j \otimes K_j$ où $K_j = (V_j^{0,\delta})^\perp \cap V_j^\delta$. L'hypothèse 3.1 énonce alors que la somme $V_j^\delta = K_j \oplus V_j^{\delta+1}$ est directe et donc aussi

$$\begin{aligned} V_j^\delta \otimes V_j^\delta &= (K_j \otimes K_j) \oplus (V_j^{\delta+1} \otimes V_j^{\delta+1}) \oplus (K_j \otimes V_j^{\delta+1}) \oplus (V_j^{\delta+1} \otimes K_j) \\ &= (K_j \otimes K_j) \oplus M_j^*, \end{aligned}$$

ce qui achève la preuve en dimension $d = 2$. Les mêmes arguments s'appliquent quelque soit la dimension $d \geq 2$. \square

Remarque 3.13 *Dans la mesure où les espaces D_j et M_j ont même dimension, la proposition précédente équivaut à la propriété $D_j \cap (M_j)^\perp = \{0\}$ i.e. le sous espace de \vec{X}_j des vitesses à divergence discrète nulle*

$$\vec{V}_j = \{\vec{v}_j \in \vec{X}_j, \langle \nabla \cdot \vec{v}_j, q_j \rangle = 0, \text{ pour tout } q_j \in M_j\}$$

est un sous espace de $\vec{V} = \{\vec{v} \in \vec{X}, \nabla \cdot \vec{v} = 0\}$. Dans ce cas l'erreur de consistance pour la vitesse est donc nulle. C'est une propriété intéressante mais non essentielle ici car l'ordre d'approximation de la pression (n), qui gouverne l'erreur de consistance, est toujours supérieur à celui de la vitesse ($n - 1$), contrairement à la discrétisation du §3.4. C'est donc plutôt l'obtention de la condition LBB uniforme qui va importer pour l'optimalité des estimations a priori.

Pour des raisons techniques, on va plutôt démontrer la condition LBB uniforme pour le choix de l'espace de pression

$$M_j = \overline{V_j^{\delta+1} \otimes V_j^{\delta+1}}$$

pour lequel la proposition 3.11 reste vérifiée par simple inclusion $\overline{V_j^{\delta+1} \otimes V_j^{\delta+1}} \subset \overline{V_j^\delta \otimes V_j^{\delta+1}} + V_j^{\delta+1} \otimes \overline{V_j^\delta}$.

Théorème 3.1 *Sous l'hypothèse 3.2, la discrétisation (écrite ici en dimension $d = 2$)*

$$\begin{cases} \vec{X}_j = (V_j^{i,0,\delta} \otimes V_j^{0,\delta}, V_j^{0,\delta} \otimes V_j^{i,0,\delta}), \\ M_j = \overline{V_j^{\delta+1} \otimes V_j^{\delta+1}}. \end{cases} \quad (3.45)$$

satisfait la condition LBB uniformément en j , quelque soit la dimension $d \geq 2$.

Preuve. On propose une preuve en deux étapes dont l'idée est issue de [6] où une technique similaire est utilisée dans la démonstration de la condition LBB en discrétisation spectrale sur un domaine tensoriel.

Dans une première étape, pour tout $q_j^0 \in M_j^0 = \overline{V_j^{0,\delta} \otimes V_j^{0,\delta}} \subset D_j$, on va construire une vitesse $\vec{u}_j \in \vec{X}_j$ telle que $\nabla \cdot \vec{v}_j = q_j^0$ et $\|\vec{v}_j\|_{\vec{X}} \lesssim \|q_j^0\|_{L^2}$. Autrement dit, on prouve ainsi que la discrétisation (\vec{X}_j, M_j^0) satisfait la condition LBB uniformément en j . L'espace M_j^0 n'est pas un bon espace d'approximation pour la pression en raison des conditions aux limites homogènes dans sa définition. Par conséquent, on va considérer dans une seconde étape la projection orthogonale

$$\pi_j : \overline{V_j^\delta \otimes V_j^\delta} \rightarrow M_j^0.$$

En utilisant l'hypothèse 3.2, on va montrer que ce projecteur vérifie la majoration

$$\|q_j\|_M \lesssim \|\pi_j q_j\|_{L^2}, \quad \forall q_j \in M_j$$

uniformément en j . Montrons que ces propriétés suffisent à démontrer le théorème. Pour toute pression $q_j \in M_j$ on pose $q_j^0 = \pi_j q_j$ et l'on considère la vitesse $\vec{v}_j \in \vec{X}_j$ vérifiant les hypothèses de la première étape. Alors, comme $\nabla \cdot \vec{v}_j = \pi_j q_j$, on a

$$\langle q_j, \nabla \cdot \vec{v}_j \rangle = \|\pi_j q_j\|_{L^2}^2 \gtrsim \|q_j\|_M^2 \|\vec{v}_j\|_{\vec{X}},$$

ce qui montre la condition LBB uniforme.

Première étape. Les propriétés de dérivation/intégration des AMR sur l'intervalle de la proposition 3.2 vont permettre de construire explicitement la vitesse \vec{v}_j . Afin de satisfaire les conditions aux limites sur la pression q_j^0 , on va plutôt utiliser les couples d'AMR biorthogonales suivants.

$$\left\{ \begin{array}{l} (V_j^{0,\delta}, \tilde{V}_j^{\delta+1}), \\ (V_j^{i,*,\delta} : = \int_0^x \overline{V_j^{0,\delta}}, \tilde{V}_j^{d,\delta+1} : = \frac{d}{dx} \tilde{V}_j^{\delta+1}). \end{array} \right. \quad (3.46)$$

Soient les espaces d'ondelettes primales associés $W_j^{i,*} = V_{j+1}^{i,*,\delta} \cap (\tilde{V}_j^{d,\delta+1})^\perp$ et $W_j^0 = V_{j+1}^{0,\delta} \cap (\tilde{V}_j^{\delta+1})^\perp$, comme dans le cas de la proposition 3.2, la relation $\frac{d}{dx} W_j^{i,*} = W_j^0$ est satisfaite et l'on peut choisir les bases d'ondelettes $\Psi_j^{i,*}$ de $W_j^{i,*}$ et Ψ_j^0 de W_j^0 , telles que $\frac{d}{dx} \Psi_j^{i,*} = \Psi_j^0$.

En dépit des conditions aux limites $H_0^2(]0, 1[)$ sur l'AMR primale du couple $(V_j^{i,*,\delta}, V_j^{d,\delta+1})$, la décomposition multiéchelle primale associée caractérise les normes de Sobolev $H_0^s(]0, 1[)$ sur l'intervalle $0 \leq s < \frac{3}{2}$ par les normes l^2 pondérés des coefficients d'ondelettes. La même remarque s'applique au couple d'AMR biorthogonales $(V_j^0, \tilde{V}_j^{\delta+1})$ dont la décomposition multiéchelle primale associée caractérise les normes $H^s(]0, 1[)$ pour tout $s \in [0, 1]$. Ces résultats se déduisent facilement des estimations directes et inverses pour ces AMR et de la théorie générale du §1.1.7.

Pour construire la vitesse \vec{v}_j , on va par exemple utiliser les bases d'ondelettes anisotropes construites par produit tensoriel des bases précédentes. Pour la pression, on considère donc la décomposition multiéchelle

$$\overline{(V_{j_0}^{0,\delta} \otimes V_{j_0}^{0,\delta})} \oplus \left(\bigoplus_{j_1, j_2 \geq j_0} W_{j_1}^0 \otimes W_{j_2}^0 \right) \oplus \left(\bigoplus_{j_1 \geq j_0} W_{j_1}^0 \otimes V_{j_0}^{0,\delta} \right) \oplus \left(\bigoplus_{j_2 \geq j_0} V_{j_0}^{0,\delta} \otimes W_{j_2}^0 \right) \quad (3.47)$$

qui caractérise l'espace M muni de sa norme L^2 . Pour la première composante de la vitesse (et symétriquement pour la seconde) il s'agit de la décomposition multiéchelle

$$\left\{ \begin{array}{l} (V_{j_0}^{i,*,\delta} \otimes V_{j_0}^{0,\delta}) \oplus \left(\bigoplus_{j_1, j_2 \geq j_0} W_{j_1}^{i,*} \otimes W_{j_2}^0 \right) \\ \oplus \left(\bigoplus_{j_1 \geq j_0} W_{j_1}^{i,*} \otimes V_{j_0}^{0,\delta} \right) \oplus \left(\bigoplus_{j_2 \geq j_0} V_{j_0}^{i,*,\delta} \otimes W_{j_2}^0 \right) \end{array} \right. \quad (3.48)$$

qui caractérise l'espace $H_0^1([0, 1]^2)$. La construction de la vitesse \vec{v}_j est alors identique à celle présentée dans la preuve de la proposition 3.10 dans le cas périodique.

deuxième étape. D'après le lemme 1.1, la propriété équivaut à montrer que la décomposition

$$\overline{V_j^\delta \otimes V_j^\delta} = \left((M_j^0)^\perp \cap \overline{V_j^\delta \otimes V_j^\delta} \right) \oplus M_j$$

est L^2 stable uniformément en j . On remarque tout d'abord, comme dans la preuve de la proposition 3.11, que

$$\begin{aligned} L_j &:= (M_j^0)^\perp \cap \overline{V_j^\delta \otimes V_j^\delta} \\ &= (V_j^{0,\delta} \otimes V_j^{0,\delta})^\perp \cap V_j^\delta \otimes V_j^\delta \\ &= (K_j \otimes V_j^{\delta+1}) \oplus (V_j^{\delta+1} \otimes K_j) \oplus (K_j \otimes K_j) \end{aligned}$$

où on rappelle la définition $K_j := (V_j^{0,\delta})^\perp \cap V_j^\delta$. L'hypothèse 3.2 énonce alors la stabilité uniforme de la décomposition $V_j^\delta = V_j^{\delta+1} \oplus K_j$ et donc par produit tensoriel de la décomposition

$$V_j^\delta \otimes V_j^\delta = (V_j^{\delta+1} \otimes V_j^{\delta+1}) \oplus L_j,$$

ce qui achève la preuve de la deuxième étape en dimension $d = 2$, les mêmes arguments s'appliquant en dimension supérieure. \square

Remarque 3.14 *Sous les hypothèses du théorème 3.1, la discrétisation (3.45) satisfait les estimations a priori*

$$\|\vec{u} - \vec{u}_j\|_{\vec{X}} + \|p - p_j\|_M \lesssim 2^{-js_u} \|u\|_{H^{s_u+1}} + 2^{-js_p} \|p\|_{H^{s_p}}, \quad \forall s_u \leq n-1, s_p \leq n.$$

A nouveau, l'erreur de consistance ne s'annule plus sur un domaine tensoriel, mais contrairement à la discrétisation du §3.4.2, cette erreur est ici d'ordre supérieur à celui d'approximation de la vitesse dans \vec{X}_j .

Réduction et test numérique de l'hypothèse 3.2

On va réduire l'hypothèse 3.2 de façon à proposer une preuve numérique de cette propriété pour un choix fixé du générateur ϕ et du paramètre δ .

Avec les notations du §1.3.3 pour les fonctions d'échelle sur l'intervalle $[0, 1]$, on considère la base de Riesz (uniforme) de l'AMR V_j^δ dont la dimension est notée $\Delta_j + 1$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \Phi_j^\delta = \{\varphi_{j,0}^{\delta_0+1,(0)}, \phi_{m_0+\delta_0}\} \cup \Phi_j^{0,\delta+1} \cup \{\phi_{2^j-m_1-\delta_1}, \varphi_{j,0}^{\delta_1+1,(1)}\} \text{ où} \\ \Phi_j^{0,\delta+1} = \{\varphi_{j,\alpha}^{\delta_0+1,(0)}, \phi_{j,k}, \varphi_{j,\alpha}^{\delta_1+1,(1)}\}, \\ \alpha = 1, \dots, n-1, k = m_0 + \delta_0 + 1, \dots, 2^j - m_1 - \delta_1 - 1. \end{array} \right.$$

Alors

$$\Phi_j^{0,\delta} = \{\phi_{m_0+\delta_0}\} \cup \Phi_j^{0,\delta+1} \cup \{\phi_{2j-m_1-\delta_1}\}$$

est une base de Riesz uniforme de l'AMR $V_j^{0,\delta}$ et

$$\Phi_j^{\delta+1} = \{\varphi_{j,0}^{\delta_0+1,(0)}\} \cup \Phi_j^{0,\delta+1} \cup \{\varphi_{j,0}^{\delta_1+1,(1)}\}$$

de l'AMR $V_j^{\delta+1}$. On note B_j^0 et B_j^1 les matrices de taille $(\Delta_j - 1) \times (\Delta_j + 1)$ telles que

$$\begin{cases} \Phi_j^{0,\delta} = B_j^0 \Phi_j^\delta, \\ \Phi_j^{\delta+1} = B_j^1 \Phi_j^\delta, \end{cases}$$

et M_j matrice de masse $\langle \Phi_j^\delta, \Phi_j^\delta \rangle$. Alors, l'hypothèse 3.2 énonce que la matrice

$$A_j = B_j^1 M_j (B_j^0)^T$$

est inversible et que sa norme matricielle l^2 notée $\|A_j^{-1}\|_2$ est uniformément minorée. En d'autres termes, la décomposition

$$\mathbb{R}^{\Delta_j+1} = (M_j^{-1} \text{Ker} B_j^1) \oplus \text{R}(B_j^0)^T \quad (3.49)$$

est uniformément stable en norme l^2 . En notant $\{e_k, k = 0, \dots, \Delta_j\}$ la base canonique de \mathbb{R}^{Δ_j+1} , alors on a clairement $\text{Ker} B_j^1 = \text{S}\{e_1, e_{\Delta_j-1}\}$ et $\text{R}(B_j^0)^T = \text{S}\{e_1, \dots, e_{\Delta_j-1}\}$.

On va maintenant exploiter les propriétés de la matrice de masse M_j pour reformuler la propriété de stabilité de la décomposition 3.49. La base Φ_j^δ étant une base de Riesz uniforme, il existe des bornes inférieures et supérieures uniformes λ_m et λ_M , $0 < \lambda_m \leq \lambda_M$, des valeurs propres de M_j . Soit $\mathcal{K} := \lambda_m / \lambda_M$, alors $R_j = I_j - \frac{2}{\lambda_M + \lambda_m} M_j$ vérifie l'estimation $\|R_j\|_2 \leq \frac{1-\mathcal{K}}{1+\mathcal{K}}$ et la série $G_j^K = \frac{\lambda_M + \lambda_m}{2} \sum_{k=0}^K R_j^k$ converge exponentiellement vers M_j^{-1} en norme matricielle selon la majoration d'erreur

$$\|M_j^{-1} - G_j^K\|_2 \leq \frac{\lambda_M + \lambda_m}{2} \left(\frac{1 - \mathcal{K}}{1 + \mathcal{K}} \right)^{K+1}.$$

On va donc pouvoir approcher, uniformément en j , la matrice M_j^{-1} par une matrice bande dont la largeur de bande ne dépend que de K , ceci avec une erreur d'approximation arbitrairement petite pour K suffisamment grand. On peut alors démontrer la proposition suivante.

Proposition 3.12 *L'hypothèse 3.2 est équivalente à la propriété suivante: il existe des entiers $J_1 \geq j_0$ et $K_1 \geq 0$ tels que*

- (i) *la matrice A_j est inversible pour tout $j < J_1$.*
- (ii) *les vecteurs $g_0 := G_j^{K_1} e_1$ et $g_1 := G_j^{K_1} e_{\Delta_j-1}$ sont "indépendants" de $j \geq J_1$ (ceci s'interprète comme une condition sur J_1 et K_1 portant sur la largeur de bande de la matrice $G_{J_1}^{K_1}$).*
- (iii) *La famille $\{g_0, e_1, \dots, e_{D_{J_1}-1}, g_1\}$ est libre. Comme g_0 et g_1 sont indépendant de*

$j \geq J_1$ (ce qui en particulier entraîne une hypothèse de découplage sur les vecteurs g_0 et g_1), la famille $\{g_0, e_1, \dots, e_{\Delta_j-1}, g_1\}$ définit alors une base de Riesz uniforme et l'on notera $c > 0$ la constante (facile à évaluer) telle que l'inégalité

$$\|f_{j,0}g_0 + \sum_{k=1}^{\Delta_j-1} f_{j,k}e_k + f_{j,\Delta_j}g_1\| \geq c \left(\sum_{k=0}^{\Delta_j} |f_{j,k}|^2 \right)^{1/2}$$

soit vérifiée uniformément en j .

$$(iv) \quad c > \frac{\lambda_M + \lambda_m}{\sqrt{2}} \left(\frac{1-\kappa}{1+\kappa} \right)^{K_1+1}.$$

Preuve. La condition est clairement suffisante, il faut donc prouver qu'elle est aussi nécessaire. D'après l'estimation d'erreur $\|M_j^{-1} - G_j^K\|_2$, les vecteurs $(M_j^{-1} - G_j^K)e_1$ et $(M_j^{-1} - G_j^K)e_{\Delta_j-1}$ convergent vers zéro exponentiellement en K et uniformément en j . S'il existe une constante \tilde{c} , indépendante de j , telle que

$$\|f_{j,0}M_j^{-1}e_0 + \sum_{k=1}^{\Delta_j-1} f_{j,k}e_k + f_{j,\Delta_j}M_j^{-1}e_{\Delta_j-1}\| \geq \tilde{c} \left(\sum_{k=0}^{\Delta_j} |f_{j,k}|^2 \right)^{1/2}$$

alors, il existe des constantes $c > 0$ et K_0 telles que pour tout $K \geq K_0$ on ait

$$\|f_{j,0}g_{j,0}^K + \sum_{k=1}^{\Delta_j-1} f_{j,k}e_k + f_{j,\Delta_j}g_{j,1}^K\| \geq c \left(\sum_{k=0}^{\Delta_j} |f_{j,k}|^2 \right)^{1/2}$$

uniformément en j , où on a posé $g_{j,0}^K = G_j^K e_0$ et $g_{j,1}^K = G_j^K e_{\Delta_j-1}$. Pour K choisi suffisamment grand, (noté $K \geq K_1$) la condition (iv) sera donc satisfaite, et pour j suffisamment grand (noté $j \geq J_1$), les vecteurs $G_j^{K_1} e_0 = g_0$ et $G_j^{K_1} e_{\Delta_j-1} = g_1$ sont "indépendants" de $j \geq J_1$. \square

Le calcul de bornes supérieures et inférieures λ_M et λ_m des valeurs propres de la matrice de masse M_j est un calcul facile et de complexité finie. Par conséquent, si l'hypothèse 3.2 est satisfaite, la propriété équivalente de la proposition 3.12 peut être vérifiée en un nombre fini d'opérations, pour un choix fixé du générateur ϕ . Bien sûr, cette preuve ne va fonctionner que si (1) la propriété est vérifiée et (2) l'échelle J_1 pour laquelle les hypothèses de la proposition sont atteintes est en pratique pas trop grande. Dans l'exemple du générateur $\phi = \tilde{\phi}^{2,4}$, le calcul numérique des nombres de conditionnement des matrices A_j indique qu'ils convergent rapidement vers 6.084, de sorte que la propriété est vraisemblablement vérifiée et que la preuve numérique proposée devrait raisonnablement pouvoir être mise en oeuvre.

Pour conclure sur cette discrétisation dans le cas uniforme, l'avantage réside essentiellement dans l'obtention d'ordres d'approximation dans tous les cas équilibrés entre le terme de pression (erreur de consistance) et de vitesse. En particulier, dans

le cas des générateurs splines biorthogonaux pour les paramètres $n = 2, \tilde{n} \geq 5, n + \tilde{n}$ pair, la discrétisation

$$\vec{X}_j = S(\check{\Phi}_j^{n-1, \tilde{n}} \otimes \check{\Phi}_j^{n, \tilde{n}-1}, \check{\Phi}_j^{n, \tilde{n}-1} \otimes \check{\Phi}_j^{n-1, \tilde{n}}), M_j = \overline{S(\check{\Phi}_j^{n, \tilde{n}-1} \otimes \check{\Phi}_j^{n, \tilde{n}-1})} \quad (3.50)$$

est d'ordre $\tilde{n} - 1$ à comparer avec la discrétisation (3.34) d'ordre n (voir aussi les expériences numériques du §3.8).

Un autre aspect intéressant est la possibilité d'utiliser les générateurs splines à la fois pour la vitesse et la pression i.e. la discrétisation d'ordre $n - 1 \geq 1$

$$\vec{X}_j = S(\Phi_j^{n+1} \otimes \Phi_j^n, \Phi_j^n \otimes \Phi_j^{n+1}), M_j = \overline{S(\Phi_j^n \otimes \check{\Phi}_j^n)}. \quad (3.51)$$

Discrétisation non uniforme sur $]0, 1[^d$

L'adaptation de la discrétisation non uniforme au cas d'un domaine tensoriel est encore plus délicate. En particulier cette question ne se ramène pas comme dans le cas uniforme à un problème monodimensionnel.

Soit un ensemble d'indices d'ondelettes de pression $\Lambda_p \subset \nabla$. On considère la partition

$$\Lambda_p = \Lambda_p^b \cup \Lambda_p^{int}$$

où Λ_p^b est le sous ensemble d'indices d'ondelettes *frontière* et Λ_p^{int} le sous ensemble d'indices d'ondelettes *intérieures*.

On va prouver un résultat (certainement non optimal) en appliquant les techniques du §3.3. Dans le cas particulier de cette discrétisation, le raffinement de la vitesse dans un voisinage espace-échelle de la pression ne portera que sur les ondelettes de pression *frontière*, alors que la proposition 3.10 s'appliquera sur les ondelettes *intérieures* restantes. La preuve est présentée en Appendice 5.

Proposition 3.13 *Avec les notations précédentes, il existe un entier $K_0 \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $K \geq K_0$ et $\Lambda_p = \Lambda_p^{int} \cup \Lambda_p^b$, l'ensemble $\Lambda_{\vec{u}} = \Lambda_{\vec{u}}^{int} \cup \Lambda_{\vec{u}}^{b, K}$ suffit à obtenir la condition LBB uniformément en Λ_p . Ici $\Lambda_{\vec{u}}^{b, K} = \prod_{i=1}^d \Lambda_{u_i}^{b, K}$ désigne un voisinage espace-échelle de $(\Lambda_p^b)^d$ où K représente l'écart d'échelle.*

3.6 Autres familles de discrétisations

Dans le cas idéal des conditions aux limites périodiques, la construction du §3.4 repose essentiellement sur une relation de biorthogonalité entre les espaces $D_j = \nabla \cdot \vec{X}_j$ et l'espace de pression M_j . La discrétisation du §3.4 utilise quant à elle la relation d'identité $D_j = M_j$. Dans les deux cas ces propriétés remarquables permettent de démontrer simplement la condition LBB et l'adaptation aux discrétisations non uniformes est facile du fait que ces relations restent grosso modo vérifiées sur les espaces d'ondelettes.

Ces propriétés nécessitent l'utilisation de deux générateurs pour discrétiser la vitesse, le premier ϕ^i dans la direction de la dérivation de l'opérateur divergence et le second ϕ dans les directions restantes du produit tensoriel. On verra au §3.7 que ceci présente un inconvénient majeur pour leur extension à des domaines plus généraux par décomposition de domaine.

On s'efforce donc dans ce paragraphe de définir des discrétisations utilisant un seul générateur pour la vitesse et le cas échéant un deuxième pour la pression. Dans un premier temps on va considérer le cas d'une discrétisation uniforme sur le tore \mathbb{T}^d où l'on peut explicitement calculer le spectre de l'opérateur d'Uzawa discret. On propose ensuite une extension des résultats obtenus sur le tore au cas d'un domaine tensoriel à partir d'expériences numériques. On se restreint ici aux discrétisations uniformes et la présentation est faite à nouveau en dimension 2 par commodité d'écriture, l'extension aux dimensions supérieures étant immédiate.

Soient les couples de générateurs biorthogonaux à supports compacts

$$\begin{cases} (\phi^{v_\varepsilon} \in H^1(\mathbb{R}), \tilde{\phi}^{v_\varepsilon} \in L^2(\mathbb{R})), \varepsilon = 1, 2, \\ (\phi \in L^2(\mathbb{R}), \tilde{\phi} \in L^2(\mathbb{R})) \end{cases}$$

dont les générateurs primaux engendreront respectivement la vitesse et la pression. Ces générateurs reproduisent au moins les constantes et l'on supposera en outre que les générateurs ϕ^{v_ε} , $\varepsilon = 1, 2$ engendrent les polynômes de degré $n_{v_\varepsilon} - 1 \geq 1$. D'après la proposition 3.1, on peut définir deux nouveaux couples de générateurs à supports compacts notés $(\phi^\varepsilon \in L^2(\mathbb{R}), \tilde{\phi}^\varepsilon \in H^1(\mathbb{R}))$ et tels que

$$\frac{d}{dx}\phi^{v_\varepsilon}(x) = \phi^\varepsilon(x+1) - \phi^\varepsilon(x) \text{ et } \frac{d}{dx}\tilde{\phi}^\varepsilon(x) = \tilde{\phi}^{v_\varepsilon}(x) - \tilde{\phi}^{v_\varepsilon}(x-1).$$

Proposition 3.14 *On considère sur le tore \mathbb{T}^d , la discrétisation utilisant, pour la pression, le générateur ϕ et pour la vitesse, les générateurs ϕ^{v_1} dans la direction de dérivation de la divergence et ϕ^{v_2} dans les autres directions. Avec des notations immédiates pour les AMR sur le tore \mathbb{T}^1 , elle s'écrit ($d = 2$)*

$$\begin{cases} \vec{X}_j = (\overline{V_j^{v_1, p}} \otimes \overline{V_j^{v_2, p}}, \overline{V_j^{v_2, p}} \otimes \overline{V_j^{v_1, p}}) \\ M_j = \overline{V_j^p} \otimes \overline{V_j^p}. \end{cases} \quad (3.52)$$

Alors cette discrétisation satisfait la condition LBB uniformément en j si et seulement si les polynômes $P(z) = \sum_\nu a_\nu z^\nu$ et $Q(z) = \sum_\nu b_\nu z^\nu$ où $a_\nu = \langle \phi^{v_2}, \phi_\nu \rangle$ et $b_\nu = \langle \phi^1, \phi_\nu \rangle$, ne s'annulent pas sur le cercle unité \mathbb{T}^1 .

Preuve. Les matrices monodimensionnelles qui interviennent dans la définition des opérateurs laplacien et gradient discrets s'écrivent toutes sous la forme

$$A_{k, k'} = 2^{j\alpha} \langle \varphi_{j, k}^p, \eta_{j, k'}^p \rangle, \quad k, k' = 0, \dots, 2^j - 1$$

où φ et η sont des fonctions à supports compacts de $L^2(\mathbb{R})$ et $2^{j\alpha}$ est un facteur d'échelle. Ces matrices sont circulantes et admettent classiquement la base ortho-normale de vecteurs propres

$$e_{j,m} = 2^{-j} \left(z_{j,m}^k \right)_{k=0,\dots,2^j-1}, \quad m = 0, \dots, 2^j - 1,$$

où $z_{j,m} = e^{2i\pi m 2^{-j}}$, associés aux valeurs propres

$$\lambda_{j,m} = 2^{j\alpha} \sum_{\nu \in \mathbb{Z}} \langle \varphi, \eta(\cdot - \nu) \rangle z_{j,m}^\nu, \quad m = 0, \dots, 2^j - 1.$$

Soient $\varepsilon = 1, 2$. Les valeurs propres $\lambda_{j,m}^\varepsilon$ et $\lambda_{j,m}^{\nu\varepsilon}$ des matrices de masse $\langle \Phi_j^\varepsilon, \Phi_j^\varepsilon \rangle$ et $\langle \Phi_j^{\nu\varepsilon}, \Phi_j^{\nu\varepsilon} \rangle$ sont uniformément majorées et minorées par des constantes positives. De la relation $\frac{d}{dx} \phi^{\nu\varepsilon}(x) = \phi^\varepsilon(x+1) - \phi^\varepsilon(x)$, on déduit que les valeurs propres de la matrice de rigidité $\langle \frac{d}{dx} \Phi_j^{\nu\varepsilon}, \frac{d}{dx} \Phi_j^{\nu\varepsilon} \rangle$ sont données par la formule $2^{2j} |1 - z_{j,m}|^2 \lambda_{j,m}^\varepsilon$. De même, les valeurs propres de la matrice dérivée $\langle \frac{d}{dx} \Phi_j^{\nu_1}, \Phi_j \rangle$ s'écrivent $2^j \frac{(1-z_{j,m})}{z_{j,m}} Q(z_{j,m})$ et celle de la matrice $\langle \Phi_j^{\nu_2}, \Phi_j \rangle$ sont égales à $P(z_{j,m})$.

On en déduit facilement que les valeurs propres de l'opérateur d'Uzawa discret exprimé dans la base de Riesz $\Phi_j \otimes \Phi_j$ (en excluant le mode de pression constante) s'exprime par la formule explicite suivante: pour tout $(m, n) \in \{0, \dots, 2^j - 1\}^2 / \{(0, 0)\}$

$$\begin{aligned} \Lambda_{m,n} &= \frac{|1 - z_{j,m}|^2 |Q(z_{j,m})|^2 |P(z_{j,n})|^2}{|1 - z_{j,m}|^2 \lambda_{j,m}^1 \lambda_{j,n}^2 + |1 - z_{j,n}|^2 \lambda_{j,m}^{\nu_1} \lambda_{j,n}^2} \\ &+ \frac{|1 - z_{j,n}|^2 |P(z_{j,m})|^2 |Q(z_{j,n})|^2}{|1 - z_{j,m}|^2 \lambda_{j,m}^2 \lambda_{j,n}^{\nu_1} + |1 - z_{j,n}|^2 \lambda_{j,m}^{\nu_2} \lambda_{j,n}^1}. \end{aligned}$$

L'ensemble $\{z_{j,m}, j \geq j_0, m = 0, 2^j - 1\}$ étant dense dans le compact \mathbb{T}^1 quelque soit $j_0 \geq 0$, on en déduit facilement l'assertion. \square

Remarque 3.15 *On peut en particulier déduire de cette formule une preuve alternative des propositions 3.6 et 3.10 (cas uniforme). En effet, dans le premier cas $\phi^1 = \phi^{\nu_2} = \phi$, $\phi = \tilde{\phi}$ et donc $a_\nu = b_\nu = \delta_\nu$ i.e. $P = Q = 1$. Dans le second cas $\phi^1 = \phi^{\nu_2} = \phi = \phi$ et on conclut par la propriété de base de Riesz de $\{\phi_\nu, \nu \in \mathbb{Z}\}$.*

On déduit de cette formule explicite que la condition LBB ne pourra jamais être satisfaite si $\phi^{\nu_1} = \phi^{\nu_2}$ dans les cas suivants.

Proposition 3.15 *On considère $\phi^{\nu_1} = \phi^{\nu_2} = \phi^\nu$. Alors dans tous les cas de figure suivants (i), (ii) et (iii), la condition LBB est violée. Précisément il existe au moins un mode parasite et la constante β_j de*

$$\inf_{p_j \in M_j} \sup_{\vec{u}_j \in \vec{X}_j} \frac{\langle \nabla \cdot \vec{u}_j, p_j \rangle}{\|\vec{u}_j\|_{\vec{X}} \|p_j\|_{M/Ker \vec{\nabla}_j}} \geq \beta_j > 0.$$

vérifie l'estimation $\beta_j \lesssim 2^{-j}$.

(i) Les générateurs ϕ^v et ϕ sont de symétrie paire au point 0 ($\varphi(x) = \varphi(-x)$) ou au point 1/2 ($\varphi(x) = \varphi(1-x)$), ce qui exclut en particulier la famille des fonctions d'échelle splines biorthogonales.

(ii) Avec les notations de la proposition 3.1, $\phi^v = \phi^i$.

(iii) $\phi^v = \phi$.

Preuve. Dans tous ces cas de figure, par symétries, l'un des polynômes $P(z)$ ou $Q(z)$ va s'annuler au point $z = -1$.

En effet, pour (i), soient par exemple les générateurs ϕ^1 et ϕ^2 tels que $\phi^1(1-x) = \phi^1(x)$ et $\phi^2(-x) = \phi^2(x)$. Alors, pour $a_\nu = \langle \phi^1, \phi_\nu^2 \rangle$, la somme $\sum_\nu (-1)^\nu a_\nu$ s'annule du fait de la symétrie $a_\nu = a_{1-\nu}$. La même remarque s'applique aussi à $a_\nu = \langle \phi^2, \phi_\nu^1 \rangle$. Ceci couvre le cas (i), pour les cas (ii) et (iii), il suffit de remarquer que la somme $\sum_\nu (-1)^\nu a_\nu$ s'annule pour $a_\nu = \langle \phi', \phi_\nu \rangle$ du fait de la symétrie $a_\nu = -a_{-\nu}$.

Par conséquent, comme c'est le cas des discrétisations éléments finis $\mathbb{Q}_1 - \mathbb{Q}_1$ ou $\mathbb{Q}_1 - \mathbb{Q}_0$ sur une grille dyadique uniforme [58], le mode parasite du damier $e_{k,k'} = (-1)^{k+k'}$, obtenu pour $(m, n) = (2^{j-1}, 2^{j-1})$ brise la condition LBB. En outre, pour les valeurs de (m, n) voisines, la valeur propre $\Lambda_{m,n}$ est d'ordre $\lesssim 2^{-2j}$, ce qui prouve la majoration de la constante β_j . \square

D'après la proposition 3.15, le mode parasite du damier provient du choix de générateurs symétriques à la fois pour la vitesse et de la pression. Une idée naturelle consiste donc à chercher à dissymétriser le générateur de la pression tout en conservant les avantages d'un générateur symétrique pour la vitesse. Pour un choix fixé de tels générateurs, on peut alors tracer les graphes des polynômes trigonométriques $P(e^{i\xi}) = \sum_\nu \langle \phi^{v_2}, \phi_\nu \rangle e^{i\xi}$ et $Q(e^{i\xi}) = \sum_\nu \langle \phi^1, \phi_\nu \rangle e^{i\xi}$ sur l'intervalle $\xi \in [0, \pi]$ (par symétrie) et vérifier numériquement qu'ils ne s'annulent pas.

Un candidat naturel pour le générateur de la pression est la fonction d'échelle orthogonale à support compact de Daubechies ϕ^{D,n_d} d'ordre $n_d \geq 2$. Dans les expériences numériques suivantes on va choisir le générateur de la vitesse dans la famille des fonctions d'échelle splines biorthogonales. Précisément on considère les générateurs splines ϕ^n d'ordre $n \geq 2$ conduisant à la discrétisation

$$\begin{cases} \vec{X}_j = \frac{\overline{S(\Phi_j^n \otimes \Phi_j^n)^2}}{S(\Phi_j^{D,n_d} \otimes \Phi_j^{D,n_d})}, \\ M_j = \frac{\overline{S(\Phi_j^n \otimes \Phi_j^n)^2}}{S(\Phi_j^{D,n_d} \otimes \Phi_j^{D,n_d})}, \end{cases} \quad (3.53)$$

et les générateurs duaux $\tilde{\phi}^{1,n}$ pour $n \geq 3$ impair, définissant la discrétisation

$$\begin{cases} \vec{X}_j = \frac{\overline{S(\tilde{\Phi}_j^{1,n} \otimes \tilde{\Phi}_j^{1,n})^2}}{S(\Phi_j^{D,n_d} \otimes \Phi_j^{D,n_d})}, \\ M_j = \frac{\overline{S(\tilde{\Phi}_j^{1,n} \otimes \tilde{\Phi}_j^{1,n})^2}}{S(\Phi_j^{D,n_d} \otimes \Phi_j^{D,n_d})}. \end{cases} \quad (3.54)$$

Les courbes $(\xi, |\sum_{\nu} a_{\nu} e^{i\nu\xi}|)$ sont tracées figure 3.1 pour $a_{\nu} = \langle \phi^n, \phi_{\nu}^{D,n_d} \rangle$ et figure 3.2 pour $a_{\nu} = \langle \tilde{\phi}^{1,n}, \phi_{\nu}^{D,n_d} \rangle$ et $a_{\nu} = \langle \tilde{\phi}^{2,n-1}, \phi_{\nu}^{D,n_d} \rangle$.

On conclut que les discrétisations (3.53) obtenues pour les couples $(n, n_d) = (2, 2), (3, 2), (3, 3), (4, 3), (4, 4)$ satisfont la condition LBB uniformément en j et induisent des ordres d'approximation du problème de Stokes optimaux égaux à 1, 2, 2, 3, 3. Les cas (3, 3) et (4, 3) sont inutilisables en pratique car la somme $\sum_{\nu} \langle \phi^3, \phi_{\nu}^{D,3} \rangle e^{i\nu\xi}$ s'annule "presque" pour $\xi = \pi$, ce qui induit un conditionnement très élevé du complément de Schur).

De même les discrétisations (3.54) obtenues pour $(n, n_d) = (3, 2)$ et $(5, 4)$ satisfont la condition LBB uniformément en j et induisent des ordres d'approximation optimaux égaux à 2 et 4.

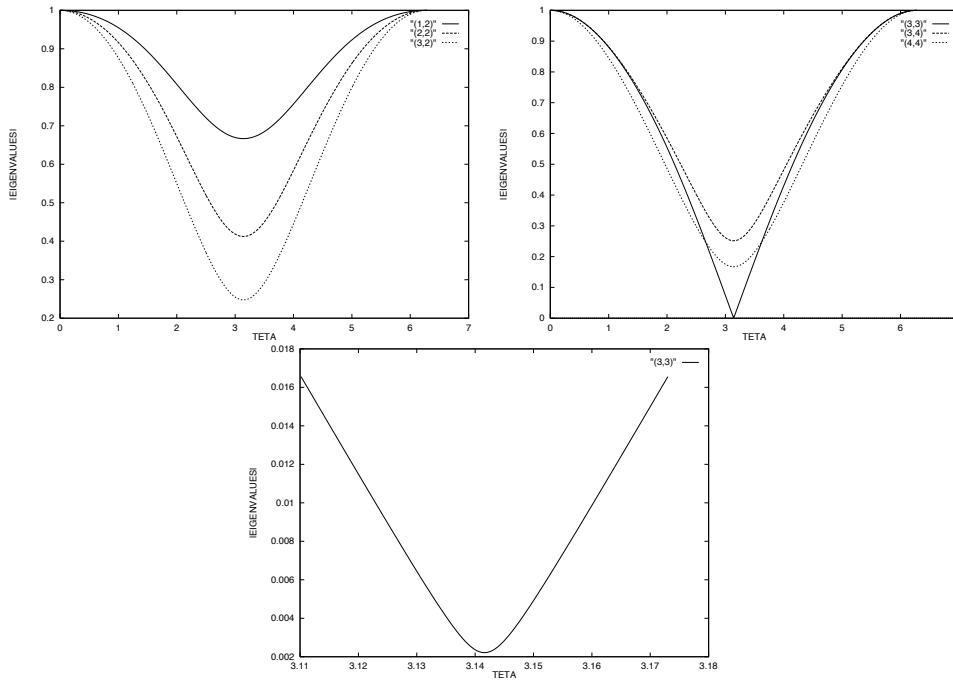


FIG. 3.1 – Courbes $(\theta, |\sum_{\nu} \langle \phi^n, \phi_{\nu}^{D,n_d} \rangle e^{i\nu\theta}|)$ pour différents couples (n, n_d) .

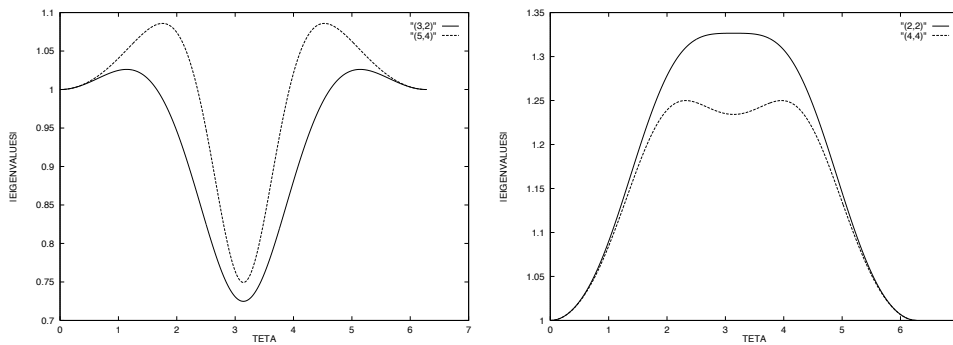


FIG. 3.2 – Courbes $(\theta, |\sum_{\nu} a_{\nu} e^{i\nu\theta}|)$ pour différents couple (n, n_d) et pour $a_{\nu} = \langle \tilde{\phi}^{1,n}, \phi_{\nu}^{D,n_d} \rangle$ si n est impair; et $a_{\nu} = \langle \tilde{\phi}^{2,n}, \phi_{\nu}^{D,n_d} \rangle$ si n est pair.

Domaines tensoriels $]0, 1[^d$

On étudie l’adaptation des discrétisations précédentes aux domaines tensoriels $]0, 1[^d$. Cette discussion, purement heuristique, est étayée par des expériences numériques en dimension $d = 2$.

La construction des AMR sur l’intervalle va bien sûr briser l’uniformité dyadique de la discrétisation au voisinage des extrémités. On s’attend par conséquent à voir disparaître le mode parasite du damier dans les discrétisations induites par la proposition 3.15. Cependant, l’opérateur d’Uzawa discret sur $]0, 1[^d$ apparaissant comme une perturbation de l’opérateur défini sur le tore \mathbb{T}^d , l’ensemble des petites valeurs propres (de l’ordre de 2^{-2j}) au voisinage de ce mode, ne peut raisonnablement disparaître. Par conséquent, il est inutile d’espérer satisfaire la condition LBB sur le domaine tensoriel si la discrétisation sur le tore associée s’inscrit dans le cadre de la proposition 3.15.

D’autre part, du fait des perturbations induites aux bords par la construction sur l’intervalle, des modes parasites supplémentaires “locaux” concentrés au voisinage de la frontière (bien qu’en général leur support est $[0, 1]^d$) peuvent apparaître dans la discrétisation. Contrairement aux modes globaux comme celui du damier, ces modes sont en fait faciles à filtrer. L’idée consiste simplement à augmenter les paramètres $\delta = (\delta_0, \delta_1)$ dans la construction sur l’intervalle associée au générateur de l’espace de pression. On préserve ainsi l’ordre d’approximation optimal de l’espace de pression tout en diminuant sa dimension. Pour des valeurs de (δ_0, δ_1) suffisamment grandes, on verra que ce procédé suffira à éliminer tous les modes parasites localisés sur la frontière.

On présente maintenant deux exemples numériques qui illustrent ces remarques.

Exemple 1. Soient les générateurs symétriques ϕ^1 pour la vitesse et ϕ^2 pour la pression. D’après la proposition 3.15 (i), la discrétisation du problème de Stokes correspondante sur le tore présente au moins le mode parasite global du damier. On va considérer, sur le domaine $]0, 1[^2$, la discrétisation associée à ces générateurs et aux paramètres δ^1 et δ^2 de la construction sur l’intervalle pour le choix symétrique $\delta^1 = \delta_0^1 = \delta_1^1$ et $\delta^2 = \delta_0^2 = \delta_1^2$.

$$\begin{cases} \vec{X}_j = \frac{(V_j^{0,\delta^1} \otimes V_j^{0,\delta^1})^2}{V_j^{\delta^2} \otimes V_j^{\delta^2}}, \\ M_j = V_j^{\delta^2} \otimes V_j^{\delta^2}. \end{cases}$$

On teste numériquement les deux types de discrétisation (a) $\phi^1 = \tilde{\phi}^{1,\tilde{n}_1}$ pour la vitesse et $\phi^2 = \tilde{\phi}^{1,\tilde{n}_2}$ pour la pression et (b) $\phi^2 = \tilde{\phi}^{2,\tilde{n}-1}$ pour la pression et $\phi^1 = \phi^{2,i} = \tilde{\phi}^{1,\tilde{n}}$ pour la vitesse. Dans les deux cas, on ne constate aucun mode parasite

global, alors que les modes locaux obtenus pour $\delta^1 = \delta^2$ s'éliminent facilement pour le choix $\delta^2 = \delta^1 + 1$. Le calcul du conditionnement du complément de Schur en base de fonctions d'échelle est présenté table 3.1. Il montre clairement une dépendance en 2^{2j} dans le premier cas (a) et une dépendance plus faible mais significative dans le second cas (b) pour les valeurs de j testées.

TAB. 3.1 – *Nombres de conditionnement de l'opérateur d'Uzawa discret $\nabla_j \cdot \Delta_j^{-1} \vec{\nabla}_j$ sur $]0, 1[$ en base de fonctions d'échelle, pour (a) les générateurs $(\tilde{\phi}^{1, \tilde{n}_1} \otimes \tilde{\phi}^{1, \tilde{n}_1})^2$ pour la vitesse et $\tilde{\phi}^{1, \tilde{n}_2} \otimes \tilde{\phi}^{1, \tilde{n}_2}$ pour la pression et (b) $(\tilde{\phi}^{1, \tilde{n}} \otimes \tilde{\phi}^{1, \tilde{n}})^2$ pour la vitesse et $\tilde{\phi}^{2, \tilde{n}-1} \otimes \tilde{\phi}^{2, \tilde{n}-1}$ pour la pression.*

$j / \tilde{n}_1, \tilde{n}_2$	3,3	3,5	j / \tilde{n}	3	5
4	60	60	3	15	
5	250	240	4	19	15
6	~ 1200	~ 1150	5	68	30

Exemple 2. On teste numériquement sur le domaine $]0, 1[$ la discrétisation (3.54) pour les couples $(n, n_d) = (3, 2)$ et $(5, 4)$, pour lesquels la condition LBB est donc vérifiée uniformément en j sur le tore \mathbb{T}^d . Le paramètre $\tilde{\delta}$ pour la construction de l'AMR sur l'intervalle $\tilde{V}_j^{0, \tilde{\delta}}$ de la vitesse est fixé égal à $(1, 1)$, et on note $\delta = (\delta_0, \delta_1)$ celui lié à l'AMR sur l'intervalle de la pression.

Comme attendu, on ne constate aucun mode parasite global. De plus, les modes parasites locaux sont des modes *frontières* que l'on filtre sans difficulté en augmentant les paramètres δ_0 ou δ_1 . Dans ce cas, il va suffire d'agir sur l'extrémité 0, dans la mesure où tous les modes locaux sont concentrés en 0, alors qu'à l'extrémité 1 on fixe $\delta_1 = 0$. La valeur minimale de δ_0 permettant d'éliminer tous les modes parasites est $\delta_0 = 2$ pour $(n, n_d) = (2, 3)$ et $\delta_0 = 3$ pour $(n, n_d) = (5, 4)$. La table 3.2 ci-dessous donne un avant goût de l'uniformité du conditionnement de l'opérateur d'Uzawa discret en base de fonctions d'échelle. Cette propriété sera confirmée pour des plus grandes valeurs de l'échelle j par l'analyse au §3.8 de la convergence de l'algorithme du gradient conjugué.

TAB. 3.2 – *Nombres de conditionnement de l'opérateur d'Uzawa discret en base de fonctions d'échelle $\nabla_j \cdot \Delta_j^{-1} \vec{\nabla}_j$ sur $]0, 1[$ et pour les générateurs $(\tilde{\phi}^{1, n} \otimes \tilde{\phi}^{1, n})^2$ pour la vitesse et $\phi^{D, n_d} \otimes \phi^{D, n_d}$ pour la pression.*

$j / (n, n_d)$	3,2	5,4
3	5.34	
4	5.53	6.45
5	5.59	6.47

3.7 Décomposition de domaine

L'extension des discrétisations en ondelettes du problème de Stokes construites sur le domaine de référence $]0, 1[^d$ à des domaines plus généraux $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ s'effectue classiquement par une technique de décomposition de domaine.

Selon les notations du §1.4, soit la décomposition $(\Omega_i, \kappa_i)_{i=1, \dots, N}$ du domaine Ω en sous domaines disjoints Ω_i isomorphes au domaine de référence $]0, 1[^d$ et tels que $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^N \bar{\Omega}_i$. Cette décomposition est supposée C^0 conforme selon la définition du §1.4.3. Sur chacun des sous domaines Ω_i , on suppose construites les discrétisations $\vec{X}_h(\Omega_i)$ de l'espace $(H^1(\Omega_i))^d$ (i.e. sans conditions aux limites) et $V_h(\Omega_i)$ de l'espace $L^2(\Omega_i)$ (i.e. sans contrainte de valeur moyenne nulle). La discrétisation de la vitesse sur le domaine Ω est définie par raccord fonctionnel continu aux interfaces alors qu'aucun raccord n'est nécessaire pour la pression.

$$\begin{cases} \vec{X}_h(\Omega) : = \left(\prod_{i=1}^N \vec{X}_h(\Omega_i) \right) \cap \vec{X}(\Omega) \\ M_h(\Omega) : = \left(\prod_{i=1}^N V_h(\Omega_i) \right) \cap M(\Omega) \end{cases} \quad (3.55)$$

On a alors le lemme classique de Boland-Nicolaides [14].

Lemme 3.4 *Dès que les conditions (i) et (ii) suivantes sont vérifiées, la discrétisation 3.55 satisfait la condition LBB uniformément en h .*

(i) *Pour tout $i = 1, \dots, N$, la discrétisation $(\vec{X}_h(\Omega_i) \cap \vec{X}(\Omega_i), V_h(\Omega_i) \cap M(\Omega_i))$ vérifie la condition LBB uniformément en h .*

(ii) $\{\vec{u} \in \vec{X}(\Omega) : u_i|_{\Omega_i} \circ \kappa_i \in \mathbb{Q}_2(\hat{\Omega}), l = 1, \dots, N, i = 1, \dots, d\} \subset \vec{X}_h(\Omega)$.

Dans notre cadre, les discrétisations $\vec{X}_h(\Omega_i)$ et $V_h(\Omega_i)$ sont naturellement définies par le transport des discrétisations sur le domaine de référence $]0, 1[^d$ par la paramétrisation κ_i (cf proposition 1.14).

La première difficulté réside alors dans le raccord continu de la vitesse aux interfaces de la décomposition, dans le cas des discrétisations des §3.4 et §3.5 où deux générateurs distincts sont utilisés pour définir chaque composante de la vitesse. Dans ce cas, le raccord fonctionnel continu n'est possible qu'en imposant des conditions géométriques supplémentaires restrictives sur la décomposition $(\Omega_i, \kappa_i)_{i=1, \dots, N}$ du domaine Ω . Par exemple, en dimension $d = 2$, un sommet intérieur doit nécessairement comporter un nombre pair de sous domaines. Cette restriction tombe dans le cas de la discrétisation du §3.6 qui utilise un seul générateur pour définir la vitesse. Sous l'hypothèse de raccord continu aux interfaces, noter que la condition (ii) est toujours vérifiée dès que les fonctions d'échelle grossières sont incluses dans la discrétisation.

La deuxième difficulté majeure consiste à étendre la condition LBB sur chacun des sous domaines Ω_i . Il est clairement faux que la validité de la condition LBB sur le domaine de référence implique la même propriété sur les sous domaines. En particulier, dans le cas des discrétisations des §3.4 et §3.5, une simple permutation des

axes du domaine de référence va clairement briser la condition LBB par apparition du mode parasite du damier (du moins rigoureusement dans le cas périodique). En revanche, la discrétisation du §3.6 est probablement moins sensible à une rotation du domaine de référence.

Afin de contourner ces difficultés, considérons l'exemple du domaine en L du §1.4.3. Pour ce domaine, les paramétrisations κ_i sont de simples translations de $]0, 1]^2$ sur les 3 sous domaines $\Omega_i, i = 1, 2, 3$. Dans le cas d'une discrétisation uniforme, le lemme 3.4 s'applique alors directement aux discrétisations des §3.4, 3.5 et 3.6. La seule difficulté consiste donc à étendre les discrétisations non uniformes des §3.4 et 3.5. A nouveau, il faut distinguer les ondelettes intérieures à chaque sous domaine Ω_i des ondelettes localisées dans un voisinage du squelette $\bigcup_{i=1}^d \partial\Omega_i$ qui inclut à la fois la frontière et les interfaces. Dans le cadre du §3.4, on peut alors choisir les bases d'ondelettes aux interfaces de sorte que les conclusions du §3.4 restent vraies: les ondelettes intérieures se traitent comme dans le cas périodique alors qu'aux bords des sous domaines il suffit de rajouter des ondelettes d'échelles inférieures dans un voisinage de l'ondelette de pression. De même, la proposition 3.13 du §3.5 reste vérifiée en raffinant la vitesse uniquement au voisinage des bords des sous domaines.

3.8 Exemples numériques

Algorithmes itératifs pour le système de Stokes

On rappelle dans ce paragraphes les algorithmes itératifs classiques de résolution du système d'équations issu de la discrétisation du problème de Stokes. Soient $\vec{\Phi}_h$ et Φ_h des bases engendrant les discrétisations \vec{X}_h de la vitesse et de la pression M_h . On note $A_h = \langle \vec{\nabla} \vec{\Phi}_h, \vec{\nabla} \vec{\Phi}_h \rangle$ la matrice Galerkin de l'opérateur laplacien discret $-\Delta_h$ et $B_h^T = \langle \nabla \cdot \vec{\Phi}_h, \Phi_h \rangle$ la matrice de l'opérateur gradient discret $\vec{\nabla}_h$. Etant donné un second membre $(\vec{f}, g) \in \vec{X}' \times M$, on cherche la solution (U_h, P_h) du système

$$\begin{cases} A_h U_h + B_h^T P_h = F_h \\ B_h U_h = G_h, \end{cases} \quad (3.56)$$

où $F_h = \langle \vec{f}, \vec{\Phi}_h \rangle$ et $G_h = \langle g, \Phi_h \rangle$.

L'algorithme de résolution le plus classique est celui d'Uzawa qui élimine la vitesse dans le système précédent pour aboutir à l'équation du complément de Schur pour la pression

$$\begin{cases} Z_h P_h := B_h A_h^{-1} B_h^T P_h = -G_h + B_h A_h^{-1} F_h := D_h \\ A_h U_h = F_h - B_h^T P_h. \end{cases} \quad (3.57)$$

Les matrices Z_h et A_h étant symétriques définies positives, l'équation $Z_h P_h = D_h$ se résoud classiquement par un algorithme de gradient conjugué préconditionné (PCG) à la fois pour "l'inversion" de la matrice A_h (itérations internes pour le calcul du

résidu $Z_h P_h^n - D_h$) et pour la résolution du complément de Schur Z_h (itérations externes).

Le préconditionnement du laplacien discret sera dans notre cadre, le préconditionnement “diagonal” voire “presque diagonal” en base d’ondelettes dont nous avons étudié les performances au §2.1.3.

Le préconditionnement du complément de Schur n’est pas rigoureusement nécessaire dans la mesure où la condition LBB uniforme assure déjà que le conditionnement de Z_h est uniformément borné dès que Φ_h est une base de Riesz. Cependant, dans le cas d’une discrétisation non uniforme, il est naturel d’utiliser l’inverse du complément de Schur au niveau j_0 comme préconditionnement, i.e. la matrice

$$\begin{pmatrix} Z_{j_0}^{-1} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \quad (3.58)$$

Cette procédure peut aussi être envisagée dans le cas d’une discrétisation uniforme, (moyennant deux transformations en ondelettes rapides), dans l’espoir d’améliorer les performances de l’algorithme. Mais il faut noter, qu’en général, le conditionnement est meilleur en base de fonctions d’échelle. La table 3.3 ci dessous présente, pour des petites valeurs de l’échelle j , les nombres de conditionnement obtenus en base de fonctions d’échelle pour quelques exemples classiques de discrétisations des §3.4 et 3.5. Elle complète la table 3.2 du §3.6 présentée pour la discrétisation (3.54).

j/n_1	5	j/n_d	3	4	j/n_2	4
4	59.6	4	18.62	12.68	4	16.8
5	66.3	5	18.63	12.70	5	17.2

TAB. 3.3 – Nombres de conditionnement de l’opérateur d’Uzawa discret en base de fonctions d’échelle $\nabla_j \cdot \Delta_j^{-1} \vec{\nabla}_j$ sur $]0, 1[^2$ et pour les générateurs $(\phi^i \otimes \phi, \phi \otimes \phi^i)$ pour la vitesse et $\bar{\phi} \otimes \bar{\phi}$ pour la pression. (i) $\phi = \bar{\phi} = \tilde{\phi}^{2,n_1}$; (ii) $\phi = \bar{\phi} = \phi^{D,n_d}$; (iii) $\phi = \tilde{\phi}^{2,n_2}$ et $\bar{\phi} = \phi^2$

L’algorithme d’Uzawa nous permettra d’étudier séparément les performances des algorithmes PCG (ou CG) pour le laplacien discret et pour le complément de Schur. En outre, quelque soit l’algorithme de résolution du système de Stokes, son efficacité reposera toujours essentiellement sur la construction d’un préconditionnement C_h pour le laplacien et K_h pour le complément de Schur.

En pratique, une programmation astucieuse de l’algorithme d’Uzawa permet d’effectuer un nombre fixé (indépendant de la précision finale) d’itérations internes du laplacien à chaque itération externe du complément de Schur. Il est cependant plus efficace d’éviter ces itérations internes en utilisant un algorithme itératif sur le système global de Stokes. Pour se faire, une première stratégie, introduite dans [70], est de résoudre le système symétrique non défini positif (3.56) préconditionné par la

matrice diagonale par blocs

$$\begin{pmatrix} C_h & 0 \\ 0 & K_h \end{pmatrix}. \quad (3.59)$$

On aboutit ainsi à un nouveau système que l'on résoud par une méthode itérative appropriée telle que GMRES ou Bi-CGSTAB. L'efficacité potentielle de ce préconditionnement (3.59) repose sur la remarque suivante de [70]: le problème aux valeurs propres

$$\begin{pmatrix} A_h & B_h^T \\ B_h & 0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} A_h & 0 \\ 0 & Z_h \end{pmatrix}$$

admet comme spectre les trois valeurs propres $\{1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2}\}$. Par conséquent, les valeurs propres du système préconditionné devraient rester raisonnablement concentrées autour de ces trois valeurs.

Une autre stratégie, introduite dans [15], consiste à définir un système linéaire équivalent symétrique défini positif par rapport à un produit scalaire ad-hoc [15] et qui peut à ce titre être résolu par un simple algorithme CG. En outre, le conditionnement du nouveau système dépend uniquement des conditionnements du laplacien et du complément de Schur préconditionnés $C_h^{1/2} A_h C_h^{1/2}$ et $K_h^{1/2} Z_h K_h^{1/2}$. Cette dernière méthode semble être a priori la plus efficace pour résoudre le problème de Stokes.

Traitement du mode de pression constante

Il est en pratique très incommode de travailler directement sur le sous espace M_h des pressions de valeur moyenne nulle. On préfère souvent effectuer les calculs sur l'espace non contraint puis filtrer le mode de pression constante en "postprocessing". Classiquement dans ce cas, l'algorithme itératif de résolution du complément de Schur Z_h convergera si et seulement si le second membre G_h du système (3.56) est dans l'image R_h (de codimension 1) de la matrice Z_h .

Considérons tout d'abord le cas d'une discrétisation uniforme à l'échelle j sur le domaine $[0, 1]^d$. On note C_j et \tilde{C}_j les vecteurs tels que $C_j^T \Phi_j = 1$ et $\tilde{C}_j = \langle \Phi_j, 1 \rangle$ reliés par l'identité $C_j^T \tilde{C}_j = 1$. L'image R_j est alors le sous espace de codimension 1 des vecteurs D_j satisfaisant la contrainte

$$C_j^T D_j = 0. \quad (3.60)$$

Le second membre g étant de valeur moyenne nulle, $G_j = \langle g, \Phi_j \rangle$ vérifiera toujours la contrainte 3.60. Cependant on calcule en fait une approximation G_j^\sharp de G_j par des formules de quadratures d'ordre au moins égal à celui de la discrétisation. Afin d'éviter la divergence du schéma itératif pour des valeurs du résidu inférieures à l'erreur de quadrature, il est préférable de corriger G_j^\sharp de façon à satisfaire la contrainte (3.60) exactement. Pour garantir dans tous les cas la convergence de l'algorithme à

la précision machine, il faut donc plutôt effectuer les calculs avec le second membre corrigé

$$G_j = G_j^\sharp - (C_j^T G_j^\sharp) \tilde{C}_j. \quad (3.61)$$

Enfin, en sortie de l'algorithme itératif, on filtre le mode constant de la pression en la projetant sur l'espace M par la correction

$$P_j = P_j^\sharp - (\tilde{C}_j^T P_j^\sharp) C_j. \quad (3.62)$$

Le préconditionnement multiéchelle du complément de Schur nécessite d'inverser la matrice du complément de Schur définie au niveau grossier j_0 . Moyennant la précaution précédente sur le second membre G_j , il va suffire classiquement de mettre une ligne à zéro et un 1 sur le terme diagonal correspondant afin d'assurer l'inversibilité de cette matrice et l'obtention d'un préconditionnement ad-hoc.

Le cas d'une discrétisation non uniforme se traite comme précédemment en supposant que l'espace des fonctions d'échelle au niveau grossier j_0 est tout entier contenu dans l'espace de discrétisation. Dans ce cas, les ondelettes duales de pression ayant une valeur moyenne nulle (i.e. l'AMR primale de la pression reproduit les constantes) il va suffire d'appliquer la procédure(3.61) au niveau des coefficients à l'échelle j_0 , alors que tous les autres sont conservés tels quels. De même le filtrage du mode de pression constante peut se faire au niveau grossier j_0 si l'on suppose que les ondelettes primales de pression ont une valeur moyenne nulle (i.e. l'AMR duale de la pression reproduit les constantes), ce qui est toujours le cas pour nos discrétisations.

Résultats numériques

On va comparer numériquement quelques exemples de discrétisations uniformes sur le domaine tensoriel $]0, 1[^2$ construites précédemment, à savoir

- les discrétisations du §3.4 obtenues pour le générateur orthogonal $\phi = \tilde{\phi} = \phi^{D,4}$ (figure 3.5) et les générateurs splines biorthogonaux $\phi = \tilde{\phi}^{2,4}, \tilde{\phi} = \phi^2$ (figures 3.6 et 3.8)
- la discrétisation du §3.5 obtenue pour le générateur $\phi = \tilde{\phi}^{2,4}$ (figures 3.7 et 3.8)
- les discrétisations du §3.6 obtenues pour les générateurs $\tilde{\phi}^{1,\tilde{n}}$ de la vitesse et ϕ^{D,n_d} de la pression et les couples $(\tilde{n}, n_d) = (3, 2)$ et $(5, 4)$ (figures 3.9 et 3.10).

Schémas itératifs pour le laplacien. Les performances du préconditionnement diagonal en base d'ondelettes sont conformes à celles étudiées au §2.1.3. En particulier les générateurs $(\tilde{\phi}^{1,\tilde{n}}, \tilde{\psi}^{1,\tilde{n}})$ donnent de meilleurs résultats que les générateurs

$(\tilde{\phi}^{2,\tilde{n}-1}, \tilde{\psi}^{2,\tilde{n}-1})$, ce qui explique la meilleure convergence obtenue figure 3.10 par rapports aux figures 3.6 et 3.7.

En revanche, les résultats médiocres obtenus figure 3.5 ne sont pas dûs au générateur orthogonal de Daubechies $\phi^{D,4}$ mais à l'AMR "quasi" orthogonale sur l'intervalle $(V_j^{0,\delta-1}, V_j^\delta)$ qui s'avère très instable tout comme d'ailleurs dans ce cas l'AMR biorthogonale $(V_j^{i,0,\delta}, \tilde{V}_j^{d,\delta})$ au sens où les matrices de masse en bases d'ondelettes sont très mal conditionnées. Dans le cas uniforme il conviendrait donc d'utiliser un préconditionnement BPX [16] ou une autre base d'ondelettes que celle conçue pour la discrétisation non uniforme du problème de Stokes.

Schémas itératifs pour le complément de Schur. Les meilleures convergences de l'algorithme PCG ou CG sont obtenues pour les discrétisations du §3.6 puis celles du §3.4 et enfin celle du §3.5, comme on pouvait le prévoir à la lecture des tables 3.2 et 3.3.

Profil d'erreur et ordre d'approximation. Les ordres de convergence prédits sont dans tous les cas obtenus, mais on est frappé par l'importance des pics d'erreurs d'approximation aux coins du carré. Comme on l'a vu au §1.3.4, par construction, l'erreur d'approximation aux extrémités de l'intervalle (et donc ici au bord du domaine et plus encore aux coins) est naturellement plus élevée qu'à l'intérieur, d'autant plus que les paramètres δ augmentent. Ici cependant, en particulier pour la pression, ces pics apparaissent très amplifiés par rapport aux profils d'erreurs présentés sur l'intervalle $[0, 1]$ au §1.3.4, pour la raison suivante.

Les modes du complément de Schur associés aux plus petites valeurs propres sont concentrés au voisinage des coins. En se référant à l'estimation d'erreur générale (3.7), on conçoit que l'erreur d'approximation de la pression soit amplifiée dans un voisinage du mode, par l'inverse de la valeur propre, alors que seulement l'inverse de sa racine carrée intervient en facteur de l'approximation de la vitesse. Ceci explique que les pics d'erreur sur la pression soient bien plus élevés lorsque l'erreur d'approximation de la vitesse dans \tilde{X}_j domine sur celle de la pression dans M_j , comme on le voit clairement en comparant les figures 3.6, 3.7 à la figure 3.8.

Ces remarques sont illustrées par les figures 3.3 et 3.4, dans l'exemple du générateur orthogonal de Daubechies $\phi^{D,4}$.

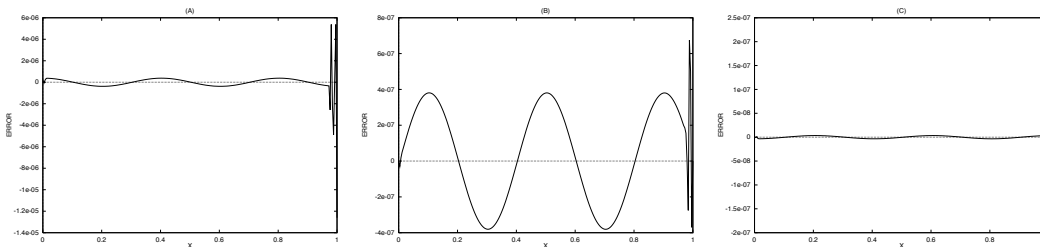


FIG. 3.3 – Profils de l'erreur de projection $H_0^1(]0, 1[)$ ou $L^2(]0, 1[)$ pour la construction sur l'intervalle associée aux générateurs (A) $\phi^{D,4}$, $\delta = 1$, sans conditions aux limites;

(B) $\phi^{D,4}$, $\delta = 0$, conditions aux limites $H_0^1(]0,1[)$; (C) $(\phi^{D,4})^i$, $\delta = 1$, conditions aux limites $H_0^1(]0,1[)$.

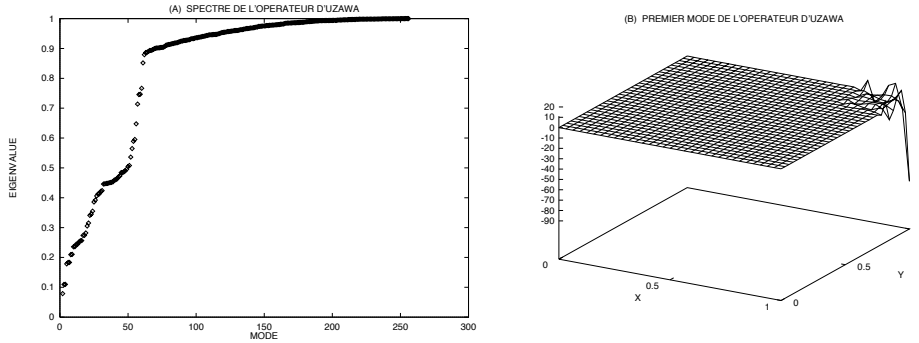


FIG. 3.4 – (A) spectre du complément de Schur et (B) premier mode (valeur propre $\sim 7.910^{-2}$) pour la discrétisation du §3.4 sur $]0,1[^2$ au niveau $j = 4$ associée au générateur orthogonal de Daubechies $\phi^{D,4}$.

L'ampleur de ces pics va varier selon les générateurs utilisés et les valeurs des paramètres δ , qu'il faut bien sûr choisir minimales. En règle générale, plus le générateur est d'ordre élevé, plus l'amplitude relative des pics augmente, mais l'on constate des différences importantes d'une famille à l'autre. Par exemple, à ordre d'approximation égal, les générateurs $\tilde{\phi}^{1,\tilde{n}}$, \tilde{n} impair, se comportent bien mieux sur l'intervalle que les splines ϕ^n ainsi que les générateurs $\phi^{2,\tilde{n}-1}$.

Ainsi les discrétisations du §3.6 présentées figures 3.9 et 3.10, donnent les meilleurs résultats en terme d'approximation.

La figure 3.8 analyse l'erreur de consistance induite par la discrétisation (3.34) du §3.4. Du fait de la non conformité $\vec{V}_j \notin \vec{V}$, l'erreur d'approximation de la pression d'ordre 2, vient polluer l'erreur d'approximation de la vitesse en norme H^1 d'ordre 3. On constate cependant, comme annoncé dans la remarque 3.9, que cette pollution intervient uniquement dans un voisinage de largeur 2^{-j} de la frontière. Cette propriété provient heuristiquement du fait que la non conformité est elle même localisée dans ce voisinage (cf remarque 3.9).

Remarque 3.16 *Bien que ces pics d'erreurs aux coins apparaissent comme un inconvénient majeur de la construction sur l'intervalle, dans le cadre d'algorithmes adaptatifs ceux-ci seront facilement tués par un raffinement adaptatif peu couteux aux coins.*

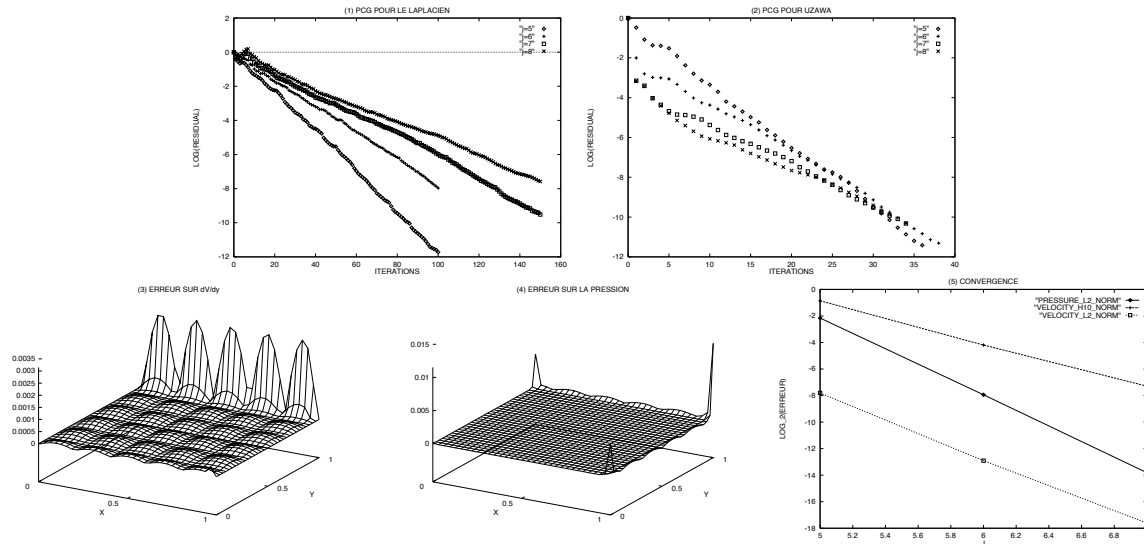


FIG. 3.5 – *Discretisation du §3.4 ($\vec{X}_j = (\Phi_j^i \otimes \Phi_j, \Phi_j \otimes \Phi_j^i)$, $M_j = \tilde{\Phi}_j \otimes \tilde{\Phi}_j$) pour le générateur orthogonal de Daubechies $\phi = \tilde{\phi} = \phi^{D,4}$. Pour la solution exacte ($u(x, y) = \sin(5\pi x) \sin(5\pi y)$, $p(x, y) = \cos(\pi x) \cos(\pi y)$): résidus de l’algorithme PCG pour (1) le laplacien, (2) le complément de Schur (PCG avec préconditionnement multiéchelle (3.58)). Erreurs d’approximation à l’échelle $j = 7$ pour (3) $\partial_y v$, (4) la pression p . (5) convergence.*

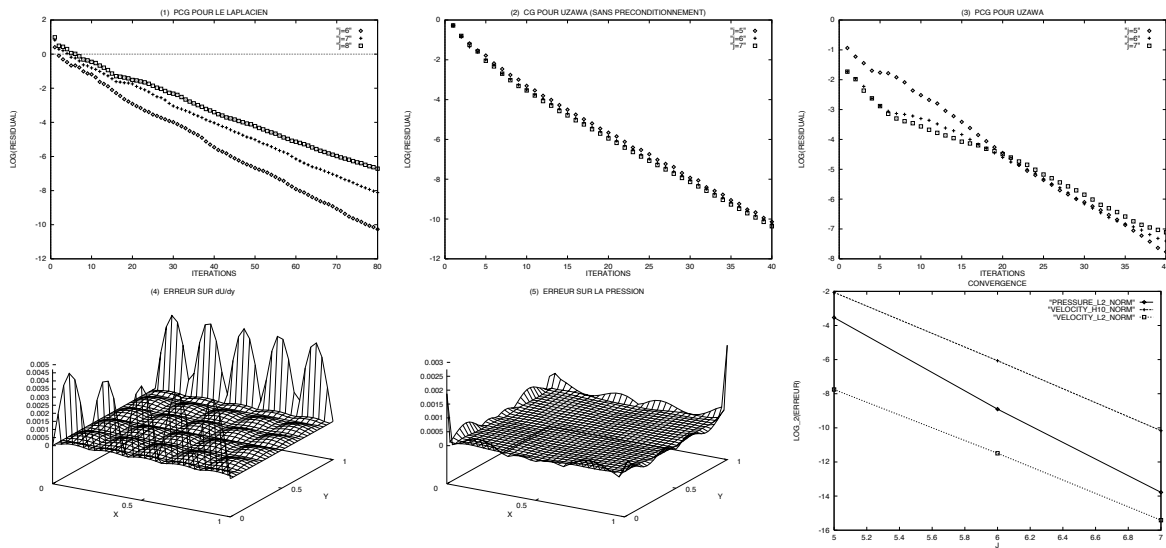


FIG. 3.6 – *Discretisation du §3.4 ($\vec{X}_j = (\Phi_j^i \otimes \Phi_j, \Phi_j \otimes \Phi_j^i)$, $M_j = \tilde{\Phi}_j \otimes \tilde{\Phi}_j$) pour les générateurs $(\phi, \tilde{\phi}) = (\tilde{\phi}^{2,4}, \phi^2)$. Pour la solution exacte ($u(x, y) = \sin(5\pi x) \sin(5\pi y)$, $p(x, y) = \cos(\pi x) \cos(\pi y)$): résidus de l’algorithme PCG pour (1) le laplacien, (2) le complément de Schur (CG en base de fonctions d’échelle), (3) le complément de Schur (PCG avec préconditionnement multiéchelle (3.58)). Erreurs d’approximation*

à l'échelle $j = 7$ pour (4) $\partial_y u$, (5) la pression p . (6) convergence.

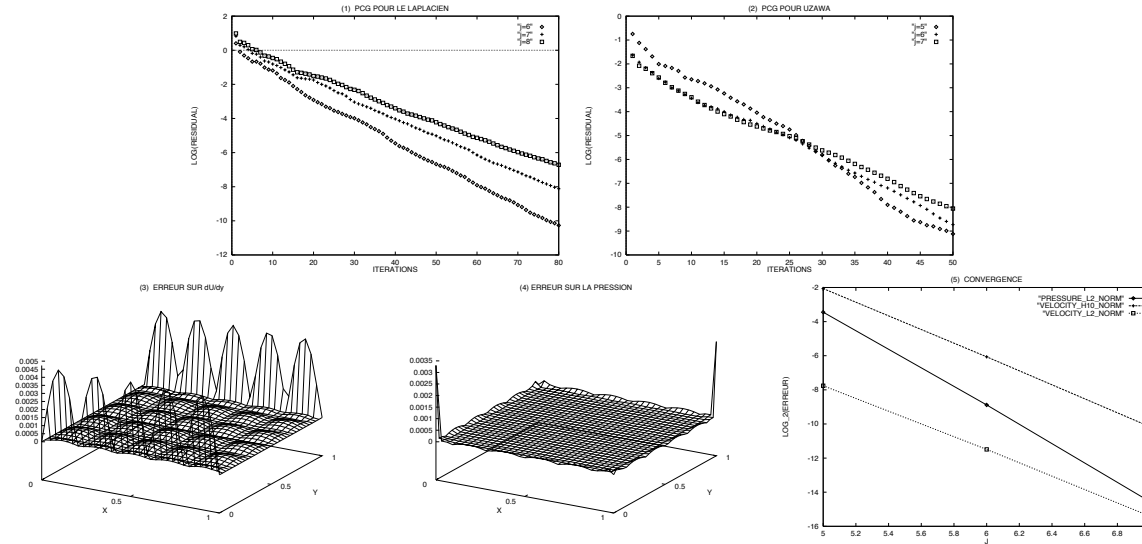


FIG. 3.7 - Discretisation du §3.5 ($\vec{X}_j = (\Phi_j^i \otimes \Phi_j, \Phi_j \otimes \Phi_j^i)$, $M_j = \Phi_j \otimes \Phi_j$) pour le générateur $\phi = \tilde{\phi}^{2,4}$. Pour la solution exacte ($u(x, y) = \sin(5\pi x)\sin(5\pi y)$, $p(x, y) = \cos(\pi x)\cos(\pi y)$): résidus de l'algorithme PCG pour (1) le laplacien, (2) le complément de Schur (PCG avec préconditionnement multiéchelle (3.58)). Erreurs d'approximation à l'échelle $j = 7$ pour (3) $\partial_y u$, (4) la pression p . (5) convergence.

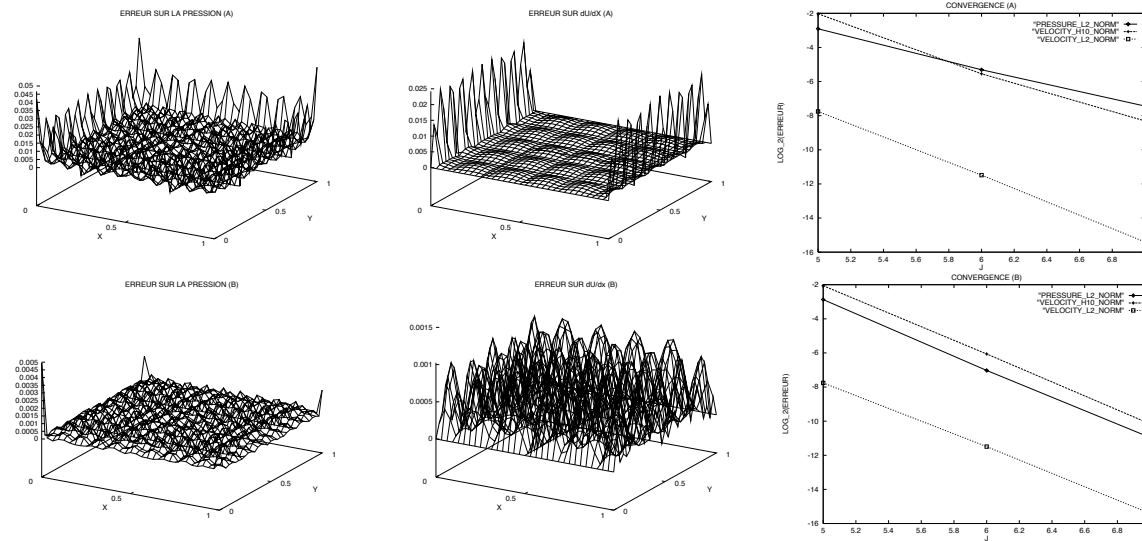


FIG. 3.8 - (A) Discretisation du §3.4 ($\vec{X}_j = (\Phi_j^i \otimes \Phi_j, \Phi_j \otimes \Phi_j^i)$, $M_j = \tilde{\Phi}_j \otimes \tilde{\Phi}_j$) pour les générateurs $(\phi, \tilde{\phi}) = (\tilde{\phi}^{2,4}, \phi^2)$. (B) Discretisation du §3.5 ($\vec{X}_j = (\Phi_j^i \otimes \Phi_j, \Phi_j \otimes \Phi_j^i)$, $M_j = \Phi_j \otimes \Phi_j$) pour le générateur $\phi = \tilde{\phi}^{2,4}$. Erreurs d'approximation sur la

pression p et la vitesse $\partial_x u$ à l'échelle $j = 7$ et convergence pour la solution exacte ($u(x, y) = \sin(5\pi x) \sin(5\pi y)$, $p(x, y) = \cos(10\pi x) \cos(10\pi y)$).

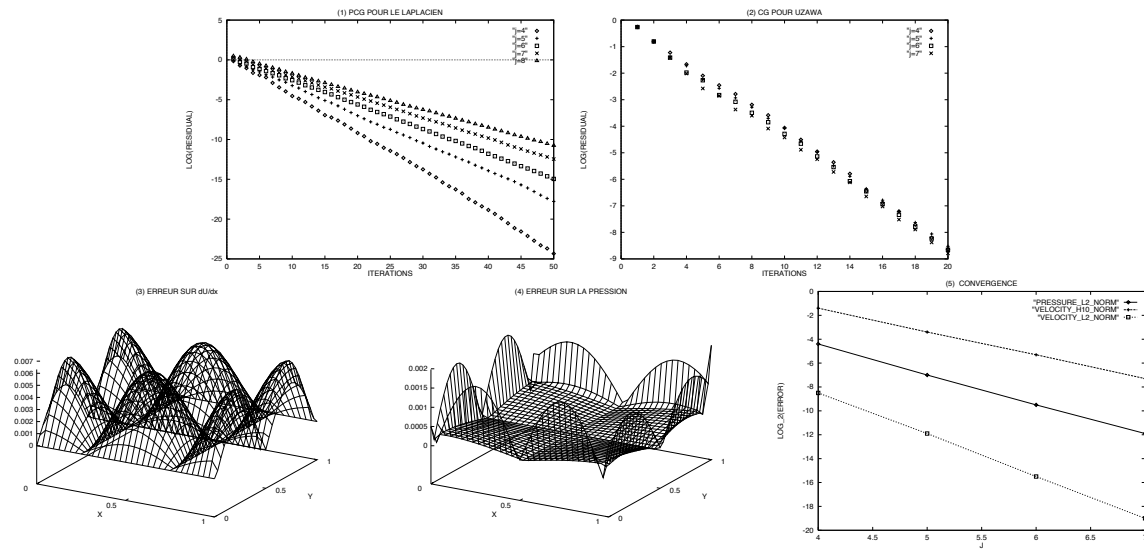


FIG. 3.9 – Discrétisation du §3.6 ($\vec{X}_j = (\Phi_j \otimes \Phi_j, \Phi_j \otimes \Phi_j)$, $M_j = \Phi_j^D \otimes \Phi_j^D$) pour les générateurs $\phi = \tilde{\phi}^{1,3}$ (vitesse) et $\phi^D = \phi^{D,2}$ (pression). Pour la solution exacte ($u(x, y) = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y)$, $p(x, y) = \cos(\pi x) \cos(\pi y)$): résidus de l'algorithme PCG pour (1) le laplacien, (2) le complément de Schur (CG en base de fonctions d'échelle). Erreurs d'approximation à l'échelle $j = 7$ pour (3) $\partial_x u$, (4) la pression p . (5) convergence.

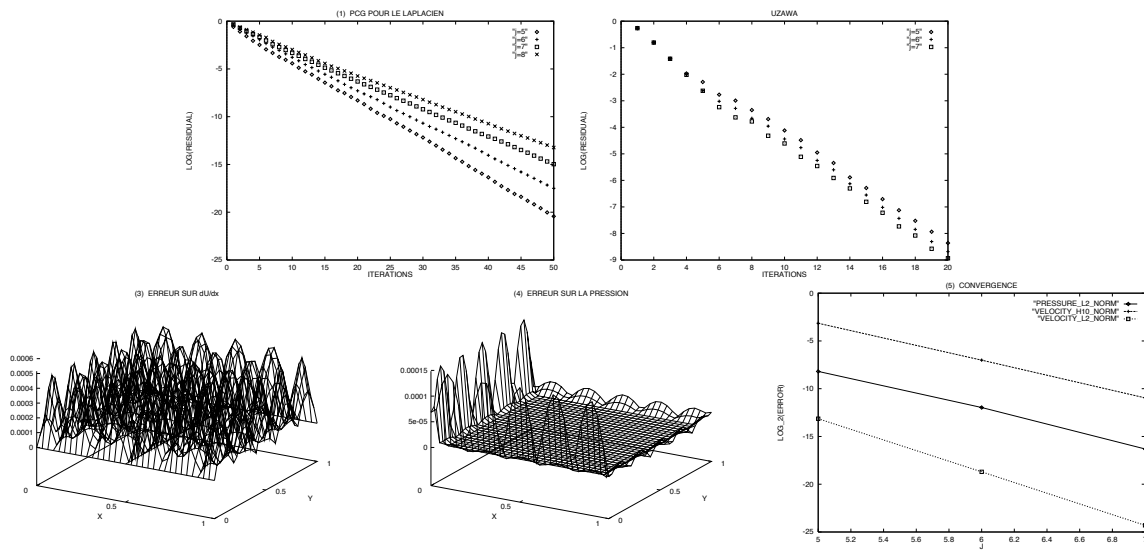


FIG. 3.10 – Discrétisation du §3.6 ($\vec{X}_j = (\Phi_j \otimes \Phi_j, \Phi_j \otimes \Phi_j)$, $M_j = \Phi_j^D \otimes \Phi_j^D$) pour les générateurs $\phi = \tilde{\phi}^{1,5}$ (vitesse) et $\phi^D = \phi^{D,4}$ (pression). Pour la solution exacte

($u(x, y) = \sin(5\pi x) \sin(5\pi y)$, $p(x, y) = \cos(\pi x) \cos(\pi y)$): résidus de l'algorithme PCG pour (1) le laplacien, (2) le complément de Schur (CG en base de fonctions d'échelle). Erreurs d'approximation à l'échelle $j = 7$ pour (3) $\partial_x u$, (4) la pression p . (5) convergence.

3.9 Un algorithme adaptatif

La théorie de l'approximation non linéaire, rappelée au §2.2.1, s'applique à chacune des composantes de la vitesse ainsi qu'à la pression. Soit $(\vec{u} = (u^i, i = 1, \dots, d), p)$ la solution du problème de Stokes. On suppose que

$$u^i \in B_{q_i, q_i}^{s_i+1}, p \in B_{q, q}^{s_p} \text{ où } \frac{1}{q_i} = \frac{1}{2} + \frac{s_i}{d}, \frac{1}{q} = \frac{1}{2} + \frac{s_p}{d}$$

de sorte que la solution admet une représentation "creuse" en bases d'ondelettes. En notant $u_{N_i}^i, i = 1, \dots, d$ (resp. p_{N_p}) les approximations non linéaires des composantes u_i (resp. de p) obtenues en retenant les N_i (resp. N_p) plus grands coefficients d'ondelettes normalisés en norme H_0^1 (resp. L^2) de u^i (resp. de p), on a les estimations directes

$$\begin{cases} \|u^i - u_{N_i}^i\|_{H_0^1} \lesssim N_i^{-s_i/d} \|u^i\|_{B_{q_i, q_i}^{s_i+1}}, i = 1, \dots, d \\ \|p - p_{N_p}\|_M \lesssim N_p^{-s/d} \|p\|_{B_{q, q}^{s_p}}. \end{cases}$$

Dans le cadre de la résolution du problème de Stokes par un algorithme adaptatif, les fonctions \vec{u} et p sont inconnues. La stratégie adoptée est alors la même que dans le cas des problèmes elliptiques présentés au §2.2.2. On génère itérativement une suite d'ensembles $(\Lambda_{\vec{u}}^n, \Lambda_p^n)$ et les solutions du problème mixte associé $(\vec{u}_{\Lambda_{\vec{u}}^n}, p_{\Lambda_p^n})$ ou plutôt des solutions approchées obtenues par un certain nombre d'itérations d'un algorithme itératif (cf §3.8). Cette suite est dite asymptotiquement optimale si elle vérifie

$$\begin{cases} \#\Lambda_{\vec{u}}^n \sim \#\Lambda_p^n \\ \|\vec{u} - \vec{u}_{\Lambda_{\vec{u}}^n}\|_{\vec{X}} + \|p - p_{\Lambda_p^n}\|_M \lesssim (\#\Lambda_p^n)^{-s/d}. \end{cases}$$

dès la meilleure approximation non linéaire de la solution (\vec{u}, p) vérifie une telle estimation. C'est le cas en particulier sous les hypothèses ci-dessus pour $s \leq \min(s_i, i = 1, \dots, d, s_p)$.

La plupart des ingrédients de l'algorithme [28] dégagés au §2.2.2 se prolonge dans le cas du problème de Stokes. En particulier le produit rapide matrice-vecteur développé dans [28] s'applique grâce aux propriétés de compression de l'opérateur de Stokes en bases d'ondelettes. De même les estimations a posteriori s'écrivent facilement dans la mesure où les normes duales $\vec{X}' \times M$ se caractérisent simplement dans les bases d'ondelettes duales $\vec{\Psi}$ et $\tilde{\Psi}$. La difficulté d'extension de l'algorithme [28] provient du fait que l'on perd la propriété d'orthogonalité de la projection de

Galerkin dans la norme d'énergie qui prévaut dans le cas d'une forme bilinéaire symétrique et coercive. Ainsi, l'obtention de la propriété de saturation

$$\|\vec{u}_{\Lambda_{\vec{u}}^{n+1}} - \vec{u}_{\Lambda_{\vec{u}}^n}\|_{\mathcal{X}} + \|p_{\Lambda_p^{n+1}} - p_{\Lambda_p^n}\|_M \geq \beta \left(\|\vec{u} - \vec{u}_{\Lambda_{\vec{u}}^n}\|_{\mathcal{X}} + \|p - p_{\Lambda_p^n}\|_M \right)$$

pour $\beta \in]0, 1[$, ne garantit plus a priori la réduction de l'erreur et donc la convergence de l'algorithme [28].

Malgré l'absence de compréhension théorique, on va tester numériquement la stratégie adaptative déjà présentée au §2.2.2: étant données des suites géométriques décroissantes $(\varepsilon_M^n, \varepsilon_m^n)$, $\varepsilon_M^n > \varepsilon_m^n$, on déraffine les ondelettes dont les coefficients (normalisés) sont inférieurs au seuil bas ε_m^n et on raffine localement dans un voisinage des ondelettes dont les coefficients sont supérieurs au seuil haut ε_M^n . Cette stratégie est appliquée à toutes les composantes de la vitesse ainsi qu'à la pression. Dans une étape supplémentaire, à chaque itération adaptative, on complète le cas échéant l'ensemble d'ondelettes de vitesse de façon à satisfaire la condition LBB uniforme et à garantir la bonne résolution du système.

On considère comme au §2.2.2 des bases d'ondelettes anisotropes sur le carré $]0, 1[^2$. La discrétisation adoptée du problème de Stokes est celle du §3.4 pour le générateur orthogonal de Daubechies $\phi = \tilde{\phi} = \phi^{D^A}$ (bien qu'a posteriori ce générateur soit loin d'être le plus performant cf §3.8).

On a retenu à nouveau, pour une ondelette $\psi_{\lambda_1} \otimes \psi_{\lambda_2}$ ($\lambda_i = j_i, k_i$) le voisinage espace-échelle correspondant à l'ensemble d'indices

$$\Lambda_{(\lambda_1, \lambda_2)} = \left\{ (j_1 + 1, 2k_1 + a, \lambda_2), (\lambda_1, j_2 + 1, 2k_2 + b), a, b = 0, 1, \right. \\ (j_1 + 1, 2k_1 + a, j_2 + 1, 2k_2 + b), a, b = 0, 1 \\ \left. (j_1, k_1 + a, j_2, k_2), (j_1, k_1, j_2, k_2 + b), a, b = +1, -1 \right\},$$

moyennant des adaptations immédiates au bord.

Les paramètres ε_m et ε_M sont divisés par deux à chaque itération n de l'algorithme adaptatif. La résolution du système linéaire à l'étape n s'effectue par un nombre fixé (petit) de l'algorithme d'Uzawa avec préconditionnement diagonal (cf §3.8), la solution initiale étant obtenue par projection de la solution à l'étape $n - 1$.

A nouveau, on fixe pour simplifier une échelle maximale $J = 8$ au delà de laquelle il n'y a plus de raffinement. Enfin la représentation des ensembles d'ondelettes se fait comme au §2.2.2.

Pour la solution exacte

$$\begin{cases} u(x, y) = v(x, y) = \sin(5\pi x) \sin(5\pi y) e^{-100(x-.5)^2} \\ p(x, y) = \cos(\pi x) \cos(\pi y) e^{-1000(y-.5)^2} \end{cases}$$

présentant des forts gradients selon les axes x pour la pression et y pour la vitesse, les figures 3.11 et 3.12 analysent l'optimalité de l'algorithme.

On voit que le comportement asymptotique de la convergence obtenue par l'algorithme adaptatif est très proche de la meilleure approximation non linéaire. La constante est en revanche moins bonne que dans l'exemple de l'opérateur laplacien présenté au §2.2.2. En particulier, cette constante est ici fortement pénalisée par l'obtention de la condition LBB uniforme. Du fait que les singularités de la vitesse et de la pression sont distinctes, cette contrainte double la dimension de l'espace de vitesse alors que les ondelettes rajoutées ne contribuent pas à l'approximation.

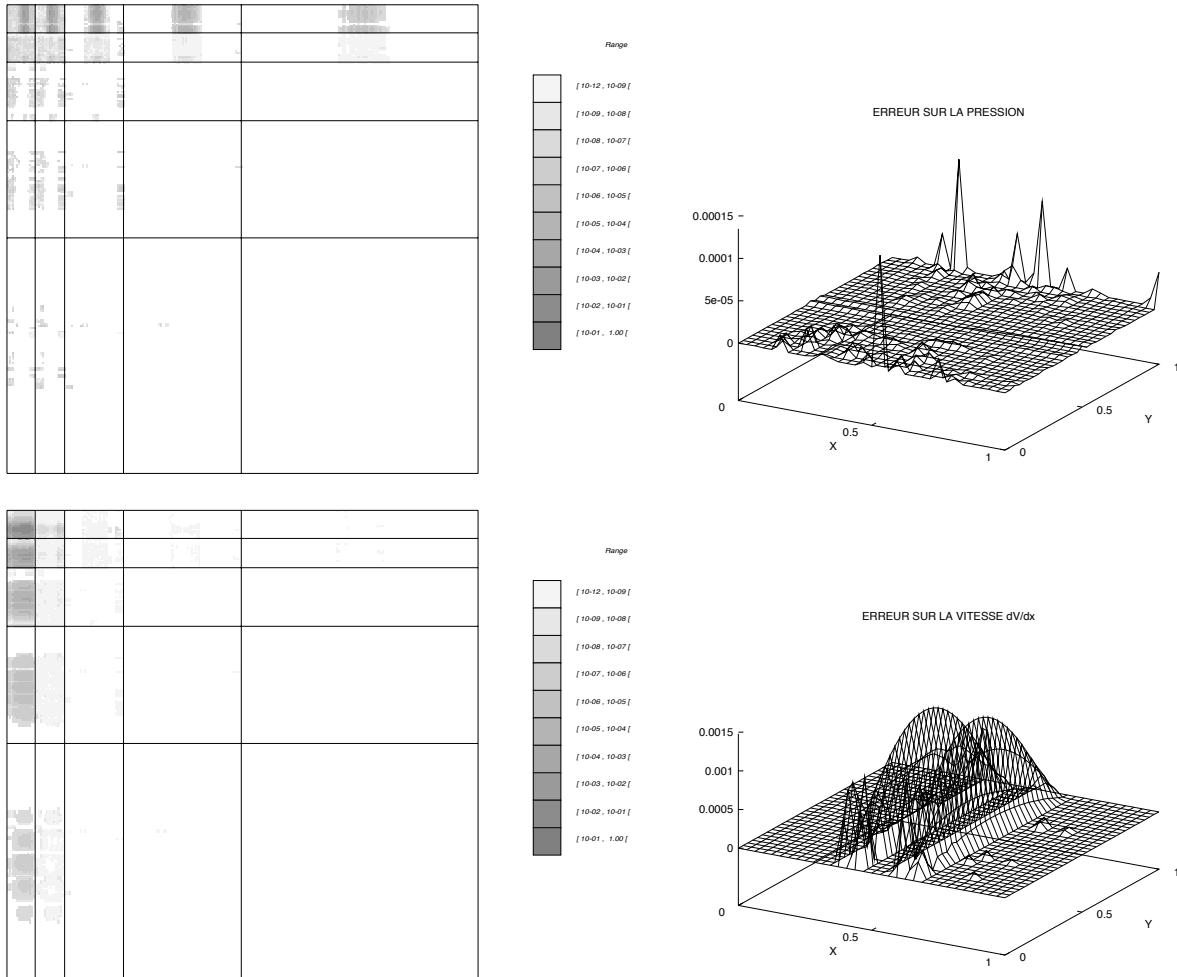


FIG. 3.11 – Pour la solution exacte $u(x, y) = v(x, y) = \sin(5\pi x) \sin(5\pi y) e^{-100(x-.5)^2}$ et $p(x, y) = \cos(\pi x) \cos(\pi y) e^{-1000(y-.5)^2}$, ensemble final d'ondelettes de pression (resp. de la composante v de la vitesse) et erreur associée après 5 itérations de l'algorithme adaptatif.

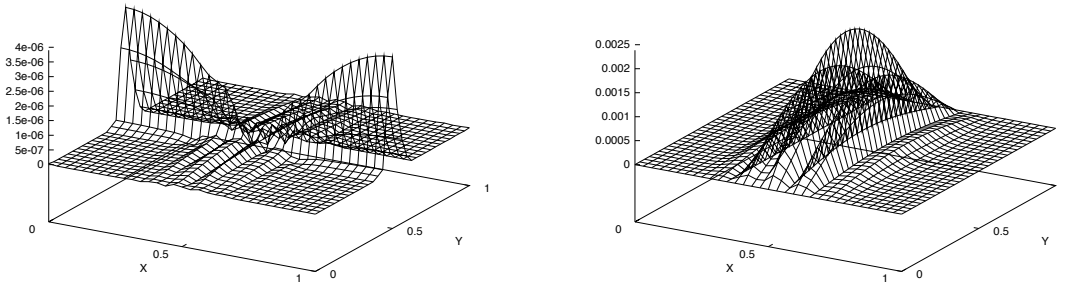
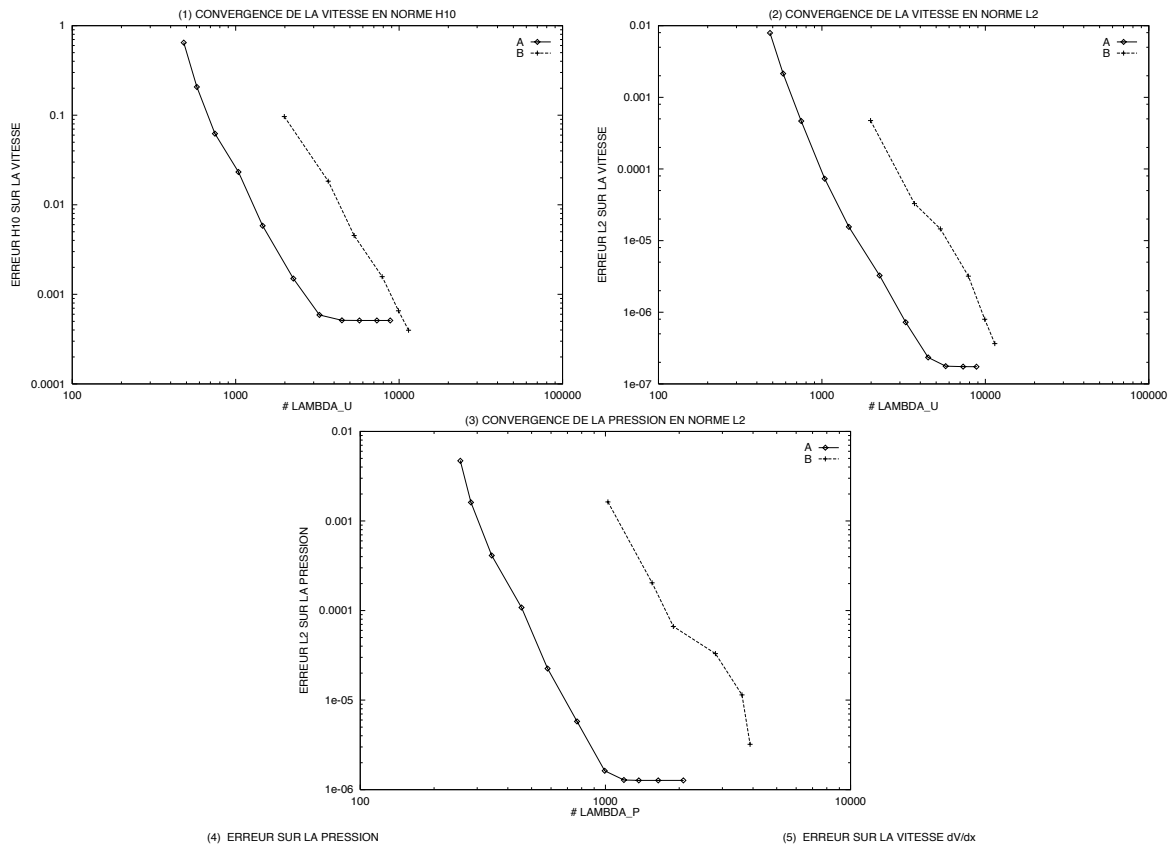


FIG. 3.12 – (1), (2) et (3): convergence de l’algorithme itératif pour la solution exacte $u(x,y) = v(x,y) = \sin(5\pi x)\sin(5\pi y)e^{-100(x-.5)^2}$ et $p(x,y) = \cos(\pi x)\cos(\pi y)e^{-1000(y-.5)^2}$. (A) Meilleures approximations non linéaires obtenues en retenant les N plus grands coefficients d’ondelettes normalisés pour la vitesse et la pression. (B) Algorithme adaptatif. (4) et (5): erreurs d’approximation obtenues dans le cas de la discrétisation uniforme du problème de Stokes à l’échelle $J = 8$.

Appendice 1: preuves des théorèmes 1.1 et 1.2 (approximation linéaire et interpolation)

Preuve du théorème 1.1. On reprend la preuve proposée dans [26] théorème 28.2. Il nous faut comparer la K-fonctionnelle $K(f, 2^{-mj})$ à l'erreur de meilleure approximation $\text{dist}_X(f, V_j)$. Dans un sens, il suffit d'utiliser l'hypothèse d'estimation directe (1.44) et la définition de la K-fonctionnelle (1.36): pour tout $f \in X$, on a

$$\begin{aligned} \text{dist}_X(f, V_j) &\leq \inf_{g_j \in V_j, g \in Y} (\|f - g\|_X + \|g - g_j\|_X) \\ &\lesssim \inf_{g \in Y} (\|f - g\|_X + 2^{-jm} \|g\|_Y) \\ &\lesssim K(f, 2^{-mj}). \end{aligned}$$

Comme par ailleurs $\|f\|_X \lesssim K(f, 1)$, on conclut que pour tout $s \in]0, m[$, $s = \theta m$

$$\|f\|_{\mathcal{A}_q^s(X)} := \|f\|_X + \left(\sum_{j \geq 0} |2^{js} \text{dist}_X(f, V_j)|^q \right)^{1/q} \lesssim \|f\|_{[X, Y]_{\theta, q}}. \quad (3.63)$$

Dans l'autre sens, on considère $f_j \in V_j$ tel que

$$\|f - f_j\|_X \leq 2 \text{dist}_X(f, V_j),$$

et l'on utilise essentiellement l'estimation inverse (1.45).

$$\begin{aligned} K(f, 2^{-mj}) &\leq \|f - f_j\|_X + 2^{-jm} \|f_j\|_Y \\ &\leq \|f - f_j\|_X + 2^{-jm} [\|f_0\|_Y + \|f_1 - f_0\|_Y + \dots + \|f_j - f_{j-1}\|_Y] \\ &\lesssim \|f - f_j\|_X + 2^{-jm} [\|f_0\|_X + \sum_{l=0}^{j-1} 2^{ml} \|f_l - f_{l-1}\|_X] \\ &\lesssim 2^{-mj} \|f\|_X + 2^{-mj} [\sum_{l=0}^j 2^{ml} \text{dist}_X(f, V_l)]. \end{aligned} \quad (3.64)$$

A ce stade, il faut avoir recours ici à une inégalité de Hardy discrète (voir [26] pour une démonstration). Soient $(a_j)_{j \geq 0}$ une suite de termes positifs et $b_j := 2^{-mj} \sum_{l=0}^j 2^{ml} a_l$, alors pour tout $0 < s < m$

$$\|(2^{js} b_j)_{j \geq 0}\|_{l^q} \lesssim \|(2^{js} a_j)_{j \geq 0}\|_{l^q}.$$

Cette inégalité appliquée à $a_j = \text{dist}_X(f, V_j)$ permet d'estimer la norme l^q pondérée du second terme de l'estimation (3.64) et de conclure que

$$\|f\|_{[X, Y]_{\theta, q}} \lesssim \|f\|_{\mathcal{A}_q^s(X)}.$$

□

Preuve du théorème 1.2. On reprend la preuve proposée dans [26] théorème 28.3. Les projecteurs P_j étant uniformément bornés, on a

$$\|f - P_j f\|_X \sim \text{dist}_X(f, V_j).$$

Comme d'autre part $\|P_0 f\|_X \leq \|f\|_X \leq \|P_0 f\|_X + \|f - P_0 f\|_X$, on conclut que les normes $\mathcal{A}_q^s(X)$ et (1.47) sont équivalentes.

En ce qui concerne (1.48), dans un sens

$$\|Q_j f\|_X \leq \|f - P_{j+1} f\|_X + \|f - P_j f\|_X,$$

et donc (1.48) est contrôlée par (1.47). Dans l'autre sens, on remarque que

$$\|f - P_j f\|_X \leq \sum_{l \geq j} \|Q_l f\|_X$$

et on va conclure en utilisant une deuxième inégalité de Hardy discrète: soient une suite positive $(a_j)_{j \geq 0}$ et $b_j := \sum_{l \geq j} a_l$, alors pour tout $s > 0$ et $q \leq 1$.

$$\|(2^{js} b_j)_{j \geq 0}\|_{l^q} \lesssim \|(2^{js} a_j)_{j \geq 0}\|_{l^q}.$$

En appliquant cette inégalité à la suite $a_j = \|Q_j f\|_X$ on obtient que (1.47) est contrôlée par (1.48).

Appendice 2: inégalités inverses et directes et stabilité sur la droite réelle

Selon les notations du §1.2, soit un couple de fonctions d'échelle biorthogonales $(\phi, \tilde{\phi})$ à supports compacts et satisfaisant les conditions de Strang et Fix aux ordres n et \tilde{n} . On note $\tau(p), \tilde{\tau}(p)$ leurs régularités Sobolev et l'on supposera toujours que $\tau = \tau(2) > 0$, $\tilde{\tau} = \tilde{\tau}(2) > 0$. Afin d'appliquer les théorèmes du § 1.1.7, il nous faut établir les résultats de stabilité du projecteur P_j et les inégalités directes et inverses. Ces résultats sont classiques (voir par exemple le § III de [26]) mais les démonstrations ont valeur d'exemple au sens où elles servent de modèle de base dans les cas de figure plus complexes abordés dans cette thèse. Nous les rappelons donc à l'exclusion des plus techniques dans le cas $p < 1$.

Lemme 3.5 *Soit $p \in [1, \infty]$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Si $\phi \in L^p$ et $\tilde{\phi} \in L^{p'}$ alors*

$$\left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_{j,k} \phi_{j,k} \right\|_{L^p} \sim 2^{(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})j} \|F_j\|_{l^p} \quad (3.65)$$

et les projecteurs P_j (resp. \tilde{P}_j) sont uniformément stables dans L^p (resp. $L^{p'}$).

Preuve. La stabilité dans L^p de Φ_j (3.65) est une conséquence simple de la biorthogonalité et des supports compacts des générateurs ϕ et $\tilde{\phi}$. Sur chaque intervalle $I_{j,l} = 2^{-j}(l + [0, 1]), l \in \mathbb{Z}$ on a l'estimation

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_{j,k} \phi_{j,k} \right\|_{L^p(I_{j,l})} &\leq 2^{(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})j} \|\phi\|_{L^p} \|(f_{j,k})_{l-k \in \text{Supp } \phi}\|_{l^\infty} \\ &\lesssim 2^{(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})j} \|(f_{j,k})_{l-k \in \text{Supp } \phi}\|_{l^p} \end{aligned} \quad (3.66)$$

où on a utilisé l'équivalence de toute norme en dimension finie. En élevant à la puissance p et en sommant sur l (ou en prenant directement la borne supérieure pour $p = \infty$), on obtient l'inégalité de droite de (3.65).

Par l'inégalité de Hölder on à l'estimation

$$|\langle f, \tilde{\phi}_{j,k} \rangle| \leq 2^{(\frac{1}{2} - \frac{1}{p'})j} \|\tilde{\phi}\|_{L^{p'}} \|f\|_{L^p(\text{Supp } \tilde{\phi}_{j,k})} \quad (3.67)$$

d'où l'on déduit de même

$$\|\langle f, \tilde{\Phi}_j \rangle\|_{l^p} \lesssim 2^{(\frac{1}{2} - \frac{1}{p'})j} \|f\|_{L^p}. \quad (3.68)$$

En appliquant (3.68) à $f = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_{j,k} \phi_{j,k}$ et en remarquant que par biorthogonalité $f_{j,k} = \langle f, \tilde{\phi}_{j,k} \rangle$ on obtient l'inégalité de gauche de (3.65).

La stabilité uniforme des projecteurs P_j dans L^p s'obtient en combinant les estimations (3.67) et (3.66). Le résultat pour les projecteurs adjoints s'en déduit aussitôt. On obtient en fait un résultat plus fort de stabilité locale dans L^p

$$\|P_j f\|_{L^p(I_{j,k})} \lesssim \|f\|_{L^p(\tilde{I}_{j,k})} \text{ où } \tilde{I}_{j,k} := \cup_{l: I_{j,k} \cap \text{Supp } \phi_{j,l} \neq \emptyset} \text{Supp } \tilde{\phi}_{j,l}.$$

□

Remarque 3.17 *La stabilité dans L^p , $p \in]0, \infty]$ (3.66) de la base Φ_j reste vérifiée sous la seule hypothèse $\phi \in L^p$. Elle découle alors d'un simple argument de locale linéaire indépendance des fonctions d'échelle démontré dans [76] (voir par exemple [26] ou l'Appendice 4 où cet argument est développé).*

Proposition 3.16 *Soit $p \in [1, \infty]$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Sous les hypothèses $\phi \in L^p$ et $\tilde{\phi} \in L^{p'}$, on a les estimations directes*

$$\|f - P_j f\|_{L^p} \lesssim 2^{-js} \|f\|_{W^{s,p}}, \text{ pour tout } 0 \leq s \leq n \text{ et } f \in W^{s,p}. \quad (3.69)$$

Preuve. On considère tout d'abord $s = m$ entier. Soit $f \in W^{m,p}$, on pose $\bar{f}(x) = f(2^{-j}x)$. Sur chaque intervalle $I_{j,k}$, on va estimer l'erreur locale de projection

$$\|f - P_j f\|_{L^p(I_{j,k})} = 2^{-j/p} \|\bar{f} - P_0 \bar{f}\|_{L^p(I_{0,k})}$$

en utilisant la reproduction des polynôme $P_0 \pi = \pi$ pour tout $\pi \in \mathbb{P}_{n-1}$, la stabilité locale des projecteurs P_j et le théorème de Deny-Lions (voir [24]).

$$\begin{aligned} \|f - P_j f\|_{L^p(I_{j,k})} &\leq 2^{j/p} \inf_{\pi \in \mathbb{P}_{n-1}} \left(\|\bar{f} - \pi\|_{L^p(I_{0,k})} + \|P_0(\bar{f} - \pi)\|_{L^p(I_{0,k})} \right) \\ &\lesssim 2^{j/p} \inf_{\pi \in \mathbb{P}_{n-1}} \|\bar{f} - \pi\|_{L^p(\tilde{I}_{0,k})} \\ &\lesssim 2^{j/p} |\bar{f}|_{W^{m,p}(\tilde{I}_{0,k})} \\ &\lesssim 2^{-jm} |f|_{W^{m,p}(\tilde{I}_{j,k})}. \end{aligned}$$

En élevant à la puissance p et en sommant sur k on obtient l'estimation (3.69) pour $0 \leq s = m \leq n$ entier.

Une preuve alternative repose sur l'estimation des coefficients d'ondelettes (1.68)

$$\begin{aligned} \|Q_l f\|_{L^p} &\sim 2^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})l} \|\langle f, \tilde{\Psi}_j \rangle\|_{l^p} \\ &\lesssim 2^{-ml} \|(\|f\|_{W^{m,p}(\text{Supp } \tilde{\psi}_{l,k})})_{k \in \mathbb{Z}}\|_{l^p} \\ &\lesssim 2^{-ml} \|f\|_{W^{m,p}} \end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned} \|f - P_j f\|_{L^p} &\lesssim \sum_{l \geq j} \|Q_l f\|_{L^p} \\ &\lesssim 2^{-mj} \|f\|_{W^{m,p}}. \end{aligned}$$

Pour $0 \leq m < s < m+1 \leq n$, il suffit d'invoquer $[W^{m,p}, W^{m+1,p}]_{s-m,p} = B_{p,p}^s$ et d'appliquer la propriété de foncteur (1.37) de l'interpolation. \square

Proposition 3.17 *Soit $p \in [1, \infty]$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Sous l'hypothèse $\tau(p) > 0$, on a l'estimation inverse*

$$\|f_j\|_{W^{s,p}} \lesssim 2^{js} \|f_j\|_{L^p}, \text{ pour tout } 0 \leq s < \tau(p) \text{ et } f_j \in V_j(\mathbb{R}). \quad (3.70)$$

Preuve. Pour $0 \leq s = m < \tau(p)$ entier, il suffit d'estimer la semi norme $\|\partial_m f_j\|_{L^p}$. En écrivant $f_j = \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_{j,k} \phi_{j,k}$, on obtient comme dans la preuve du lemme 3.5

$$\begin{aligned} \|\partial_m f_j\|_{L^p(I_{j,l})} &\leq 2^{mj} 2^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})j} \|\partial_m \phi\|_{L^p} \|(f_{j,k})_{l-k \in \text{Supp } \phi}\|_{l^\infty} \\ &\lesssim 2^{mj} 2^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})j} \|(f_{j,k})_{l-k \in \text{Supp } \phi}\|_{l^p}. \end{aligned}$$

L'estimation (3.70) se déduit alors de la stabilité dans L^p de Φ_j du lemme 3.5 (si $\tilde{\phi} \in L^{p'}$ et de la remarque 3.17 sinon).

Pour les valeurs non entières de s l'idée est la même avec des difficultés techniques. Noter que l'on ne peut pas simplement invoquer ici un argument d'interpolation dans la mesure où la borne $\tau(p)$ n'est pas a priori entière et de plus ouverte. Sur chaque intervalle $I_{j,l}$, on va estimer la semi norme $|f_j|_{W^{s,p}(I_{j,l})}$ qui, par changement de variable, s'écrit aussi

$$|f_j|_{W^{s,p}(I_{j,l})} = 2^{sj} 2^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})j} \left| \sum_{k \in \mathbb{Z}} f_{j,k} \phi_{0,k} \right|_{W^{s,p}(I_{0,l})}.$$

On invoque ensuite l'indépendance linéaire locale des fonctions d'échelle $\phi_{0,k}$ démontrée dans [76], afin d'exploiter l'équivalence de toute norme en dimension finie. Ainsi

$$|f_j|_{W^{s,p}(I_{j,l})} \lesssim 2^{sj} 2^{(\frac{1}{2}-\frac{1}{p})j} \|(f_{j,k})_{l-k \in \text{Supp } \phi}\|_{l^p}.$$

On conclut par l'estimation $\|(\|f\|_{W^{s,p}(I_{j,k})})_{k \in \mathbb{Z}}\|_{l^p} \lesssim \|f\|_{W^{s,p}}$ (qui se déduit soit de la définition de la semi norme $W^{s,p}$ comme intégrale double, soit d'un argument raffiné sur le module de continuité de la semi norme Besov $B_{p,p}^s$) et le lemme 3.5. \square

Par application du Corollaire 1.1, du Théorème 1.3 et des propositions 3.16, 3.17 on peut donc énoncer le théorème de caractérisation suivant.

Théorème 3.2 *Soit $p \in [1, \infty]$ et $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. On suppose que $\tau(p) > 0$ et $\tilde{\tau}(p') > 0$, alors la décomposition primale vérifie les équivalences de normes*

$$\begin{aligned} \|f\|_{B_{p,q}^s} &\sim \|P_0 f\|_{L^p} + \|(2^{sj} \|Q_j f\|_{L^p})_{j \in \mathbb{N}}\|_{l^q} \\ &\sim \left\| \left(2^{sj} 2^{(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})j} \langle f, \tilde{\Psi}_j \rangle \right)_{j \geq -1} \right\|_{l^q(L^p)}, \end{aligned} \quad (3.71)$$

pour tout $-\min(\tilde{\tau}(p'), \tilde{n}) < s < \min(\tau(p), n)$, $q \in [1, \infty]$ et symétriquement pour la décomposition duale.

Remarque 3.18 *Du théorème précédent et de l'inégalité (3.63) issue de la preuve de ce théorème présentée en Appendice 1, on déduit facilement les propriétés de stabilité des projecteurs et les estimations directes et inverses en normes $B_{p,q}^s$. Pour tout $-\min(\tilde{\tau}(p'), \tilde{n}) < s \leq t < \min(\tau(p), n)$ on a*

$$\|f_j\|_{B_{p,q}^t} \lesssim 2^{(t-s)j} \|f_j\|_{B_{p,q}^s}, \quad \forall f_j \in V_j(\mathbb{R}).$$

Pour tout s tel que $-\min(\tilde{\tau}(p'), \tilde{n}) < s < \min(\tau(p), n)$ et t tel que $s \leq t < n$ on a

$$\|f - P_j f\|_{B_{p,q}^s} \lesssim 2^{-(t-s)j} \|f\|_{B_{p,q}^t}, \quad \forall f \in B_{p,q}^t.$$

La preuve des estimations directes et inverses pour $p < 1$ est plus technique et on se contente d'énoncer les résultats en renvoyant par exemple au § III de [26] pour leur démonstration.

Proposition 3.18 *Soit $p \in]0, 1[$ et $r \in [1, \infty]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ tel que $\phi \in L^r$ et $\tilde{\phi} \in L^{r'}$. On suppose d'une part que $s > \frac{1}{p} - \frac{1}{r}$ de telle façon que $B_{p,p}^s$ s'injecte dans L^r et d'autre part que $s < n$, alors on a les estimations directes*

$$\|f - P_j f\|_{L^p} \lesssim 2^{-js} \|f\|_{B_{p,p}^s}.$$

Proposition 3.19 *Soit $p \in]0, 1[$, $q \in]0, \infty]$ et $r \in [1, \infty]$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ tel que $\phi \in L^r$ et $\tilde{\phi} \in L^{r'}$. Si $\phi \in B_{p,q}^s$ alors*

$$\|f_j\|_{B_{p,q}^s} \lesssim 2^{js} \|f_j\|_{L^p} \text{ pour tout } f_j \in V_j(\mathbb{R}).$$

Par application directe du Théorème 1.4 et des propositions 3.18, 3.19 on a donc le théorème suivant.

Théorème 3.3 *Soit $p \in]0, 1[$, $q \in]0, \infty]$ et $r \in [1, \infty]$, $\frac{1}{r} + \frac{1}{r'} = 1$ tel que $\phi \in L^r$ et $\tilde{\phi} \in L^{r'}$. Pour tout $\frac{1}{p} - \frac{1}{r} < s < \min(t, n)$ où t est tel que $\phi \in B_{p, q_0}^t$ pour un $q_0 \in]0, \infty]$, alors la décomposition primale vérifie les équivalences de normes*

$$\begin{aligned} \|f\|_{B_{p, q}^s} &\sim \|P_0 f\|_{L^p} + \|(2^{sj} \|Q_j f\|_{L^p})_{j \in \mathbb{N}}\|_{l^q} \\ &\sim \left\| \left(2^{sj} 2^{(\frac{1}{2} - \frac{1}{p})j} \langle f, \tilde{\Psi}_j \rangle \right)_{j \geq -1} \right\|_{l^q(l^p)}. \end{aligned} \quad (3.72)$$

Appendice 3: compression de l'opérateur laplacien en base d'ondelettes

La compression des opérateurs en base d'ondelettes est un des arguments essentiels à l'utilisation des ondelettes en analyse numérique. Ces techniques s'appliquent au large cadre des opérateurs dont le noyau intégral possède certaines propriétés de régularité et de décroissance hors de la diagonale, ce qui exclut cependant le cas des noyaux oscillants de type Helmholtz (cf [81], [13], [95]).

Ces propriétés de compression sont en particulier déterminantes dans le cas des opérateurs intégraux où l'opérateur admet une représentation pleine en base nodale. Dans ce cas, les seules méthodes alternatives de compression sont les méthodes multipôles introduites par V. Rokhlin [35].

À l'inverse, en ce qui concerne les opérateurs différentiels, l'opérateur admet une représentation plus creuse en base nodale qu'en base d'ondelettes. Néanmoins, la compression des opérateurs différentiels dans la base d'ondelettes est une propriété essentielle dans le cadre des méthodes adaptatives où seule la base d'ondelettes intervient dans les calculs (cf [28] et §2.2.2).

Ces techniques de compression introduites dans [13], ont fait l'objet de nombreux travaux. En particulier, elles sont étudiées dans le cadre général des opérateurs pseudo différentiels dans [46] et [89] et dans [88] pour des applications à la résolution d'équations intégrales.

Soit \mathcal{A} un opérateur dont le noyau intégral comporte les propriétés ad-hoc de décroissance. Le principe de compression de sa représentation de Galerkin

$$A := \langle \mathcal{A}\Psi, \Psi \rangle \text{ de termes } A_{\lambda, \lambda'} := \langle \mathcal{A}\psi_\lambda, \psi_{\lambda'} \rangle$$

dans une base d'ondelettes

$$\Psi = \{\psi_\lambda\}_{\lambda \in \nabla}$$

comporte (1) une compression en espace selon la distance qui sépare les centres des supports des ondelettes ψ_λ et $\psi_{\lambda'}$ et (2) une compression selon l'écart d'échelle $||\lambda| - |\lambda'|$.

On se contente ici de présenter un exemple élémentaire de compression en base d'ondelettes de l'opérateur laplacien $\mathcal{A} = -\Delta$ sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ avec conditions aux limites de Dirichlet homogènes. Dans ce cas, en supposant les ondelettes à supports compacts (de diamètres $\sim 2^{-|\lambda|}$), la compression en espace est triviale puisqu'elle se réduit à ne pas tenir compte des coefficients nuls lorsque les supports des ondelettes ne s'intersectent pas. La compression en échelle s'analyse par l'intermédiaire du lemme de Schur 3.1 dans le même esprit qu'au §3.3.

On fait l'hypothèse de régularité Holdérienne C^τ , $\tau > 1$ des ondelettes et l'on suppose leurs \tilde{n} premiers moments nuls i.e.

$$\int_{\Omega} x^k \psi_\lambda(x) dx = 0, \forall k = 0, \dots, \tilde{n} - 1, \forall \lambda \in \nabla^+.$$

La base d'ondelettes Ψ est d'autre part supposée stable dans $H_0^1(\Omega)$. On note D la matrice diagonale $D_{\lambda, \lambda'} := 2^{|\lambda|} \delta_\lambda^{\lambda'}$ et

$$B = D^{-1} A D^{-1}$$

la matrice renormalisée en base d'ondelettes de l'opérateur laplacien. D'après les hypothèses de régularité et de moments nuls des ondelettes, on obtient par des arguments classiques de type Bramble Hilbert, l'estimation

$$|B_{\lambda, \lambda'}| \lesssim 2^{-\alpha_a ||\lambda| - |\lambda'|} \chi_{\text{Supp } \psi_\lambda \cap \text{Supp } \psi_{\lambda'}}, \quad (3.73)$$

où $\alpha_a = \min(\tau - 1, \tilde{n} + 1) + d/2$ et d désigne la dimension de l'espace.

On va donc simplement comprimer la matrice B en négligeant les coefficients pour lesquels $||\lambda| - |\lambda'| > L$ où $L \geq 0$ est un paramètre entier de compression. Soit

$$B^L := (B_{\lambda, \lambda'}^L)_{\lambda, \lambda' \in \nabla} \text{ où } \begin{cases} B_{\lambda, \lambda'}^L = B_{\lambda, \lambda'} \text{ si } ||\lambda| - |\lambda'| \leq L, \\ B_{\lambda, \lambda'}^L = 0 \text{ si } ||\lambda| - |\lambda'| > L, \end{cases}$$

et $A^L = D B^L D$. On note \mathcal{A}^L l'opérateur associé à cette représentation dans la base Ψ i.e. formellement

$$\mathcal{A}^L = \sum_{\lambda \in \nabla} \left(\sum_{\lambda' \in \nabla} A_{\lambda, \lambda'}^L \langle \cdot, \tilde{\psi}_{\lambda'} \rangle \right) \tilde{\psi}_\lambda.$$

D'après les équivalences de norme H_0^1 en base d'ondelettes Ψ et H^{-1} en base $\tilde{\Psi}$, on a

$$\|\mathcal{A} - \mathcal{A}^L\|_{\mathcal{L}(H_0^1 \rightarrow H^{-1})} \sim \|B - B^L\|$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme matricielle l^2 . La norme $\|B - B^L\|$ va s'estimer classiquement en appliquant le lemme de Schur 3.1 à la matrice $B - B^L$ pour les poids $\gamma(\lambda) = 2^{-|\lambda|c}$ où la constante c est choisie de façon à obtenir la meilleure estimation.

On distingue alors les deux cas de figure suivants.

- Si les ondelettes ψ_λ sont C^∞ par morceaux, on peut améliorer l'estimation (3.73) dans le cas où l'ondelette ψ_λ telle que $|\lambda| > |\lambda'|$ n'intersecte pas le support singulier de $\psi_{\lambda'}$. On a alors

$$|B_{\lambda,\lambda'}| \lesssim 2^{-(\tilde{n}+1)\|\lambda|-|\lambda'|} \chi_{\text{Supp } \psi_\lambda \cap \text{Supp } \psi_{\lambda'}}.$$

Dans ce cadre, le choix optimal du paramètre c est $(d-1)/2$ (en toute rigueur si du moins $\tilde{n} \geq \alpha_a$ ce qui est toujours vérifié en pratique).

- Dans le cas contraire (si le support singulier des ondelettes est dense comme c'est le cas des ondelettes splines duales $\check{\psi}^{\tilde{n},\tilde{n}}$), le choix optimal est $c = d/2$.

In fine, on obtient par le lemme de Schur l'estimation

$$\|\mathcal{A} - \mathcal{A}^L\|_{\mathcal{L}(H_0^1 \rightarrow H^{-1})} \lesssim 2^{-\beta L}$$

où dans le premier cas $\beta = \alpha_a - (d-1)/2$ et dans le second $\beta = \alpha_a - d/2$.

Remarque 3.19 *On vérifie facilement que la matrice A^L a 2^{Ld} termes non nuls par ligne et par colonne.*

Appendice 4: estimations directes et inverses sur le bord du carré du §2.3.2

Cet appendice contient certaines démonstrations des estimations directes et inverses relatives à la construction de l'opérateur de relèvement sur le domaine $\Omega =]0, 1[^2$ présentée au paragraphe 2.3.2.

Ces démonstrations utilisent de façon fondamentale le théorème de relèvement des traces sur des domaines polygonaux à coins démontré pour les espaces de Sobolev H^s dans [60] et pour les espaces $W^{s,p}$ dans [61] (voir aussi [4]). On notera Γ le bord de Ω , $\partial/\partial\nu_e$ la dérivée normale sortante au côté e du domaine Ω et $[x]$ la partie entière du réel x .

Théorème 3.4 *Pour $p \in]1, +\infty[$ et $s > 0$, on pose $m = \sup\{[s - 1/p], 0\}$ et on considère l'espace $W_{p,p}^{s+1/p}(\Omega)$ dont on cherche à caractériser toutes les traces sur Γ . Soit donc un $4(m+1)$ -uplet*

$$\{g_i^e\}_{i=0,\dots,m,e \in \mathcal{E}} \in \prod_{e \in \mathcal{E}} \prod_{i=0}^m W^{s-i,p}(e).$$

On suppose $s - 1/p$ non entier. Alors, si le $4(m + 1)$ -uplet vérifie les conditions de compatibilité (aucune si $s - 1/p < 0$)

$$\frac{d^{i'}}{dx^{i'}} g_i^e(c) = \frac{d^i}{dx^i} g_{i'}^{e'}(c), \quad i + i' \leq [s - 1/p], \quad (3.74)$$

pour tout triplet $(e, e', c) \in \mathcal{E} \times \mathcal{E} \times \mathcal{C}$ tel que $e \cap e' = c$, il existe un relèvement $u \in W^{s+1/p, p}(\Omega)$ tel que

$$\begin{cases} \gamma^e(\frac{\partial^i u}{\partial \nu_e^i}) = g_i^e, \quad \forall 0 \leq i \leq m, \quad e \in \mathcal{E}, \\ \|u\|_{W^{s+1/p, p}(\Omega)} \sim \sum_{e \in \mathcal{E}} \sum_{i=0}^m \|g_i^e\|_{W^{s-i, p}(e)}. \end{cases}$$

En particulier $g_0 = \Pi_{e \in \mathcal{E}} g_0^e$ est dans $W^{s, p}(\Gamma)$ et

$$\sum_{e \in \mathcal{E}} \|g_0^e\|_{W^{s, p}(e)} \lesssim \|g_0\|_{W^{s, p}(\Gamma)} \lesssim \sum_{e \in \mathcal{E}} \sum_{i=0}^m \|g_i^e\|_{W^{s-i, p}(e)}.$$

La norme $\|g_0\|_{W^{s, p}(\Gamma)}$ définie comme norme quotient (2.35) est donc équivalente à la borne inférieure de $\sum_{e \in \mathcal{E}} \sum_{i=0}^m \|g_i^e\|_{W^{s-i, p}(e)}$ prise sur tous les $4m$ -uplet $\{g_i^e\}_{i=1, \dots, m, e \in \mathcal{E}} \in \Pi_{e \in \mathcal{E}} \Pi_{i=1}^m W^{s-i, p}(e)$ tels que le $4(m + 1)$ -uplet $\{g_i^e\}_{i=0, \dots, m, e \in \mathcal{E}}$ satisfait les conditions de compatibilité (3.74).

Lemme 3.6 Soit $p \in]1, +\infty[$, l'AMR trace sur Γ de $V_j(\Omega)$ est dans $W^{s, p}(\Gamma)$ pour tout $s < \tau(p)$ (et non pas seulement pour $s < \tau(p) - 1/p$ comme il résulte directement de la définition comme trace).

Preuve. On applique le théorème précédent. Pour $s < \min(\tau(p), \frac{1}{p})$, il n'y a pas de condition de compatibilité à vérifier et le résultat est donc immédiat. Pour $\frac{1}{p} < s < \tau(p)$ et $s - \frac{1}{p}$ non entier, il suffit de vérifier que pour tout $u_j \in V_j(\Omega)$, le $4(m + 1)$ -uplet

$$\{g_i^e\}_{i=0, \dots, m, e \in \mathcal{E}} = \left\{ \gamma^e \left(\frac{\partial^i u_j}{\partial \nu_e^i} \right) \right\}_{i=0, \dots, m, e \in \mathcal{E}}$$

où $m = [s - 1/p]$, vérifie les conditions de compatibilité du théorème. On le voit facilement en utilisant les propriétés suivantes des fonctions d'échelle sur l'intervalle $[0, 1]$ (cf §1.3.2).

Soit $s < \tau(p)$ et n l'ordre d'approximation du générateur ϕ , les propriétés des fonctions d'échelle sur la droite réelle garantissent que $n - 1 \geq m$ (voir [26], §II, et [50]) de sorte que l'on peut toujours supposer avec les notations du §1.3

$$\begin{cases} \frac{d^\alpha \varphi_{i, k}^{\delta_0, (0)}}{dx^\alpha}(0) = 2^{j/2} 2^{\alpha j} \delta_\alpha^k, \quad \forall \alpha = 0, \dots, m \text{ et } k = 0, \dots, n - 1, \\ \frac{d^\alpha \varphi_{j, k}^{\delta_1, (1)}}{dx^\alpha}(1) = 2^{j/2} 2^{\alpha j} \delta_\alpha^k, \quad \forall \alpha = 0, \dots, m \text{ et } k = 0, \dots, n - 1, \\ \frac{d^\alpha \varphi_{j, k}}{dx^\alpha}(0) = \frac{d^\alpha \varphi_{j, k}}{dx^\alpha}(1) = 0, \quad \forall \alpha = 0, \dots, m, \text{ et } k \in \Delta_j^{int}. \end{cases} \quad (3.75)$$

Pour $s - 1/p$ entier, on conclut en remarquant qu'il existe un réel s' tel que $s < s' < \tau(p)$ et $s' - 1/p$ est non entier. \square

Lemme 3.7 *Soit $0 < p \leq \infty$ tel que $\phi \in L^p(\mathbb{R})$. Pour tout $f_j = \sum_{c \in \mathcal{C}} \tilde{g}_{j,c} \varphi_{j,c} + \sum_{e \in \mathcal{E}} \sum_{k=1}^{d_j-1} \tilde{g}_{j,k}^e \varphi_{j,k}^e \in V_j(\Gamma)$, on a l'équivalence de norme*

$$\|f_j\|_{L^p(\Gamma)} \sim 2^{j/2-j/p} \left(\sum_{c \in \mathcal{C}} |\tilde{g}_{j,c}|^p + \sum_{e \in \mathcal{E}} \sum_{k=1}^{d_j-1} |\tilde{g}_{j,k}^e|^p \right)^{1/p}. \quad (3.76)$$

Preuve. Pour $p \in [1, \infty]$ et $\tilde{\phi} \in L^{p'}(\mathbb{R})$ la preuve utilise classiquement la biorthogonalité des bases $\Phi_{j,\Gamma}$ et $\tilde{\Phi}_{j,\Gamma}$ de supports de diamètre $\sim 2^{-j}$. Pour les autres valeurs de p il faut utiliser la propriété plus forte d'indépendance linéaire sur les intervalles $[k, k+1]$ des translatées entières de la fonction d'échelle ϕ (voir [76]). On en déduit par construction (voir §1.3.2) la même propriété pour les fonctions d'échelle sur l'intervalle $[0, 1]$ sur les segments dyadiques $2^{-j}[k, k+1]$, $k = 0, \dots, 2^j - 1$. Il en résulte la même propriété pour les fonctions de base de $\Phi_{j,\Gamma}$ sur le découpage dyadique du bord Γ . Cette propriété étant établie la preuve de la $L^p(\Gamma)$ stabilité est classique. En notant $\{K_{j,l}^e, e \in \mathcal{E}, l = 0, \dots, 2^j - 1\}$ le découpage dyadique de Γ on a

$$\int_{\Gamma} |f_j(x)|^p dx = \sum_{e \in \mathcal{E}} \sum_{l=0}^{2^j-1} \int_{K_{j,l}^e} |f_j(x)|^p dx.$$

Il suffit alors d'utiliser l'équivalence de toutes les quasi normes en dimension finie (indépendante de j) pour conclure que

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} |f_j(x)|^p dx &\sim 2^{\frac{j}{2} - \frac{j}{p}} \sum_{e \in \mathcal{E}} \sum_{l=0}^{2^j-1} \left(\sum_{k, e' \in \mathcal{E}: \text{Supp } \varphi_{j,k}^{e'} \cap K_{j,l}^e \neq \emptyset} |\tilde{g}_{j,k}^{e'}|^p + \sum_{c \in \mathcal{C}: \text{Supp } \varphi_{j,c} \cap K_{j,l}^e \neq \emptyset} |\tilde{g}_{j,c}|^p \right) \\ &\sim 2^{\frac{j}{2} - \frac{j}{p}} \left(\sum_{c \in \mathcal{C}} |\tilde{g}_{j,c}|^p + \sum_{e \in \mathcal{E}} \sum_{k=1}^{d_j-1} |\tilde{g}_{j,k}^e|^p \right)^{1/p}. \end{aligned}$$

\square

Lemme 3.8 *Soit $1 \leq p \leq \infty$ tel que $\phi \in L^p(\mathbb{R})$ et $\tilde{\phi} \in L^{p'}(\mathbb{R})$. Le projecteur $P_{j,\Gamma}$ est stable dans $L^p(\Gamma)$.*

Preuve. La preuve est en tout point identique à celle de la proposition 3.5 sur la droite réelle. \square

Lemme 3.9 Soit $1 < p < \infty$. Pour tout $g_j \in V_j(\Gamma)$ et $0 \leq s < \tau(p)$, on a les estimations inverses

$$\|g_j\|_{W^{s,p}(\Gamma)} \lesssim 2^{js} \|g_j\|_{L^p(\Gamma)}. \quad (3.77)$$

Preuve. Pour $s = 0$ il n'y a rien à prouver. Pour $0 < s < \min(\tau(p), 1/p)$, par le théorème de relèvement 3.4, il suffit d'écrire l'équivalence de norme

$$\|g_j\|_{W^{s,p}(\Gamma)} \sim \sum_{e \in \mathcal{E}} \|g_0^e\|_{W^{s,p}(e)}$$

où g_0^e désigne la restriction de g_j au coté e . L'estimation inverse sur $V_j(\Gamma)$ est alors déduite des estimations sur $V_j(e)$.

Pour $\tau(p) > s \geq 1/p$ et $s - 1/p$ non entier, on pose $[s - 1/p] = m$ et on cherche à construire un $4(m+1)$ -uplet $(g_i^e)_{i=0, \dots, m, e \in \mathcal{E}}$ tel que $g_0^e = g_j|_e$ et vérifiant les conditions de compatibilité du théorème 3.4. Considérons par exemple le sommet O associé aux cotés OA et OB (avec les notations du §2.3.2). Pour $i = 1, \dots, m$ on pose (si $m > 0$)

$$g_i^{OA} = 2^{ij} (g_j, \tilde{\varphi}_{j,i}^{OB}) \varphi_{j,0}^{OA} + 2^{ij} (g_j, \tilde{\varphi}_{j,i}^{AC}) \varphi_{j,d_j}^{OA},$$

et symétriquement pour g_i^{OB} , de sorte que, compte tenu des hypothèses (3.75) sur les fonctions d'échelle primales sur l'intervalle $[0, 1]$, les conditions de compatibilité (3.74) sont satisfaites. On conclut alors en utilisant la majoration

$$\|g_j\|_{W^{s,p}(\Gamma)} \lesssim \sum_{e \in \mathcal{E}} \sum_{i=0}^m \|g_i^e\|_{W^{s-i,p}(e)}$$

du théorème 3.4, les estimations inverses sur les espaces $V_j(e)$ et le lemme 3.7 de stabilité L^p .

Enfin pour $\tau(p) > s \geq 1/p$ et $s - 1/p$ entier, le résultat se déduit de ce qui précède par interpolation. Puisque par hypothèse p diffère de 1 et ∞ , s est non entier, de sorte que l'espace $W^{s,p}$ coïncide avec l'espace de Besov $B_{p,p}^s$ et aussi avec l'espace d'interpolation $[L^p, W^{t,p}]_{s/t,p}$ pour $t > s$. On a donc

$$\|g_j\|_{W^{s,p}(\Gamma)} \lesssim \|g_j\|_{L^p(\Gamma)}^{1-s/t} \|g_j\|_{W^{t,p}(\Gamma)}^{s/t}.$$

En choisissant t tel que $s < t < \tau(p)$ et $t - 1/p$ non entier, on en déduit le résultat du cas précédent. \square

On prouve maintenant les estimations directes pour le projecteur $P_{j,\Gamma}$ (2.55) de la première construction du §2.3.2.

Proposition 3.20 *Soit $p \in]1, \infty[$ tel que $\tilde{\phi} \in L^{p'}$. Alors pour tout $1/p < s \leq n$ on a l'estimation*

$$\|g - P_{j,\Gamma}g\|_{L^p(\Gamma)} \lesssim 2^{-js} \|g\|_{W^{s,p}(\Gamma)}.$$

Preuve. Pour chaque coté e , on considère le projecteur $P_{j,e}^*$ sur $V_j(e)$ tel que $P_{j,e}^*f = (P_{j,0,1}^*[f \circ \kappa_e] \circ \kappa_e^{-1})$ où $P_{j,0,1}^*$ est défini en (2.53). On a classiquement pour $P_{j,e}^*$ les estimations directes (voir par exemple [26] §III), pour tout $1/p < s \leq n$ et $g^e \in W^{s,p}(e)$

$$\|g^e - P_{j,e}^*g^e\|_{L^p(e)} \lesssim 2^{-js} \|g^e\|_{W^{s,p}(e)}.$$

En notant g^e la restriction de g au coté e , on en déduit alors

$$\begin{aligned} \|g - P_{j,\Gamma}g\|_{L^p(\Gamma)} &= \sum_{e \in \mathcal{E}} \|g^e - P_{j,e}^*g^e\|_{L^p(e)} \\ &\lesssim 2^{-js} \sum_{e \in \mathcal{E}} \|g^e\|_{W^{s,p}(e)} \\ &\lesssim 2^{-js} \|g\|_{W^{s,p}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

où la dernière étape utilise le théorème de relèvement 3.4. □

Les estimations directes pour le projecteur $P_{j,\Gamma}$ (3.8) de la deuxième construction du §2.3.2 se démontrent simplement en utilisant le résultat précédent et la stabilité L^p du projecteur.

Proposition 3.21 *Soit $p \in]1, \infty[$ tel que $\phi \in L^p$ et $\tilde{\phi} \in L^{p'}$. Alors pour tout $0 \leq s \leq n$ on a l'estimation*

$$\|g - P_{j,\Gamma}g\|_{L^p(\Gamma)} \lesssim 2^{-js} \|g\|_{W^{s,p}(\Gamma)}.$$

Preuve. Le projecteur étant stable dans $L^p(\Gamma)$ d'après le lemme 3.8, on peut supposer g régulière et passer à la limite à droite et à gauche de l'inégalité. Pour g régulière et $s > 1/p$ on utilise l'estimation d'erreur du projecteur précédent. Pour $0 < s \leq 1/p$ le résultat s'en déduit par interpolation entre $L^p(\Gamma)$ et $W^{s',p}(\Gamma)$ pour $1/p < s' \leq n$. □

Appendice 5: preuve de la proposition 3.13

On note $\Psi_\nabla = \{\psi_{\lambda_p}, \lambda_p \in \nabla\}$ la base d'ondelettes isotrope de M et $\vec{\Psi}_{\vec{\nabla}} = \{\vec{\psi}_{\lambda_{\vec{u}}}, \lambda_{\vec{u}} \in \vec{\nabla} = \prod_{i=1}^d \nabla_i\}$ celle de \vec{X} .

Afin de distinguer les ondelettes *intérieures* et *frontières*, il nous faut introduire les bases d'ondelettes isotropes de M et \vec{X} construites à partir des AMR (3.46) (de façon similaire aux bases anisotropes (3.47) et (3.48)). Ces bases d'ondelettes sont notées $\Psi_{\nabla_0} = \{\psi_{\lambda_p}^0, \lambda_p \in \nabla_0\}$ pour l'espace de pression et $\vec{\Psi}_{\vec{\nabla}_0} = \{\vec{\psi}_{\lambda_{\vec{u}}}^0, \lambda_{\vec{u}} \in \vec{\nabla}_0\}$ pour l'espace des vitesses.

Les bases Ψ_∇ et Ψ_{∇_0} (de même $\vec{\Psi}_{\vec{\nabla}}$ et $\vec{\Psi}_{\vec{\nabla}_0}$) ne diffèrent que dans un voisinage de la frontière. Plus précisément, pour chaque niveau j fixé, il y a seulement un nombre indépendant de j d'ondelettes modifiées dans la direction orthogonale à la face considérée. On désigne par ∇_{int} (resp. $\vec{\nabla}_{int}$) l'ensemble des indices d'ondelettes intérieures de pression (resp. de vitesse) pour lesquelles ces ondelettes de base coïncident. L'ensemble des indices restant est noté ∇_b (resp. $\vec{\nabla}_b$) tel que $\nabla = \nabla_{int} \cup \nabla_b$ (resp. $\vec{\nabla} = \vec{\nabla}_{int} \cup \vec{\nabla}_b$). Finalement on utilisera les bases duales $\tilde{\Psi}_{\nabla_0} = \{\tilde{\psi}_{\lambda_p}^0, \lambda_p \in \nabla_0\}$ de Ψ_{∇_0} et $\vec{\tilde{\Psi}}_{\vec{\nabla}} = \{\vec{\tilde{\psi}}_{\lambda_{\vec{u}}}, \lambda_{\vec{u}} \in \vec{\nabla}\}$ de $\vec{\Psi}_{\vec{\nabla}}$.

Pour un sous ensemble $\Lambda_p \subset \nabla_p$ fixé, on considère la somme directe, uniformément stable dans M

$$M_{\Lambda_p} = M_{\Lambda_p^{int}} \oplus M_{\Lambda_p^b}$$

où $\Lambda_p^{int} = \Lambda_p \cap \nabla_{int}$ et $\Lambda_p^b = \Lambda_p \cap \nabla_b$. Alors, à toute pression $p \in M_{\Lambda_p}$ on associe la décomposition $p = p_{int} + p_b$ où $p_{int} \in M_{\Lambda_p^{int}}$ et $p_b \in M_{\Lambda_p^b}$. En utilisant les mêmes arguments que dans la démonstration de la proposition 3.10 et du théorème 3.1 (étape 1), on peut construire une vitesse $\vec{u}_{int} \in \vec{X}_{\Lambda_p^{int}}$ telle que $\nabla \cdot \vec{u}_{int} = p_{int}$, $\|\vec{u}_{int}\|_{\vec{X}} \lesssim \|p_{int}\|_M$ et où $\Lambda_{\vec{u}}^{int} \subset \vec{\nabla}_{int}$ est relié à Λ_p^{int} comme dans la proposition 3.10 (3.38).

L'étape suivante consiste à décomposer la composante de pression p_b dans la base Ψ_{∇_0} de façon à construire explicitement une vitesse \vec{u}_b telle que $\nabla \cdot \vec{u}_b = p_b$ et $\|\vec{u}_b\|_{\vec{X}} \lesssim \|p_b\|_M$. La pression p_b possédant un nombre infini de coefficients non nuls dans cette base, on va dans un premier temps tronquer cette décomposition. On pose donc

$$q_b = Q_{\Lambda_p^{b,L}} p_b = \sum_{\lambda_p \in \Lambda_p^{b,L}} \langle p_b, \tilde{\psi}_{\lambda_p}^0 \rangle \psi_{\lambda_p}^0, \text{ où}$$

$$\Lambda_p^{b,L} = \bigcup_{\lambda_p \in \Lambda_p^b} \left\{ \lambda'_p \in \nabla_0, \text{Supp } \psi_{\lambda_p} \cap \text{Supp } \tilde{\psi}_{\lambda'_p}^0 \neq \emptyset \text{ et } |\lambda'_p| \leq |\lambda_p| + L \right\}.$$

En utilisant les mêmes techniques qu'au §3.3, on peut estimer l'erreur de troncature $\|p_b - q_b\|_M$ pourvu que les produits scalaires $\langle \psi_{\lambda_p}, \tilde{\psi}_{\lambda'_p}^0 \rangle$ aient les bonnes propriétés

de décroissance. On est ici confronté à une difficulté dans la mesure ou précisément les ondelettes duales $\tilde{\psi}_{\lambda_p}^0$ n'ont pas leur valeur moyenne nulle (au voisinage de la frontière) du fait des conditions aux limites sur l'AMR (3.46). Néanmoins, les générateurs ϕ et ϕ^i étant par hypothèse dans $H^1(\mathbb{R})$, l'ondelette ψ_{λ_p} est dans $L^\infty(\Omega)$, et l'on a l'estimation minimale

$$|\langle \psi_{\lambda_p}, \tilde{\psi}_{\lambda_p}^0 \rangle| \lesssim 2^{-(|\lambda_p| - |\lambda_p|)\frac{d}{2}} \chi_{\text{Supp} \psi_{\lambda_p} \cap \text{Supp} \tilde{\psi}_{\lambda_p}^0}, \quad (3.78)$$

dès que $|\lambda'_p| > |\lambda_p|$.

Comme dans le cas de figure (ii) de la proposition 3.4, seulement $\mathcal{O}(2^{(d-1)(|\lambda'_p| - |\lambda_p|)})$ ondelettes $\tilde{\psi}_{\lambda'_p}^0$ d'échelle $|\lambda'_p|$ interagissent avec une ondelette ψ_{λ_p} telle que $\lambda_p \in \nabla_p^b$. En se reportant à la preuve de la proposition 3.4, on déduit que la décroissance (3.78) suffit à obtenir l'estimation

$$\|p_b - q_b\|_M \lesssim 2^{-\frac{k}{2}} \|p_b\|_M.$$

On note $\Lambda_{\vec{u}}^{b,L} \subset \vec{\nabla}_0$ l'ensemble d'indices d'ondelettes de vitesse relié à $\Lambda_p^{b,L}$ comme dans la proposition 3.10. On peut alors construire une vitesse $\vec{u}_b \in \vec{X}_{\Lambda_{\vec{u}}^{b,L}}$ telle que $\nabla \cdot \vec{u}_b = q_b$ et $\|\vec{u}_b\|_{\vec{X}} \lesssim \|q_b\|_M \lesssim \|p_b\|_M$.

Il nous faut maintenant revenir à la base d'ondelettes $\vec{\Psi}_{\vec{v}}$ par une deuxième compression $\vec{w}_b = \vec{Q}_{\Lambda_{\vec{u}}^{b,L,J}} \vec{u}_b$ où l'ensemble $\Lambda_{\vec{u}}^{b,L,J} = \Pi_{i=1}^d \Lambda_{u_i}^{b,L,J} \subset \vec{\nabla}$ est le voisinage espace-échelle de $\Lambda_{\vec{u}}^{b,L}$ défini par

$$\Lambda_{u_i}^{b,L,J} = \bigcup_{\lambda_{u_i} \in \Lambda_{u_i}^{b,L}} \left\{ \lambda'_{u_i} \in \nabla_i, \text{Supp} \psi_{\lambda_{u_i}}^0 \cap \text{Supp} \tilde{\psi}_{\lambda'_{u_i}} \neq \emptyset \text{ et } |\lambda'_{u_i}| \leq |\lambda_{u_i}| + J \right\}.$$

A nouveau, on peut estimer l'erreur de troncature $\|\vec{w}_b - \vec{u}_b\|_{\vec{X}}$, en utilisant les propriétés de décroissance des coefficients $2^{|\lambda'_{u_i}| - |\lambda_{u_i}|} |\langle \psi_{\lambda_{u_i}}^0, \tilde{\psi}_{\lambda'_{u_i}} \rangle|$ pour $\lambda'_{u_i} \in \nabla_i$, $\lambda_{u_i} \in \Lambda_{u_i}^{b,L}$ et $|\lambda'_{u_i}| > |\lambda_{u_i}|$. Cette décroissance est fonction de l'ordre d'approximation $n_{\vec{u}} \geq 2$ des générateurs ϕ et ϕ^i , et de leur régularité holdérienne. Comme $\phi \in H^\tau(\mathbb{R})$ pour $\tau > 1$ (et donc $\phi^i \in H^{\tau+1}(\mathbb{R})$), les ondelettes de vitesse ont la régularité $C^{\tau_\infty}(\Omega)$ où $\tau_\infty > \tau - \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$. On en déduit l'estimation

$$2^{|\lambda'_{u_i}| - |\lambda_{u_i}|} |\langle \psi_{\lambda_{u_i}}^0, \tilde{\psi}_{\lambda'_{u_i}} \rangle| \lesssim 2^{-\alpha(|\lambda'_{u_i}| - |\lambda_{u_i}|)} \chi_{\text{Supp} \psi_{\lambda_{u_i}}^0 \cap \text{Supp} \tilde{\psi}_{\lambda'_{u_i}}},$$

pour $\alpha = \min(n_{\vec{u}}, \tau_\infty) + \frac{d}{2} - 1 > \frac{d-1}{2}$. Le nombre d'ondelettes $\tilde{\psi}_{\lambda'_{u_i}}$ d'échelle $|\lambda'_{u_i}|$, qui interagit avec une ondelette $\psi_{\lambda_{u_i}}^0$ telle que $\lambda_{u_i} \in \Lambda_{u_i}^{b,L}$ et $|\lambda'_{u_i}| > |\lambda_{u_i}|$, se comporte en $\mathcal{O}(2^L 2^{(d-1)(|\lambda'_{u_i}| + |\lambda_{u_i}|)})$. Il en résulte que l'application du lemme de Schur 3.1 donne la majoration d'erreur

$$\|\vec{w}_b - \vec{u}_b\|_{\vec{X}} \lesssim 2^L 2^{-\beta J} \|\vec{u}_b\|_{\vec{X}} \lesssim 2^L 2^{-\beta J} \|p_b\|_M,$$

où $\beta = \alpha - \frac{d-1}{2} > 0$.

Finalement, pour $p = p_b + p_{int} \in M_{\Lambda_p}$, on pose

$$\vec{u} = \vec{w}_b + \vec{u}_{int} \in \vec{X}_{\Lambda_a^{b,L,J} \cup \Lambda_a^{int}}.$$

Alors pour L et J suffisamment grands, on peut prouver que $\langle \nabla \cdot \vec{u}, p \rangle \gtrsim \|\vec{u}\|_{\vec{X}} \|p\|_M$ où la constante est indépendante de L , J et Λ_p . Pour cela on écrit

$$\begin{aligned} \langle \nabla \cdot \vec{u}, p \rangle &= \|q_b + p_{int}\|_M^2 + \langle \nabla \cdot (\vec{w}_b - \vec{u}_b), q_b + p_{int} \rangle + \langle \nabla \cdot (\vec{u}_b + \vec{u}_{int}), p_b - q_b \rangle \\ &\geq \|q_b + p_{int}\|_M^2 - \|\vec{w}_b - \vec{u}_b\|_{\vec{X}} \|q_b + p_{int}\|_M - \|\vec{u}_b + \vec{u}_{int}\|_{\vec{X}} \|p_b - q_b\|_M, \end{aligned}$$

et on conclut par le biais des estimations précédentes $\|\vec{w}_b - \vec{u}_b\|_{\vec{X}} \lesssim 2^L 2^{-\beta_p J} \|p_b\|_M$, $\|p_b - q_b\|_M \lesssim 2^{-\frac{k}{2}} \|p_b\|_M$ et de la stabilité dans M de la décomposition $p = p_b + p_{int}$. Ceci achève la preuve de la proposition avec $K_0 = J + L$.

Appendice 6: ellipticité $H^{-1/2}(\Gamma)$ de l'opérateur de bord discret $\psi - \omega$

On considère tout d'abord le cas continu où l'on va montrer que, dans le cas d'un domaine régulier ou polygonal convexe Ω , le relèvement harmonique définit un isomorphisme de $H^{-1/2}(\Omega)$ dans le sous espace

$$X = \{\omega \in L^2(\Omega), \Delta\omega = 0\}$$

muni de la norme $L^2(\Omega)$.

Preuve. Pour g régulière, soit ω la solution unique de

$$\begin{cases} \Delta\omega = 0, \\ \gamma\omega = g. \end{cases}$$

Dans un sens, montrons que $\|g\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \lesssim \|\omega\|_{L^2(\Omega)}$. Partant de la définition de la norme duale

$$\|g\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} = \sup_{\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)} \frac{\langle g, \varphi \rangle}{\|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}},$$

on considère le relèvement biharmonique ψ des traces ($\gamma\psi = 0, \gamma\partial_n\psi = \varphi$) qui vérifie pour un tel domaine $\|\psi\|_{H^2(\Omega)} \lesssim \|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$. On utilise alors la formule de Green

$$\langle \Delta\psi, \omega \rangle - \langle \Delta\omega, \psi \rangle = \langle \gamma\partial_n\psi, \gamma\omega \rangle - \langle \gamma\partial_n\omega, \gamma\psi \rangle$$

pour obtenir l'estimation cherchée

$$\begin{aligned} \|g\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} &= \sup_{\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)} \frac{\langle \Delta\psi, \omega \rangle}{\|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}} \\ &\lesssim \sup_{\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)} \frac{\|\psi\|_{H^2(\Omega)} \|\omega\|_{L^2(\Omega)}}{\|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}} \\ &\lesssim \|\omega\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned}$$

Dans l'autre sens, on part de

$$\|\omega\|_{L^2(\Omega)} = \sup_{f \in L^2(\Omega)} \frac{\langle \omega, f \rangle}{\|f\|_{L^2(\Omega)}},$$

et l'on considère la solution unique $\psi \in H_0^1(\Omega)$ de $\Delta\psi = f$ qui vérifie ici l'estimation a priori $\|\psi\|_{H^2(\Omega)} \lesssim \|f\|_{L^2(\Omega)}$. En utilisant à nouveau la formule de Green précédente on obtient alors

$$\begin{aligned} \|g\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} &= \sup_{f \in L^2(\Omega)} \frac{\langle g, \gamma \partial_n \psi \rangle}{\|f\|_{L^2(\Omega)}} \\ &\lesssim \|g\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}. \end{aligned}$$

On étend alors classiquement par densité de façon unique cet opérateur de relèvement harmonique aux fonctions de $H^{-1/2}(\Omega)$.

On considère maintenant le cas discret où la preuve proposée nous a été suggérée par C. Bernardi. Selon les notations du §2.1.6, soit ω_J la solution du problème variationnel

$$\begin{cases} \omega_J \in V_J, \langle \nabla \omega_J, \nabla \varphi_J \rangle = 0, \quad \forall \varphi_J \in V_J^0, \\ \gamma \omega_J = g_J \in V_J(\Gamma), \end{cases}$$

on va montrer que l'on a comme dans le cas continu $\|\omega_J\|_{L^2(\Omega)} \sim \|g_J\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}$. Pour se faire on va utiliser de façon essentielle l'uniformité de la discrétisation par le biais d'estimations inverses et directes.

Dans le premier sens, on considère le relèvement biharmonique ψ précédent et par application de la formule de Green on obtient que

$$\|g_J\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} = \sup_{\varphi \in H^{-1/2}(\Gamma)} \frac{\langle \Delta \psi, \omega_J \rangle - \langle \Delta \omega_J, \psi \rangle}{\|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}}.$$

Dans le membre de droite, le premier terme se majore comme dans le cas continu. On estime le second par la biais d'une estimation inverse et d'une estimation directe dans V_J :

$$\begin{aligned} \langle \Delta \omega_J, \psi \rangle &= \inf_{\theta_J \in V_J^0} \langle \nabla \omega_J, \nabla \psi - \nabla \theta_J \rangle \\ &\lesssim 2^J \|\omega_J\|_{L^2(\Omega)} 2^{-J} \|\psi\|_{H^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

ce qui permet de conclure que $\|g_J\|_{H^{-1/2}(\Gamma)} \lesssim \|\omega_J\|_{L^2(\Omega)}$.

Dans l'autre sens, on note ω le relèvement harmonique continu de g_J qui vérifie donc $\|\omega\|_{L^2(\Omega)} \sim \|g_J\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}$ et $\|\omega\|_{H^1(\Omega)} \sim \|g_J\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$. Pour un tel domaine Ω , par une méthode de dualité à la Aubin Nitsche, on démontre classiquement l'estimation

$$\|\omega - \omega_J\|_{L^2(\Omega)} \lesssim 2^{-J} \|\omega\|_{H^1(\Omega)} \lesssim 2^{-J} \|g_J\|_{H^{1/2}(\Gamma)}$$

et on conclut par l'inégalité inverse dans $V_J(\Gamma)$ que $\|\omega - \omega_J\|_{L^2(\Omega)} \lesssim \|g_J\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}$ et donc

$$\|\omega_J\|_{L^2(\Omega)} \lesssim \|g_J\|_{H^{-1/2}(\Gamma)}.$$

Bibliographie

- [1] R. ADAMS Sobolev Spaces, *Academic Press*, New York, 1975.
- [2] L. ANDERSSON, N. HALL, B. JAWERTH, AND G. PETERS Wavelets on closed subsets of the real line. *Recent Advances in Wavelets Analysis*, (L.L. Schumaker and G. Webb eds), *Academic Press*, 1993 p1-61.
- [3] J. BERGH, AND J. LÖFSTRÖM Interpolation spaces, *Springer Verlag*, Berlin, 1976.
- [4] C. BERNARDI, M. DAUGE AND Y. MADAY Polynomials in weighted Sobolev spaces: basics and trace liftings. *Preprint*, No 92039, LAN de Paris VI, 1993.
- [5] C. BERNARDI, Y. MADAY, A.T. PATERA A New Non conforming Approach to Domain Decomposition: the Mortar Element Method, *Appl. Numer. Math.* **54**, 1989.
- [6] C. BERNARDI, Y. MADAY Spectral Methods, in the Handbook of Numerical Analysis **V**, P.G. Ciarlet and J.L. Lions eds., North-Holland, 1997.
- [7] S. BERTOLUZZA A-posteriori error estimates for wavelet Galerkin methods, *Preprint*, No 935, Istituto di Analisi Numerica, CNR, Pavia, 1994.
- [8] S. BERTOLUZZA Numerical computation of wavelet expansion: $W^{s,p}$ error estimate, *SPIE Proc. Wavelets Appl II* **2491**, 1995.
- [9] S. BERTOLUZZA Stabilization by multiscale decompositions, *Preprint*, No 1042, Istituto di Analisi Numerica, CNR, Pavia, 1997.
- [10] S. BERTOLUZZA Adaptive wavelet collocation method for the solution of Burgers equation. *to appear in Transport Theory and Stat. Phys.*
- [11] S. BERTOLUZZA, R. MASSON Velocity Pressure Adaptive Wavelet Spaces Satisfying the Inf-Sup Condition. *CRAS t. 323, Série I*, 407-412.
- [12] S. BERTOLUZZA, V. PERRIER The mortar method in the wavelet context, *in preparation*.
- [13] G. BEYLKIN, R. COIFMAN, V. ROKHLIN Fast wavelet transforms and numerical algorithms I. *Comm. Pure and Appl. Math.*, 44:141-183, 1991.

- [14] J. BOLAND R. NICOLAIDES Stability of finite elements under divergence constraints, *SIAM J. Numer. Anal.* **20** 1980, 722-731.
- [15] J.H. BRAMBLE, J.E. PASCIAK A Preconditioning technique for indefinite systems resulting from mixed approximations of elliptic problems, *Math. Comp.* **50**, 1-17, 1988.
- [16] J.H. BRAMBLE, J.E. PASCIAK, J. XU Parallel Multilevel Preconditioners, *Math. Comp.* **31** p 1-22, 1990.
- [17] F. BREZZI, M. FORTIN Mixed and Hybrid Finite Element Methods, *Springer Verlag, New York*, 1991.
- [18] C.CANUTO, I. CRAVERO, Wavelet-based adaptive methods for advection-diffusion problems, *Preprint*, Dip. di Matematica, Politecnico di Torino, 1996.
- [19] C.CANUTO, A. TABACCO, K. URBAN Wavelet Element Method. Part 1: construction and analysis. Politecnico di Torino, Dip. di Matematica, rapporto interno No 13, 1997. Submitted to *Appl. Comput. Harmon. Anal.*
- [20] C.CANUTO, A. TABACCO, K. URBAN Wavelet Element Method, Part II: Realization and additional features in 2D and 3D, Politecnico di Torino, Dip. di Matematica, rapporto interno 1997. Submitted to *Appl. Comput. Harmon. Anal.*
- [21] T.F. CHAN, W.P. TANG, W.L. WAN Wavelet sparse approximate inverse preconditioners, *BIT* 37:3 (1997), p. 644-660.
- [22] G. CHIAVASSA, J. LIANDRAT On the effective construction of compactly supported wavelets satisfying homogeneous boundary conditions on the interval. *Appl. Comput. Harmon. Anal.*, **4**, p. 62-73, 1997.
- [23] C.K. CHUI AND Y. WANG A general framework for compactly supported splines and wavelets, *J. Approx. Theory* **71**, p. 263-304, 1992.
- [24] P.G. CIARLET Basic error estimates for the finite element method, in: P.G. Ciarlet and J.L. Lions, eds, *Handbook of Numerical Analysis*, vol. 2, Elsevier, Amsterdam, 1991.
- [25] Z. CIESIELSKI, T. FIEGEL Spline bases in classical function spaces on compact C^∞ manifolds, part I and II, *Studia Math.*, 76 (1983), 1-58, 95-136.
- [26] A. COHEN Wavelet methods in Numerical Analysis, to appear in Handbook of Numerical Analysis, Editors P.G. Ciarlet and J.L. Lions, Elsevier Science Publishers, North Holland
- [27] A. COHEN, S. DAHLKE Besov Regularity for Elliptic Boundary Value Problems in Polygonal Domains, IGPM-Report 150, RWTH Aachen, 1998.

- [28] A. COHEN, W. DAHMEN, R. DEVORE Adaptive Wavelet Methods for Elliptic Operator Equations - Convergence Rates. Preprint 1998.
- [29] A. COHEN, I. DAUBECHIES, J. FEAUVEAU Biorthogonal bases of compactly supported Wavelets. *Comm. Pure Appl. Math.* **45**, 1992, p485-560.
- [30] A. COHEN, I. DAUBECHIES, P. VIAL Wavelets on the Interval and Fast Wavelet Transforms. *Appl. Comput. Harmon. Anal.* **1**, 1993, p54-81.
- [31] A. COHEN, I. DAUBECHIES, G. PLONKA Regularity of refinable function vectors, *J. Fourier Anal. Appl.* **3**, p 295-324, 1997.
- [32] A. COHEN, L.M. ECHEVERRY, Q. SUN Finite element based biorthogonal wavelets on plane polygones, in Preparation.
- [33] A. COHEN, R. MASSON Wavelet Adaptive Methods for 2nd Order Elliptic Problems. *Preprint No 97036, Laboratoire d'Analyse Numerique, Université Pierre et Marie Curie*, 1997. To appear in SIAM J. of Sci. Comp.
- [34] A. COHEN, R. MASSON Wavelet Adaptive Methods for 2nd Order Elliptic Problems, Domain Decomposition and Boundary Conditions. *Preprint No 98007, Laboratoire d'Analyse Numerique, Université Pierre et Marie Curie*, 1998. Submitted to Numerische Mathematik.
- [35] R. COIFMAN, V. ROKHLIN, S. WANDZURA The Fast Multipole Method for the Wave Equation: A Pedestrian Prescription. *IEEE Antennas and Propagation Magazine*, Vol. 35, No. 3, june 1993.
- [36] S. DAHLKE, W. DAHMEN AND R. DEVORE Nonlinear approximation and adaptive techniques for solving elliptic operators equations, in: *Multiscale wavelet Methods for PDE's*, W. Dahmen, A. Kurdila, P. Oswald eds., Academic Press, 1997.
- [37] S. DAHLKE, W. DAHMEN, R. HOCHMUTH AND R. SCHNEIDER Stable multiscale bases and local error estimation for elliptic problems, *Applied Numerical Mathematics*, **23**, 1997, 21-47.
- [38] W. DAHMEN Some remarks on multiscale transformations, stability and biorthogonality, in: *Wavelets, Images and Surface Fitting*, P.J. Laurent, A. Le Méhauté, L.L. Schumaker (eds.), AK Peters, Wellesley, Massachusetts, 1994, 157-188.
- [39] W. DAHMEN Stability of multiscale transformations *Journal of Fourier Analysis and Applications*, **2** (1996), 341-361.
- [40] W. DAHMEN Wavelet and Multiscale Methods for Operator Equations, *Acta Numerica*, Cambridge University Press, 1997, p 55-228.

- [41] W. DAHMEN AND A. KUNOTH Multilevel Preconditioning, *Numer. Math.*, **63**, 1992, pp 315-344.
- [42] W. DAHMEN, A. KUNOTH, K. URBAN A Wavelet-Galerkin Method for Stokes Problem, *Computing*, **56**, p. 259-302, 1996.
- [43] W. DAHMEN, A. KUNOTH, K. URBAN Spline Biorthogonal Wavelet on the Interval, Stability and Moment Conditions. *Preprint No 129, IGPM, RWTH Aachen*, 1996. To appear in *Appl. Comput. Harmon. Anal.* january 1999.
- [44] W. DAHMEN AND C.A. MICCHELLI Using the refinement equation for evaluating integrals of wavelets, *SIAM J. Numer. Anal.* **30**, 1993, p507-537
- [45] W. DAHMEN, S. PRÖSSDORF, R. SCHNEIDER Wavelet approximation methods for pseudodifferential equations I: Stability and convergence *Mathematische Zeitschrift* **215**, 1994, p583-620
- [46] W. DAHMEN, S. PRÖSSDORF, R. SCHNEIDER Wavelet approximation methods for pseudodifferential equations II: Matrix compression and fast resolution *Advances in computational Mathematics, 1 (1993)*,259-335. **215**, 1994, p583-620
- [47] W. DAHMEN, R. SCHNEIDER Composite Wavelet Bases for Operator Equations *Publication No 133, Institut für Geometrie und Praktische Mathematik RWTH Aachen, (1996)*.
- [48] W. DAHMEN, R. SCHNEIDER Wavelets on Manifolds I: Construction and Domain decomposition. *Preprint, Institut für Geometrie und Praktische Mathematik RWTH Aachen, (1997)*, submitted to SIAM J. Math. Ana.
- [49] W. DAHMEN, R. STEVENSON, Element-by-element construction of wavelets satisfying stability and moment conditions. Preprint No. 9725, Depart. of Math., Univ. of Nijmegen, dec. 1997. Submitted to SIAM J. Numer. Anal.
- [50] I. DAUBECHIES Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure Appl. Math.* **41**, 1988, p909-996.
- [51] G. DESLAURIERS, S. DUBUC, Interpolation dyadique, in: G. CHERBIT, ed., *Fractales, dimensions non entières et applications*, Masson, Paris, 1987.
- [52] R. DEVORE, B. JAWERTH AND V. POPOV Compression of wavelet decompositions, *Amer. J. Math.* **114**, 1992, 737-785.
- [53] R. DEVORE, S. KONJAGIN AND V. TEMLYAKOV, Hyperbolic wavelet approximation, *to appear in Constructive Approximation*, 1997.
- [54] R. DEVORE, G.G. LORENTZ, Constructive Approximation, *Springer Verlag*, Berlin, 1993.

- [55] R. DEVORE, Non linear Approximation, *Acta Numerica* 1998.
- [56] D. DONOHO Interpolating Wavelet transforms, Preprint, Departement of statistics, Standford University, 1992
- [57] G. DONOVAN, J. GERONIMO AND D. HARDIN Orthogonal polynomials and the construction of piecewise polynomial smooth wavelets, preprint, Georgia Tech., Atlanta, 1997.
- [58] V. GIRAUD, P.A. RAVIART Finite Element Methods for Navier Stokes Equations, Theory and Applications, *Springer Series in Computational Mathematics*, Springer-Verlag, 1986.
- [59] GLOWINSKY, O. PIRONNEAU Numerical methods for the first biharmonic equation and for the two dimensional Stokes problem. *SIAM SIREV*, **21**, No 2, p. 167-212, April 1979.
- [60] P. GRISVARD Elliptic problems on non-smooth domains, Pittman, New York, 1983.
- [61] P. GRISVARD Commutativité de deux foncteurs d'interpolation et applications. *J. Math. Pures Appliquées*, **45**, p143-290.
- [62] M.J. GROTE, T. HUCKLE Parallel preconditioning with Sparse Approximate Inverses, *SIAM J. Sci. Comp.*, Vol. 18, No 3, pp 838-853, May 1997.
- [63] S. JAFFARD Wavelets Methods for fast resolution of Elliptic Problems, *SIAM J. Numer. Anal.* **29**, 1992, p965-986.
- [64] R.Q. JIA AND J.J. LEI Approximation by multi-integer translates of functions having global support. *J. Approx. Theory*, **72**, p 2-23, 1993.
- [65] A. JOUINI, Constructions de bases d'ondelettes sur les variétés, *Dissertation*, Université d'Orsay 1992.
- [66] A. JOUINI, P.G. LEMARIE-RIEUSSET, Ondelettes sur un ouvert borné du plan, Preprint, Université d'Orsay 1992.
- [67] A. JOUINI, P.G. LEMARIE-RIEUSSET Analyse multi-résolutions biorthogonales sur l'intervalle et applications. *Ann. Inst. Henri Poincaré* **10**, 1993, No 4, p453-476.
- [68] A. JONSSON, H. WALLIN Function Spaces on subsets of \mathbb{R}^n , *Harwood Academic Publishers*, Mathematical Reports, Vol. 2, 1984
- [69] L. YU. KOLOTILINA AND A. YU. YEREMIN Factorised sparse approximate inverse preconditioning I. theory, *Siam J. Matrix Anal. Appl.* **14**, 1993, 45-58.

- [70] Y.A. KUNETSOV Efficient iterative solvers for elliptic finite element problems on nonmatching grids. *Russian Journal of Numerical Analysis Mathematic Modelling*, vol. **10**, 1995, pp. 187-211.
- [71] A. KUNOTH Multiscale Preconditioning - Appending boundary conditions by Lagrange multipliers, *Advances in Comp. Math.* **4**, p. 145-170, 1995.
- [72] A. KUNOTH Multilevel Preconditioning, PhD. Thesis, Fachbereich Mathematik und Informatik, Freie Universität Berlin, January 1994 (Verlag Shaker, Aachen, 1994).
- [73] P. LASCAUX AND R. THEODOR *Analyse Numérique Matricielle Appliquée à l'Art de l'ingénieur, T.2*, Masson, Paris, 1997.
- [74] S. LAZAAR, J. LIANDRAT, P. TCHAMITCHIAN, Algorithmes à base d'ondelettes pour la résolution numérique d'équations aux dérivées partielles à coefficients variables, *CRAS*, Paris, Série I **319**, p. 1101-1107, 1994.
- [75] P.G. LEMARIÉ Analyses multirésolutions non-orthogonales, commutation entre projecteurs et dérivation et ondelettes vecteurs à divergence nulle, *Rev. Mat. Iberoamer.* **8**, 1992, 221-236.
- [76] P.G. LEMARIÉ ET G. MALGOUYRES Support des fonctions de base dans une analyse multirésolution, *CRAS Paris Série I* **213**, p 377-380, 1991.
- [77] Y. MADAY, A. T. PATERA Spectral Element Methods for the incompressible Navier-Stokes equations, in *State of the Art Survey in Computational Mechanics*, A. K. Noor ed. 1989, p. 71-143.
- [78] Y. MADAY, V. PERRIER, J.C. RAVEL Adaptativité dynamique sur bases d'ondelettes pour l'approximation d'équations aux dérivées partielles. *C.R. Acad. Sci. Paris Série I Math.* **I**, 1991, p405-410.
- [79] R. MASSON Biorthogonal Spline Wavelets on the Interval for the Resolution of Boundary Problems. *M3AS* Vol. 6, No 6, 1996, 749-791.
- [80] R. MASSON Wavelet discretizations of the Stokes problem in velocity-pressure variables. *Preprint LAN de l'université Pierre et Marie Curie*, 1998.
- [81] Y. MEYER Ondelettes et Operateurs 1: Ondelettes. Paris: Hermann 1990.
- [82] Y. MEYER Ondelettes et Operateurs 2: Opérateurs. Paris: Hermann 1990.
- [83] P. MONASSE, V. PERRIER Orthogonal wavelets bases for partial differential equations with boundary conditions, Preprint Université de Paris Nord, No 95-11 (1995), to appear in *Siam J. on Math. Analysis*.

- [84] J. A. NITSCHKE, A. H. SCHATZ Interior Estimates for Ritz-Galerkin Methods, *Math. of Comp.*, Vol. **28**, No 128, p937-958, 1974.
- [85] P. OSWALD, R. LORENTZ Multilevel finite element Riesz bases in Sobolev spaces, in: P. BJORSTAD, ed., *Proceeding of the Ninth International Conf. on Domain Decomposition, Bergen*, 1996.
- [86] A. QUATERONI, A. VALLI Numerical Approximation of Partial Differential Equations, Springer Verlag, 1994
- [87] P.A. RAVIART, J.M. THOMAS Primal Hybrid Finite Element Methods for 2nd order Elliptic equations, *Math. Comp.* **31** (1977), p. 391-396.
- [88] T. VON PETERSDORFF, C. SCHWAB Fully discrete multiscale Galerkin BEM, in: W. DAHMEN, A.J. KURDILA AND P. OSWALD, eds., *Multiscale Wavelet Methods for PDE's* (Academic Press, New York).
- [89] R. SCHNEIDER Multiskalen - und - Wavelet-Matrixkompression: Analysisbasierte Methoden zur effizienten lösung grosser vollbesetzter Gleichungssysteme, *Habilitationsschrift*, Technische Hochschule, Darmstadt, 1995.
- [90] R. STEVENSON Piecewise linear pre-wavelets on non-uniform meshes, *report 9701, Univ. of Nijmegen, submitted to Proceedings EMG'96*
- [91] G. STRANG AND G. FIX Fourier analysis of the finite element method in Ritz-galerkin theory, *Stu. Appl. Math.* **23**, p 159-175, 1969.
- [92] W. SWELDENS The lifting Scheme: a custom design construction of biorthogonal wavelets, *Appl. Comp. harm. Anal.* **3**, p 186-200, 1996.
- [93] W. SWELDENS AND R. PIESSENS Quadrature formulae and asymptotic error expansions for wavelet approximation of smooth functions, *SIAM J. Num. Anal.* **31**, p 2140-2164, 1994.
- [94] P. TCHAMITCHIAN, Inversion explicite de certains opérateurs elliptiques, *SIAM J. Math. Anal.* **27**, p. 1680-1703, 1996.
- [95] P. TCHAMITCHIAN Wavelets, Functions, and Operators, in: *Wavelets: Theory and Applications*, G. Erlebacher, M.Y. Hussaini, and L. Jameson (eds), ICASE/LaRC Series in Computational Science and Engineering, Oxford University Press, 1996, 83-181.
- [96] H. TRIEBEL Theory of function spaces, *Birkhauser*, Basel, 1983.
- [97] K. URBAN On divergence free wavelets, *Advances in Computational Mathematics*, **4** (1995), 51-82.