

Contributions à la Modélisation stratigraphique et aux écoulements en milieux poreux

HDR

Présentée le 12 janvier 2006
à l'université de Marne-la-Vallée

par

Roland Masson
Institut Français du Pétrole

CV

- 97-99 Thèse au laboratoire JLL Paris VI sur l'approximation par ondelettes des EDPs sous la direction d'Albert Cohen
- 99- Responsable du département Mathématiques Appliquées de l'Institut Français du Pétrole
 - *Géosciences*
 - *Catalyse en raffinage*
 - *Moteurs à Combustion interne*

- Co-encadrement de thèses

- ↳ 2000-2003 thèse de Sébastien Lacroix "*solveurs linéaires en simulation de réservoir*" directeur Yves Achdou
- ↳ 2001-2004 thèse de Véronique Gervais "*modélisation stratigraphique directe*" directeur Thierry Gallouët
- ↳ 2002-2005 thèse de Gabriela Dobranszky "*modélisation stratigraphique inverse*" directeur Jacques Blum

- Organisations de journées thématiques

- ☞ Journée Gamni 2004 avec Yves Achdou et Jean François Maître "solveurs linéaires pour les systèmes couplés"
- ☞ Workshop à l'UPPA 2004 avec Guy Vallet "modélisation stratigraphique"
- ☞ Demi-journée industrielle Canum 2002 avec Robert Eymard "modélisation stratigraphique"

Collaborations

- Universitaires

- ☞ Robert Eymard, Thierry Gallouët, Jacques Blum, Yves Achdou, Yuri Vassilevski, Roland Glowinski, Jean Charles Gilbert, Robert Scheichl

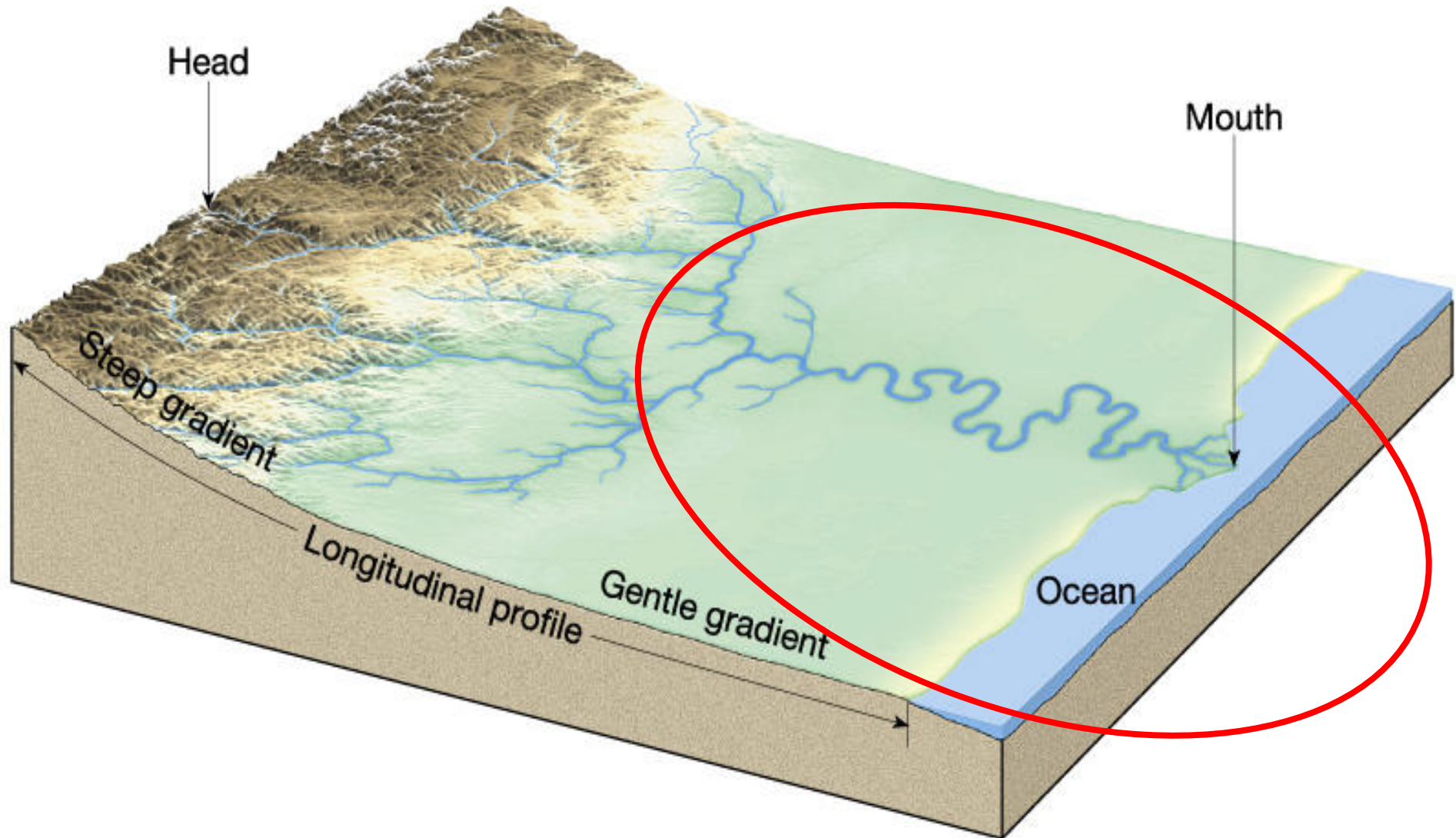
- À l'IFP

- ☞ Didier Granjeon, Marie Christine Cacas, Sylvie Wolf, Delphine Sinoquet, Quang Huy Tran, Philippe Quandalle

Modélisation stratigraphique

- Objectifs en exploration pétrolière
- Modélisation
- Discrétisation
- Analyse d'un modèle simplifié
- Solveurs linéaires et non linéaires
- Problème inverse

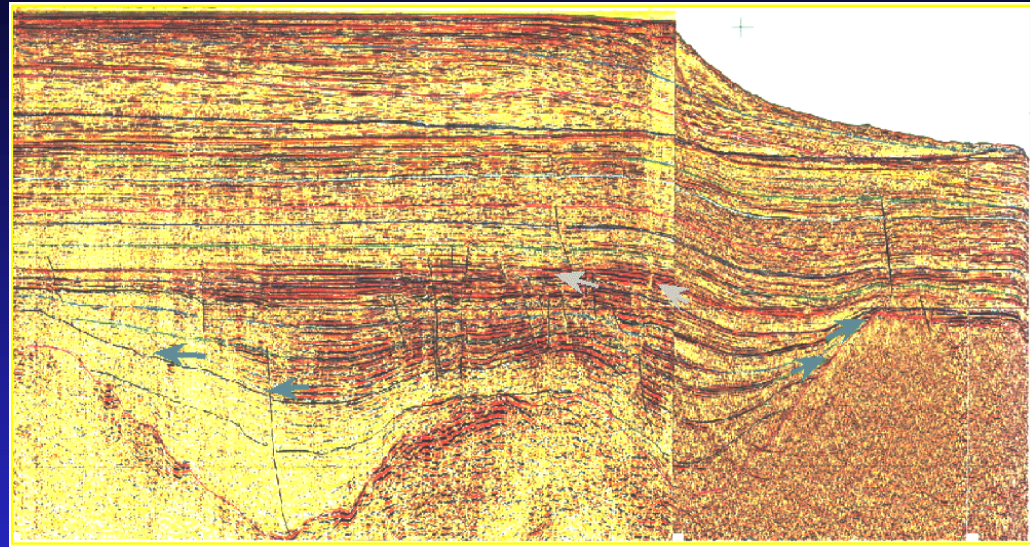
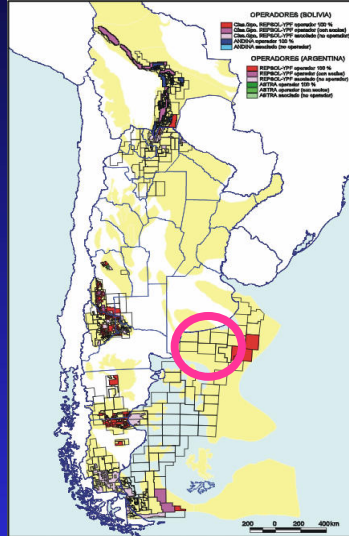
Systeme étudié: bassin sédimentaire dépôts alluviaux et marins



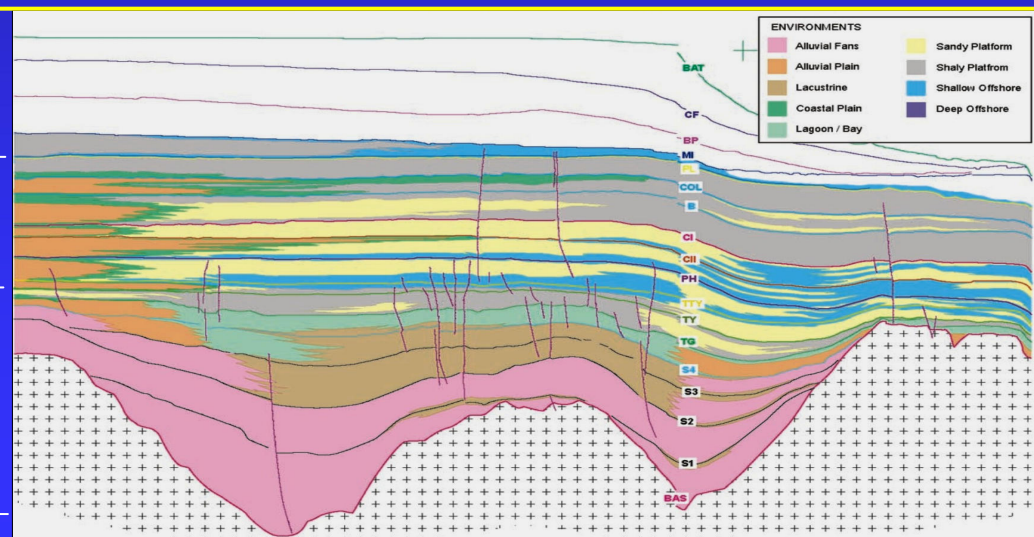
Données sismiques



Données sismiques migrées en profondeur



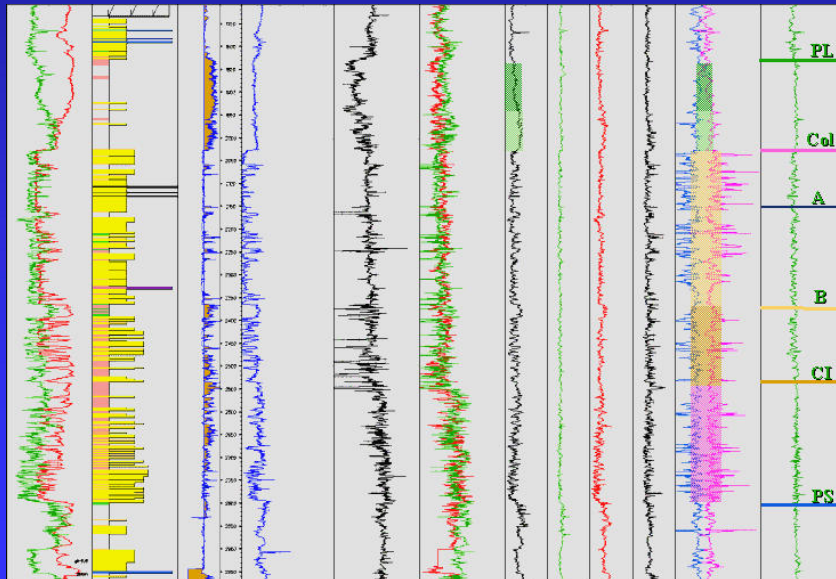
Définition de séquences et interprétation en facies



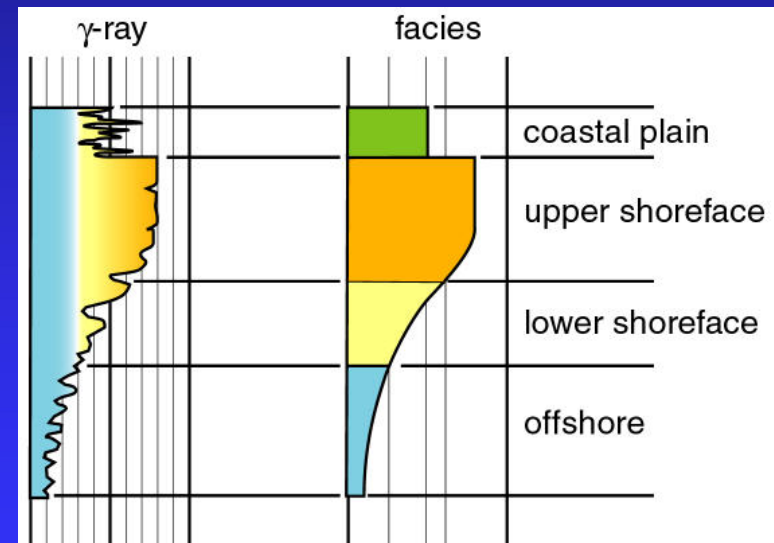
Données de puits

Enregistrements diagraphiques aux Puits

- Mesures Electriques
- Radioactivités
- Vitesse du Son, ...



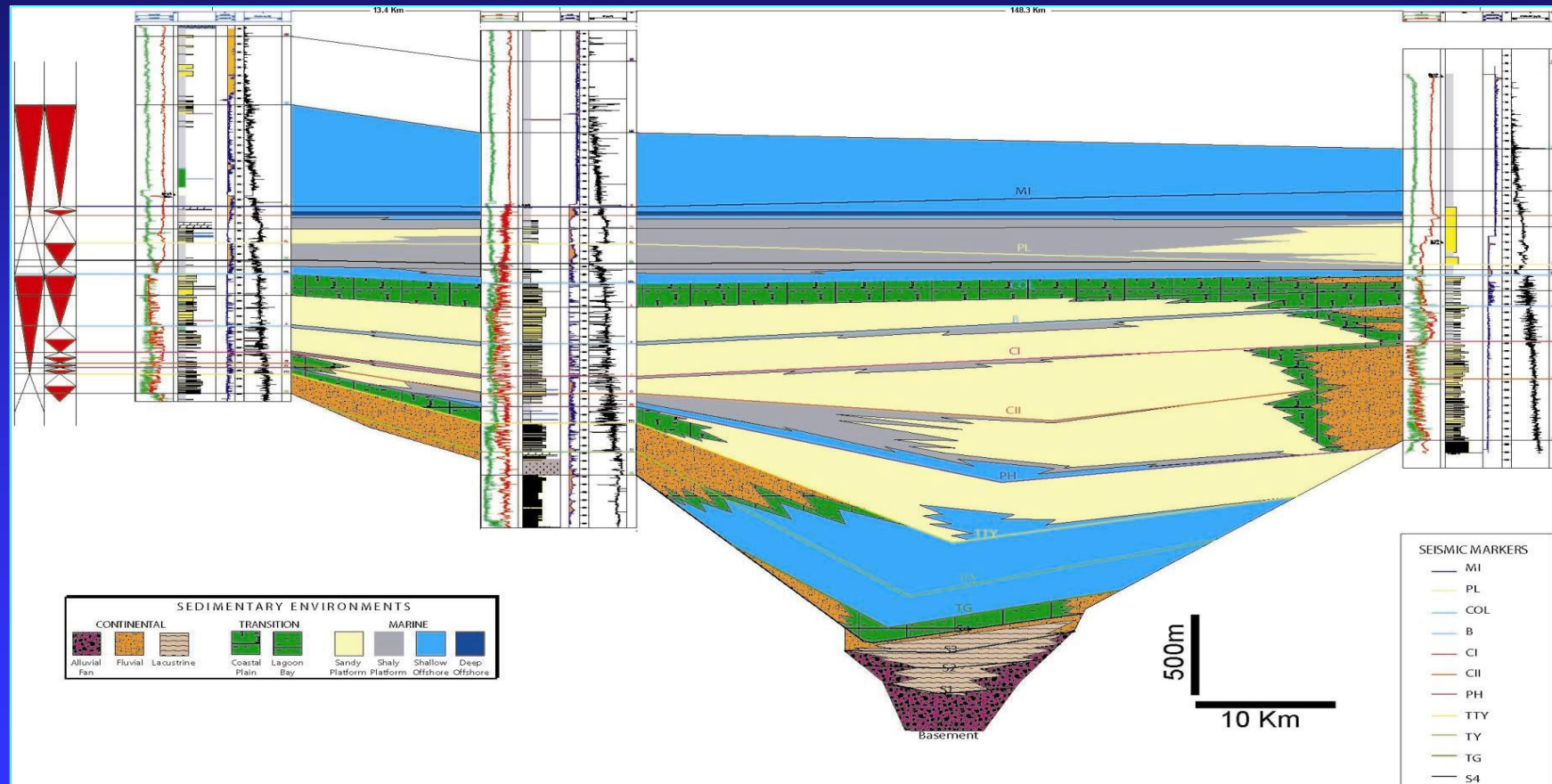
Interprétation des diagraphies en faciès



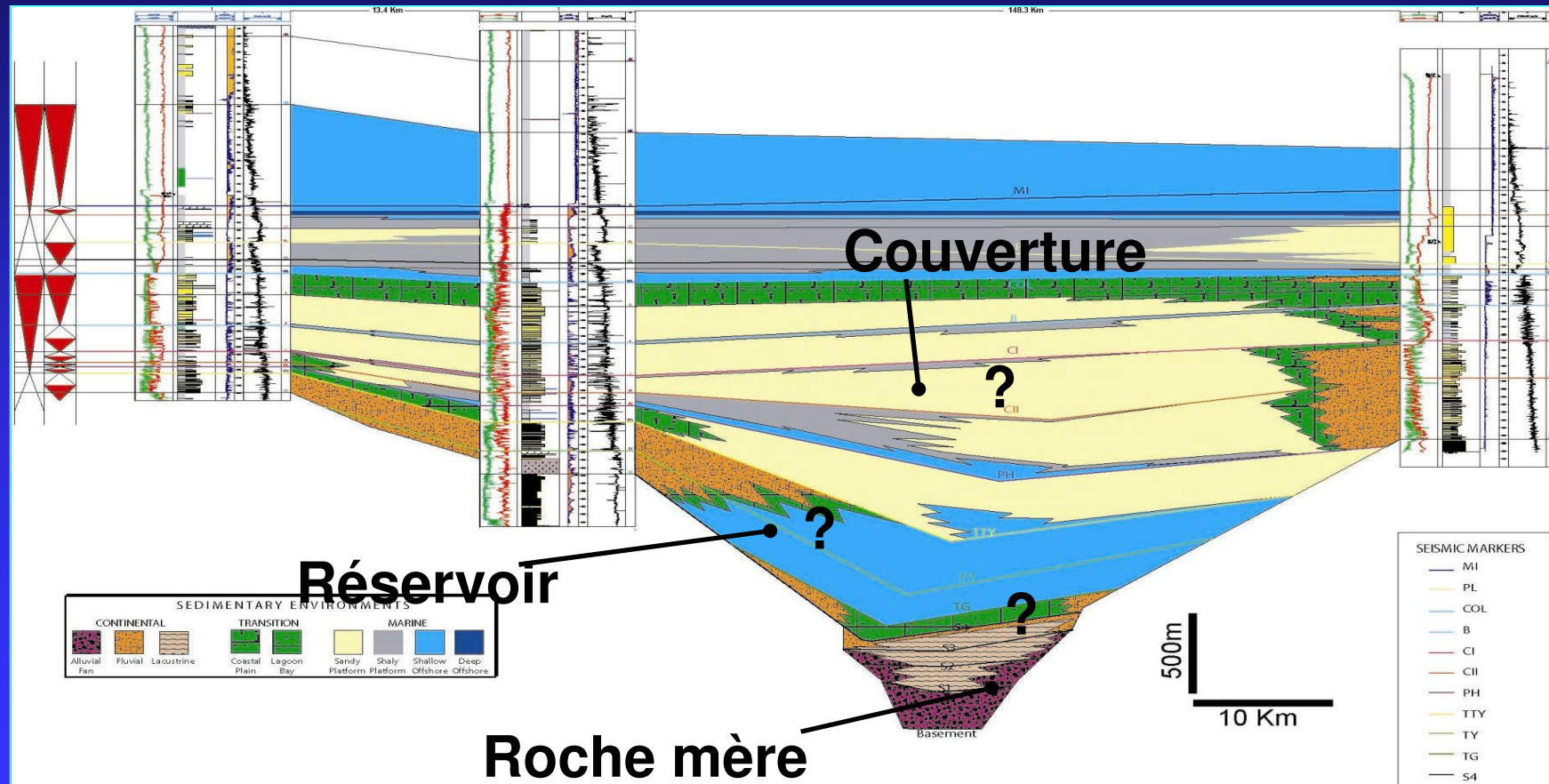
Interprétation des données de puits



- ➔ Définition de séquences et interpolations entre les puits



Objectifs en exploration pétrolière



De l'interprétation à la Modélisation stratigraphique

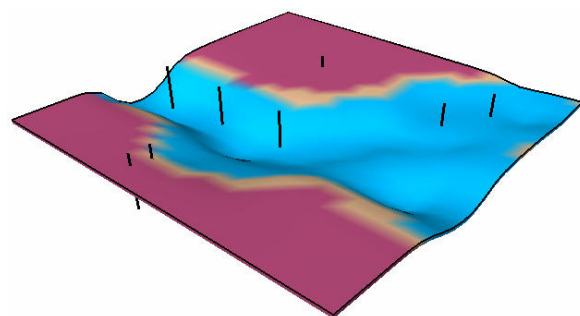


■ Objectifs

- Modèle quantitatif, dynamique
- Lois physiques phénoménologiques
 - ↳ *Interpolation physique des données*

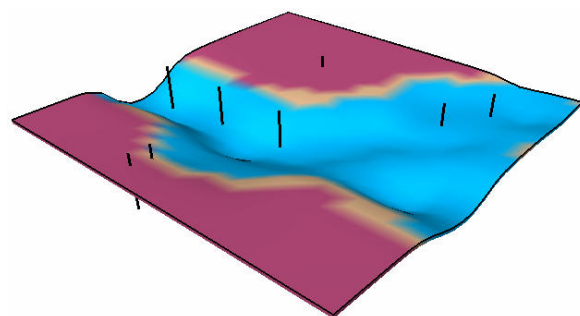
- Mais ...
 - ↳ *Nécessite une boucle d'inversion pour intégrer les données*

Principes de la modélisation stratigraphique



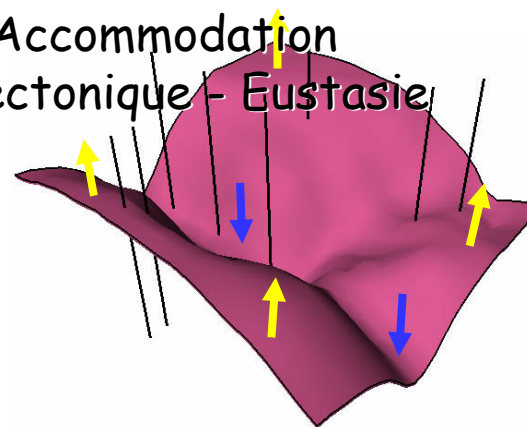
Socle

Principes de la modélisation stratigraphique

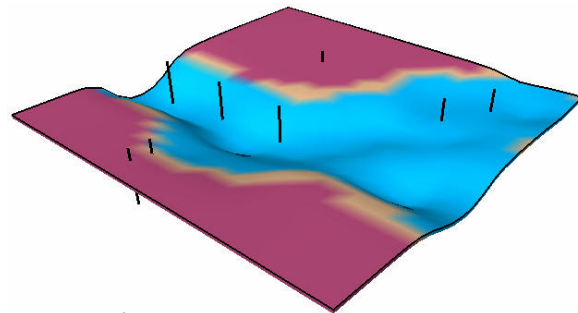


Socle

(1) Accommodation
= Tectonique - Eustasie

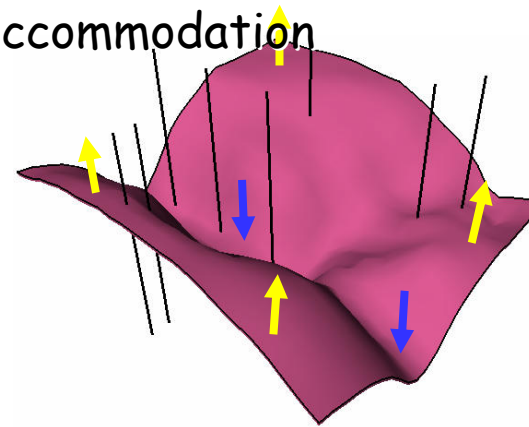


Principes de la modélisation stratigraphique

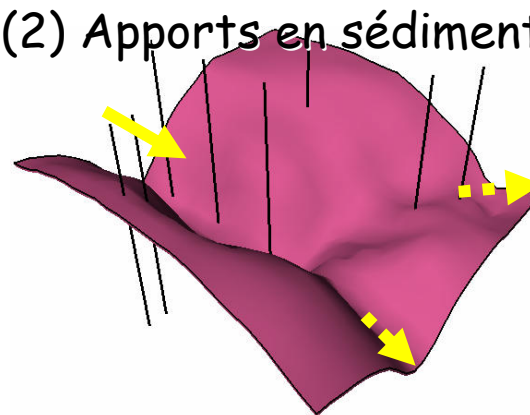


Socle

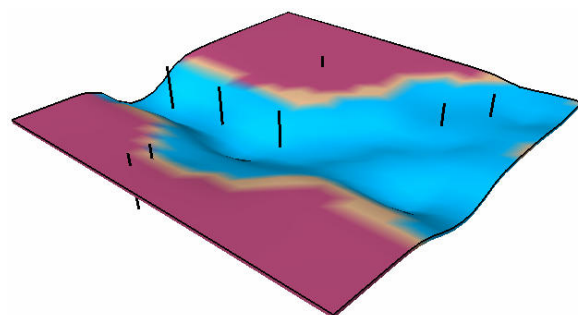
(1) Accommodation



(2) Apports en sédiments

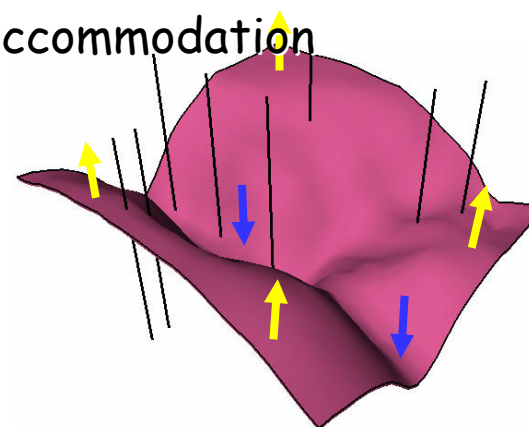


Principes de la modélisation stratigraphique

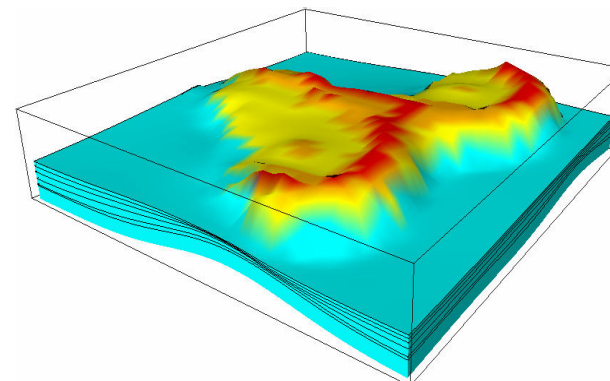


Socle

(1) Accommodation

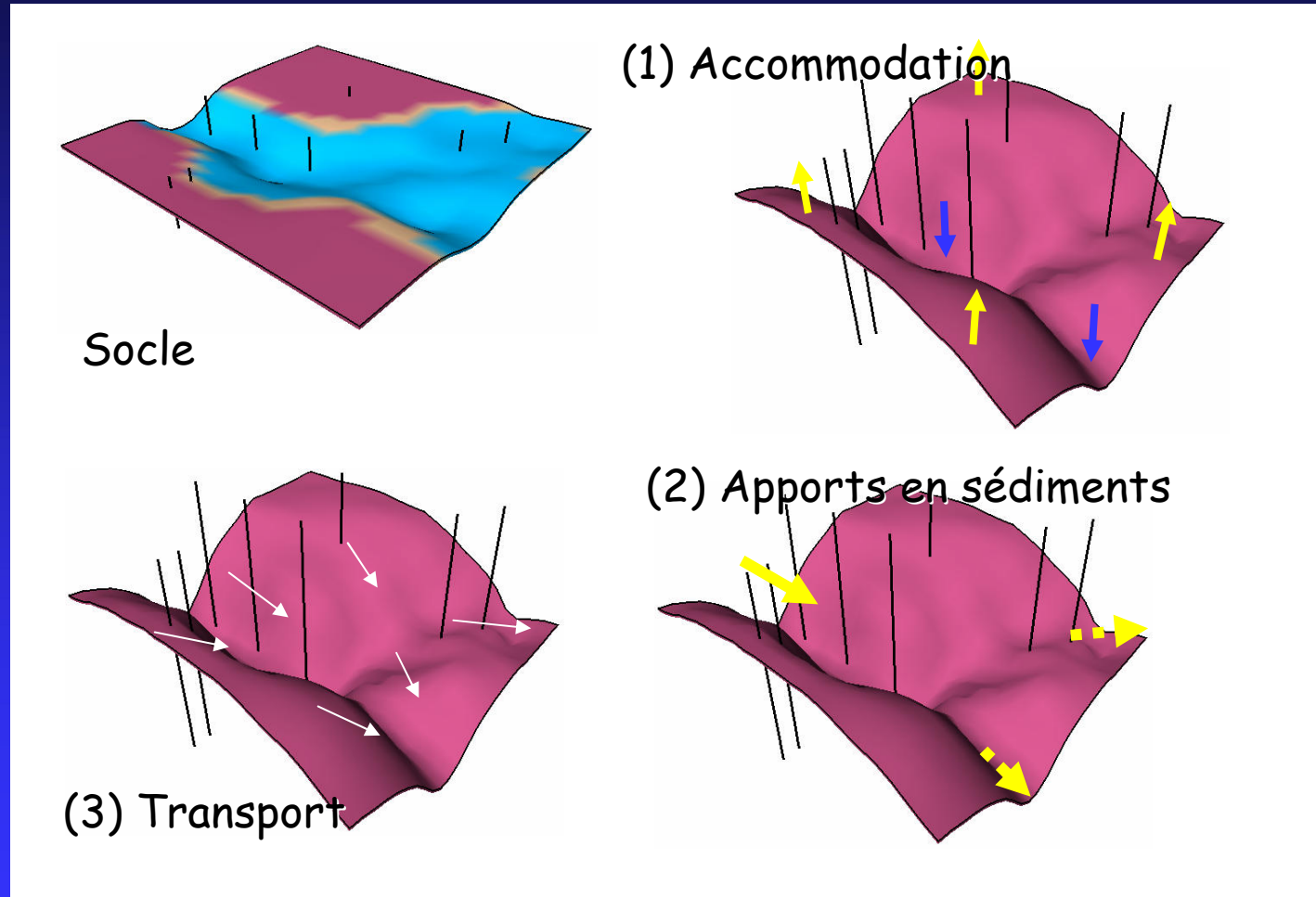


Ex: croissance de coraux

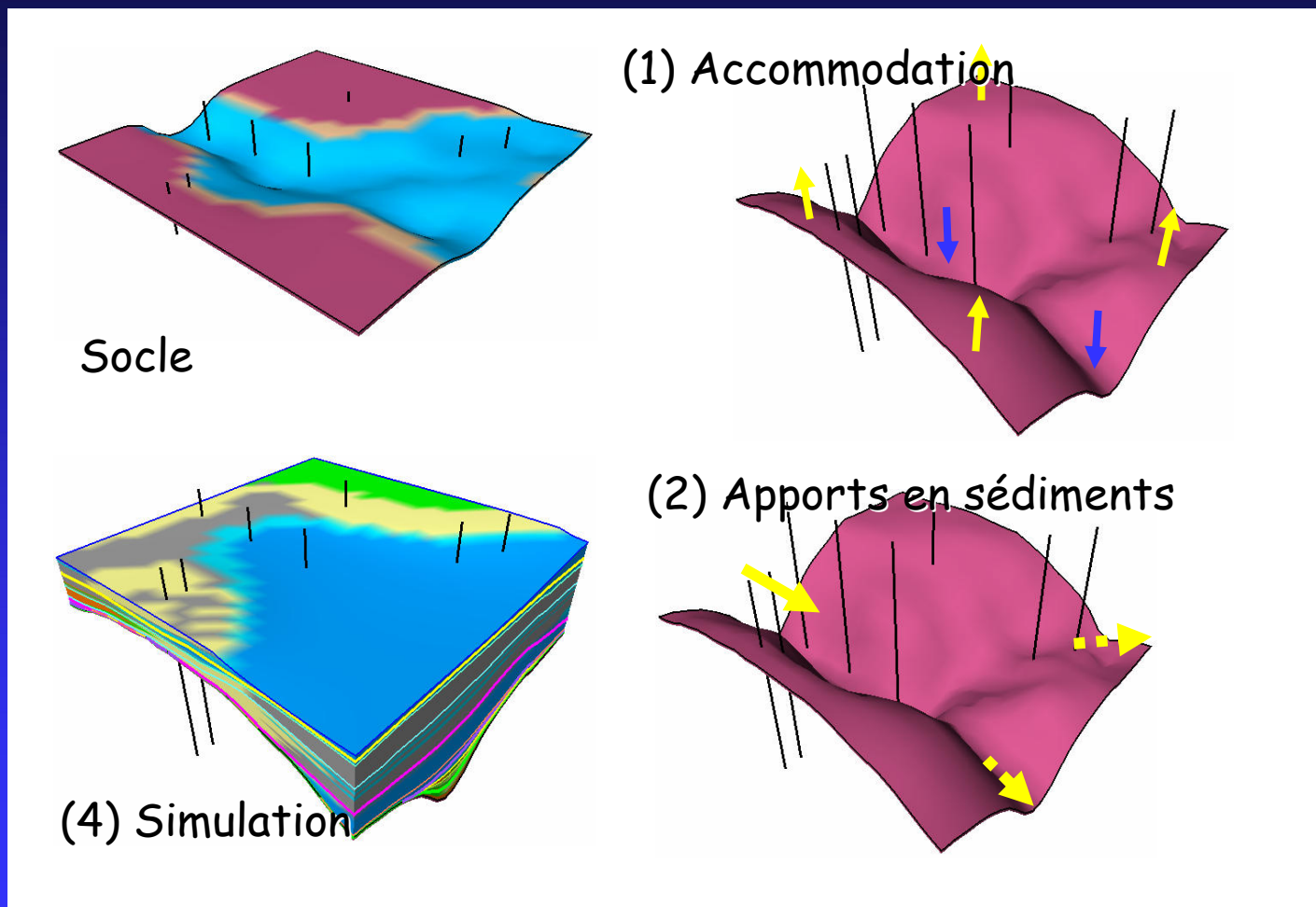


-> Bathymétrie, vagues, écosystème, ...

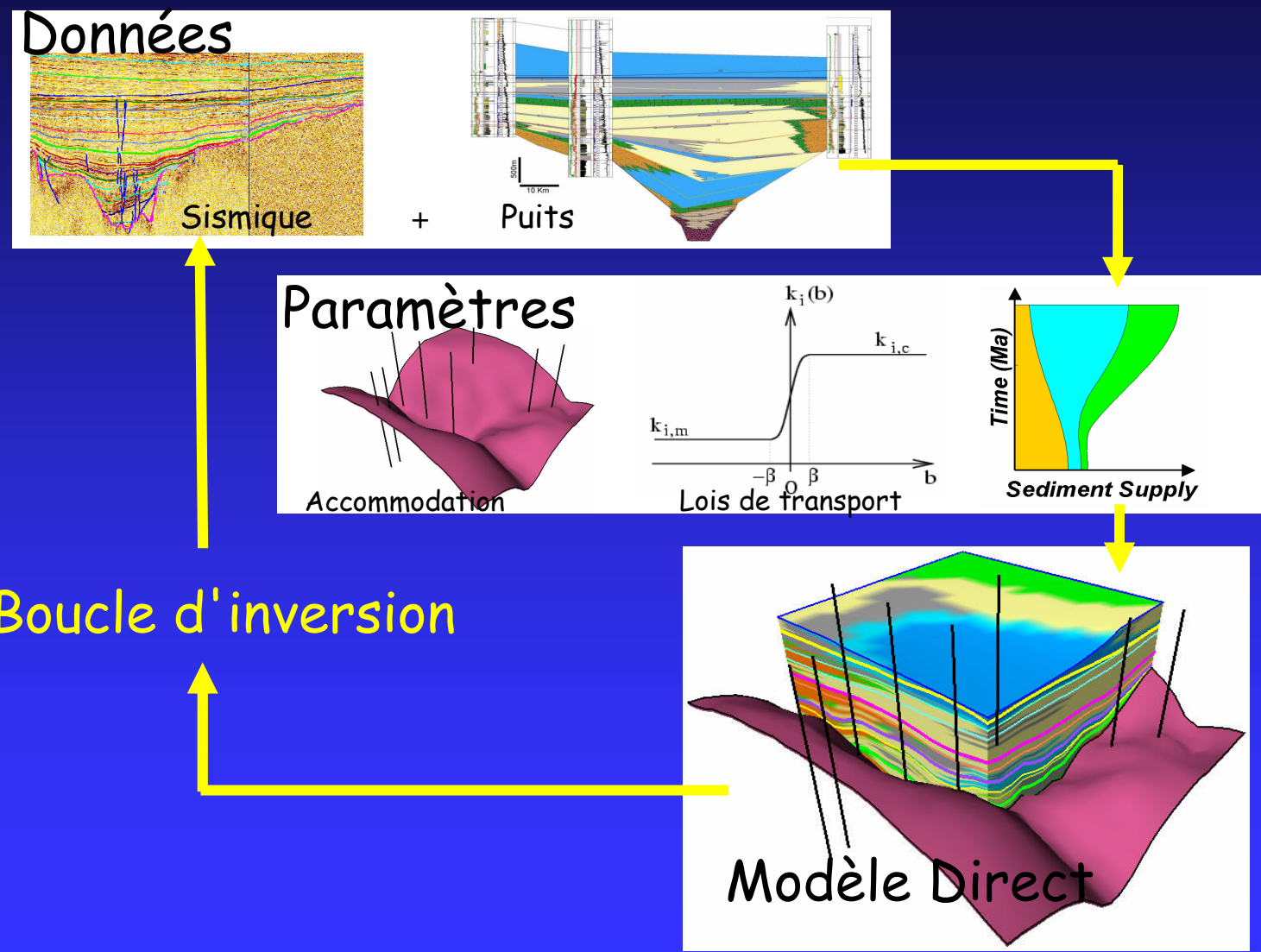
Principes de la modélisation stratigraphique



Principes de la modélisation stratigraphique



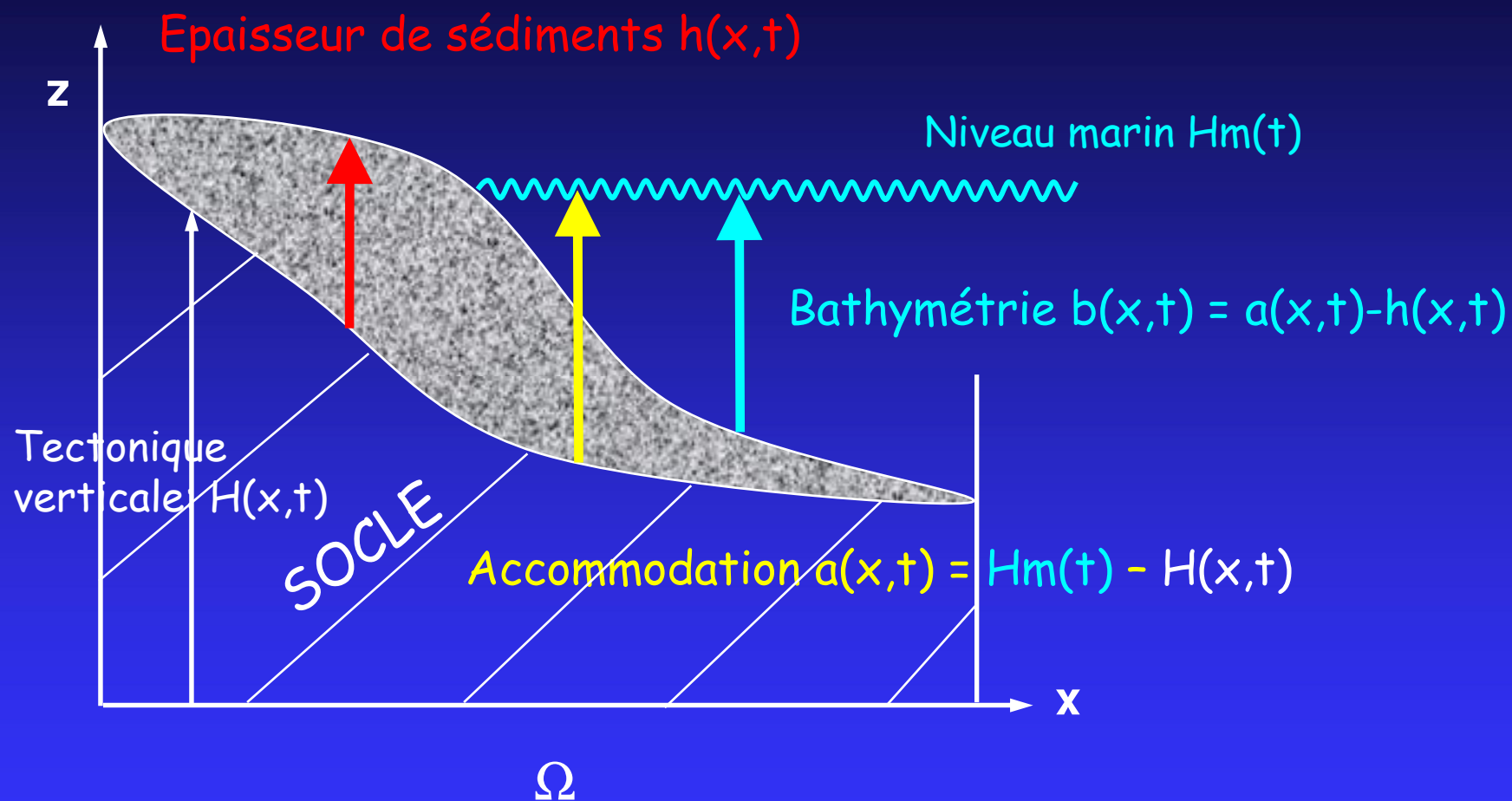
Intégration des données



Modélisation

- Modèles aux grandes échelles de temps et d'espace
- Contributions
 - Formalisation mathématique du modèle multi-lithologique introduit par Rivenaes 92, D. Granjeon 95
 - Formalisation mathématique du modèle sous contrainte de taux d'érosion maximum introduit par D. Granjeon 95

Géométrie du bassin



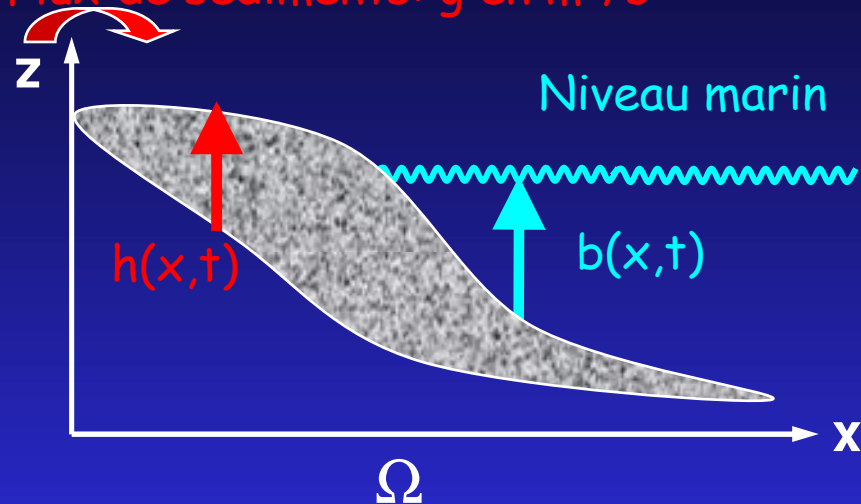
- Données: a et h^0 ou b^0
- Inconnue: h ou b

Modèle diffusif mono-lithologique



($\phi = 1$)

Flux de sédiments: g en m^2/s



Loi de transport:

$$q_s = k(b) \nabla b \quad (m^2/s)$$


$$k(b) = \begin{cases} k_m & \text{si } b > 0 \\ k_c & \text{si } b < 0 \end{cases}$$

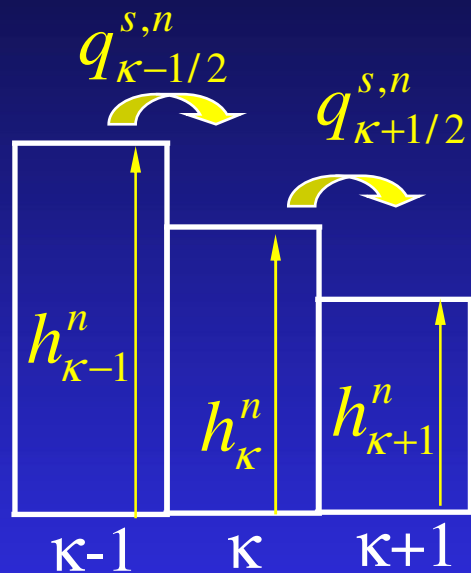
Loi de conservation de l'épaisseur h de sédiments

Etant donnés k , g , b^0 , a , trouver h tel que

$$\begin{aligned} \partial_t h + \operatorname{div}(k(b) \nabla b) &= 0 && \text{sur } \Omega \times (0, T), \\ k(b) \nabla b \cdot n_x &= g && \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \\ b|_{t=0} &= b^0 && \text{sur } \Omega, \\ b &= a - h && \text{sur } \Omega \times (0, T), \end{aligned}$$

Disponibilité limitée en sédiments transportables par érosion

$$\Rightarrow \partial_t h \geq -E$$




$$|\kappa| \frac{h_{\kappa}^{n+1} - h_{\kappa}^n}{\Delta t} + q_{\kappa+1/2}^{s,n} + q_{\kappa-1/2}^{s,n} = 0$$

$$h_{\kappa}^{n+1} - h_{\kappa}^n \geq -E\Delta t$$

$$q_{\kappa+1/2}^{s,n} = \min \left[k_{\kappa+1/2}^n \frac{h_{\kappa}^n - h_{\kappa+1}^n}{\Delta x}, E|\kappa| - q_{\kappa-1/2}^{s,n} \right]$$

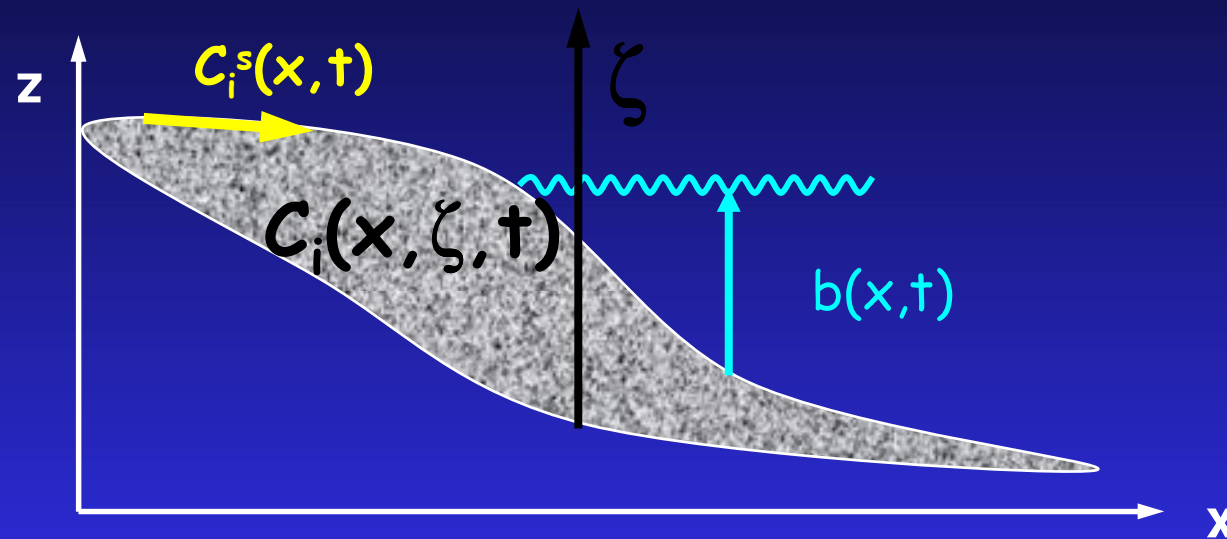
- Limiteur de flux: λ

- Contraintes de complémentarité

$$\partial_t h + \operatorname{div}(\lambda k(b) \nabla b) = 0 \text{ sur } \Omega \times (0, T).$$

$$\begin{cases} (1 - \lambda)(\partial_t h + E) = 0, \\ (1 - \lambda) \geq 0, \text{ sur } \Omega \times (0, T), \\ (\partial_t h + E) \geq 0, \end{cases}$$

Modèle diffusif multi-lithologique



Sédiments = mélange
de L lithologies

$$c_i \geq 0$$

$$\sum_{j=1}^L c_j = 1$$

Loi de transport: $q_{i,s} = k_i(b) C_i^s \lambda \nabla b$

Modèle diffusif multi-lithologique



- Conservation de

$$h_i(x, t) = \int_0^{h(x, t)} c_i(x, \zeta, t) dz,$$

$$\begin{cases} \partial_t h_i + \operatorname{div} q_{i, s} = 0 & \text{sur } \Omega \times (0, T) \text{ pour tout } i = 1, \dots, L, \\ \sum_{i=1}^L c_i^s = 1 & \text{sur } \Omega \times (0, T), \end{cases}$$

- Conservation des c_i (pas de compaction):

$$\begin{cases} \partial_t c_i = 0 & \text{sur } \{(x, \zeta, t), x \in \Omega, t \in (0, T), -\infty < \zeta < h(x, t)\}, \\ c_i|_{\zeta=h} = c_i^s & \text{sur } \{(x, t) \in \Omega \times (0, T) / \partial_t h(x, t) > 0\}, \\ c_i|_{t=0} = c_i^0 & \text{sur } \{(x, \zeta), x \in \Omega, -\infty < \zeta < h^0(x)\}, \end{cases}$$

Réécriture du système

Terme
d'accumulation

$$\partial_t \left(\int_0^{h(x,t)} c_i(x, \zeta, t) d\zeta \right) = c_i(x, h(x, t), t) \partial_t h(x, t)$$

Changement de
coordonnées

$$(x, \xi, t) \in \Omega \times (0, +\infty) \times (0, T) \quad \xi = h(x, t) - \zeta$$

$$\begin{cases} \partial_t u_i + \partial_\xi (u_i \partial_t h) & = 0 \quad \text{sur } \Omega \times (0, +\infty) \times (0, T) \\ u_i|_{\xi=0} & = c_i^s \quad \text{sur } \{(x, t) \in \Omega \times (0, T) \mid \partial_t h(x, t) > 0\}, \\ u_i|_{t=0} & = u_i^0 \quad \text{sur } \Omega \times (0, +\infty). \end{cases}$$

Modèle multi-lithologique $E = \infty$

$$u_i|_{\xi=0} \partial_t h + \operatorname{div} \left(c_i^s k_i(b) \nabla b \right) = 0, \quad \text{sur } \Omega \times (0, T)$$

$$\sum_{i=1}^L c_i^s = 1 \quad \text{sur } \Omega \times (0, T)$$

$$h|_{t=0} = h^0 \quad \text{sur } \Omega,$$

$$c_i^s k_i(b) \nabla b \cdot \mathbf{n} = \mu_i g \quad \text{sur } \{(x, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \mid g(x, t) < 0\},$$

$$\sum_{i=1}^L c_i^s k_i(b) \nabla b \cdot \mathbf{n} = g \quad \text{sur } \{(x, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \mid g(x, t) \geq 0\}$$

$$\partial_t u_i + \partial_\xi \left(u_i \partial_t h \right) = 0 \quad \text{sur } \Omega \times (0, +\infty) \times (0, T),$$

$$u_i|_{\xi=0} = c_i^s \quad \text{sur } \{(x, t) \in \Omega \times (0, T) \mid \partial_t h(x, t) > 0\},$$

$$u_i|_{t=0} = u_i^0 \quad \text{sur } \Omega \times (0, +\infty).$$

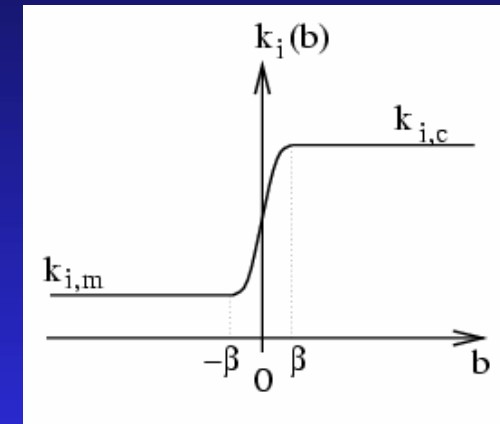
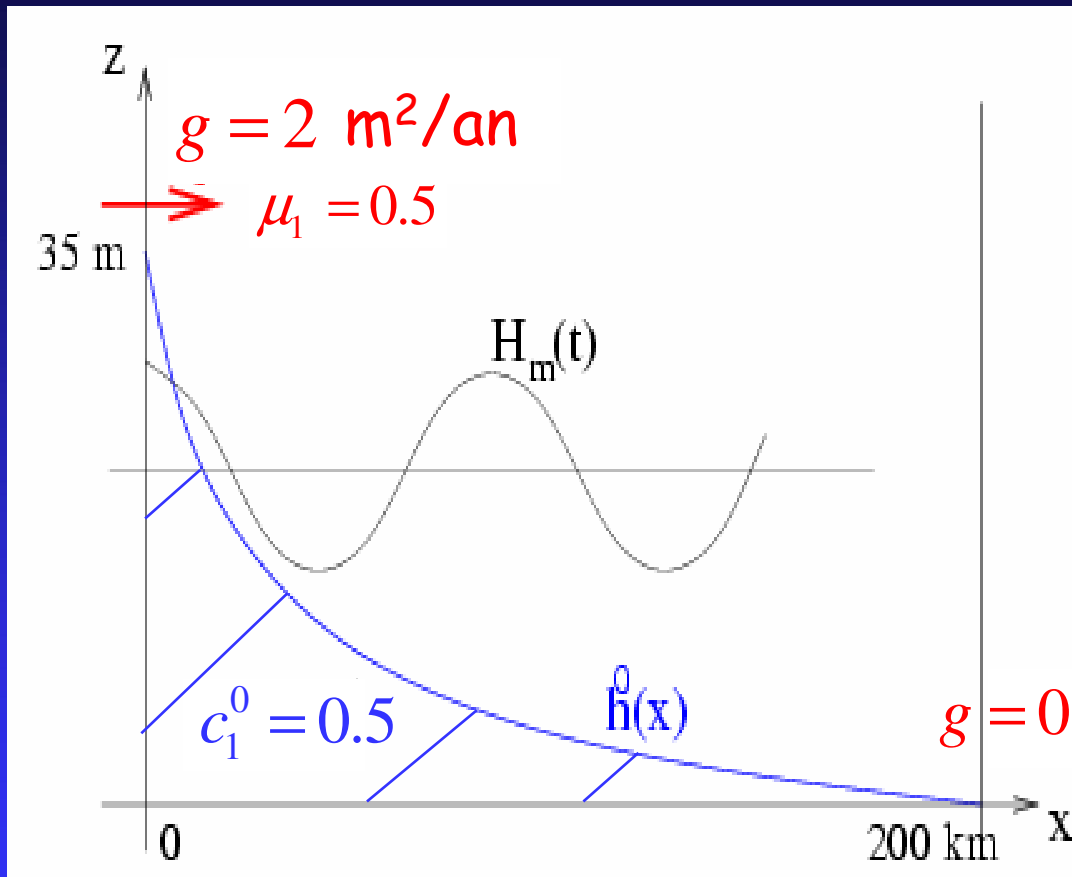
Condition sortante pour le modèle sous contrainte



$$\left\{ \begin{array}{l} \left(\sum_{i=1}^L c_i^s k_i(b) \nabla b \cdot \mathbf{n} - g \right) \left(\partial_t h - E \right) = 0, \\ \sum_{i=1}^L c_i^s k_i(b) \nabla b \cdot \mathbf{n} \leq g, \\ \partial_t h \geq -E, \end{array} \right.$$

sur $\{(x, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \mid g(x, t) \geq 0\}$

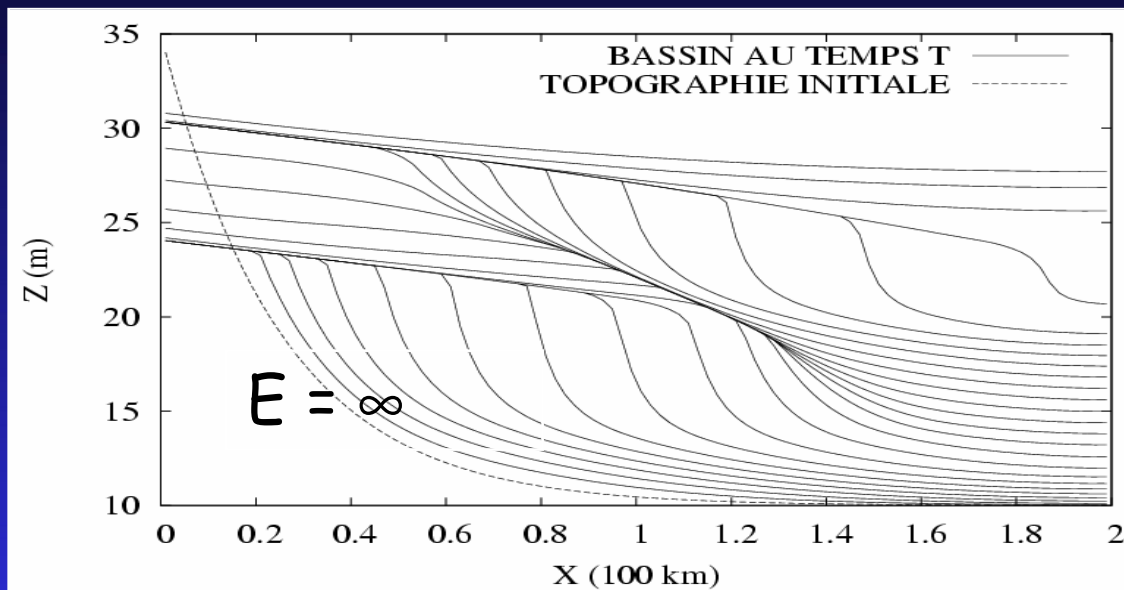
Exemple de progradation d'un Delta



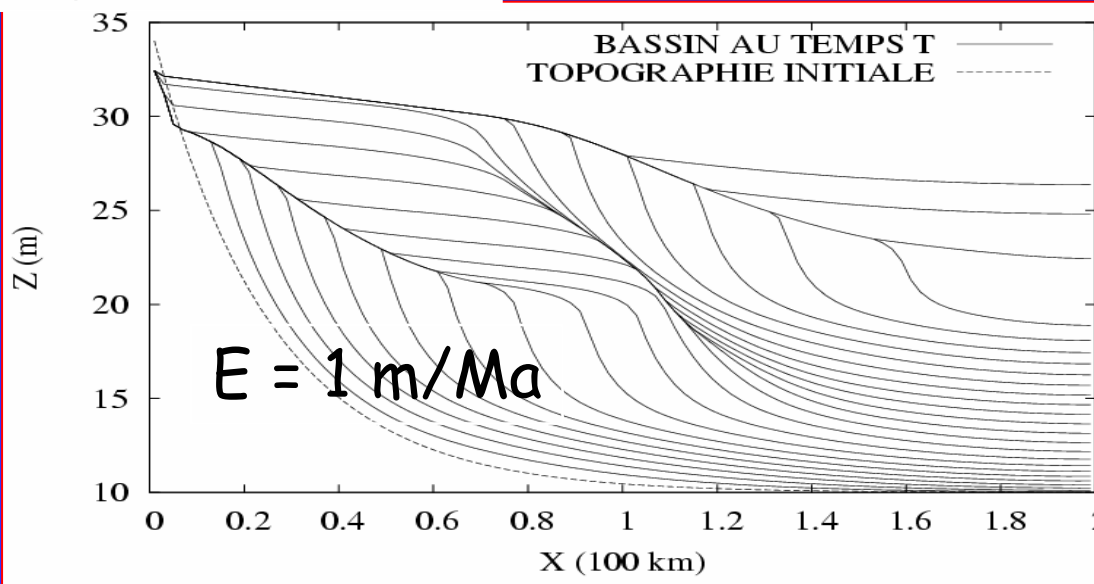
$$k_{1,c} = 10^5, k_{1,m} = 10^4 \text{ m}^2/\text{yr},$$

$$k_{2,c} = 5 \cdot 10^4, k_{2,m} = 10^3 \text{ m}^2/\text{yr}$$

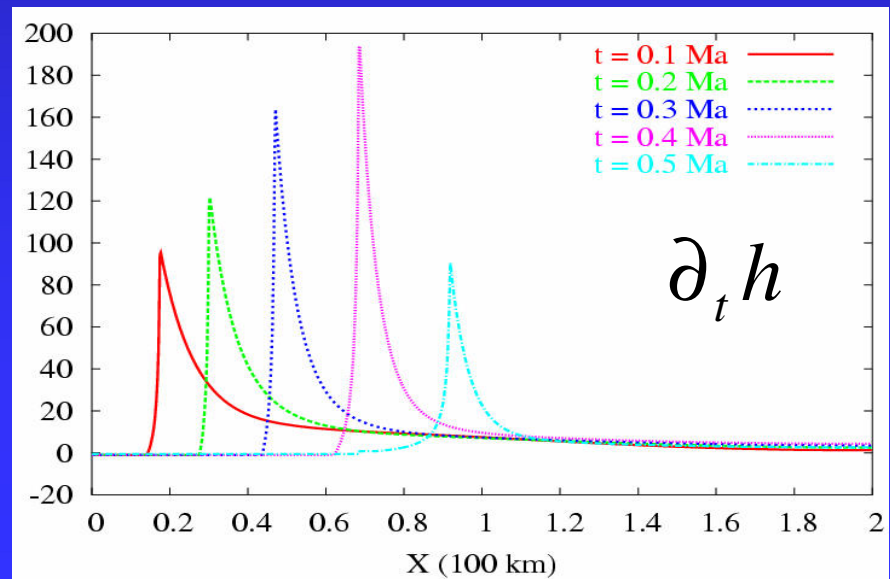
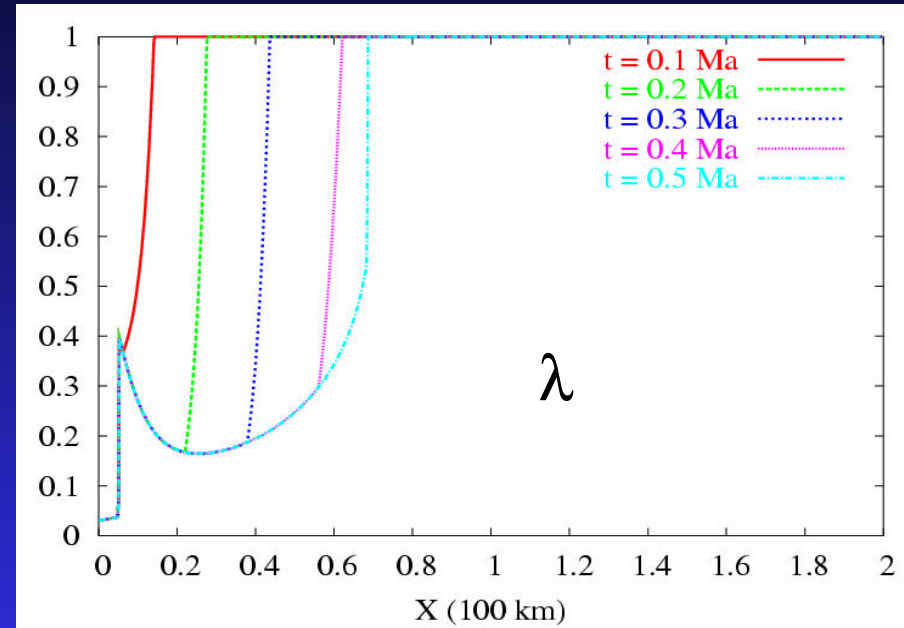
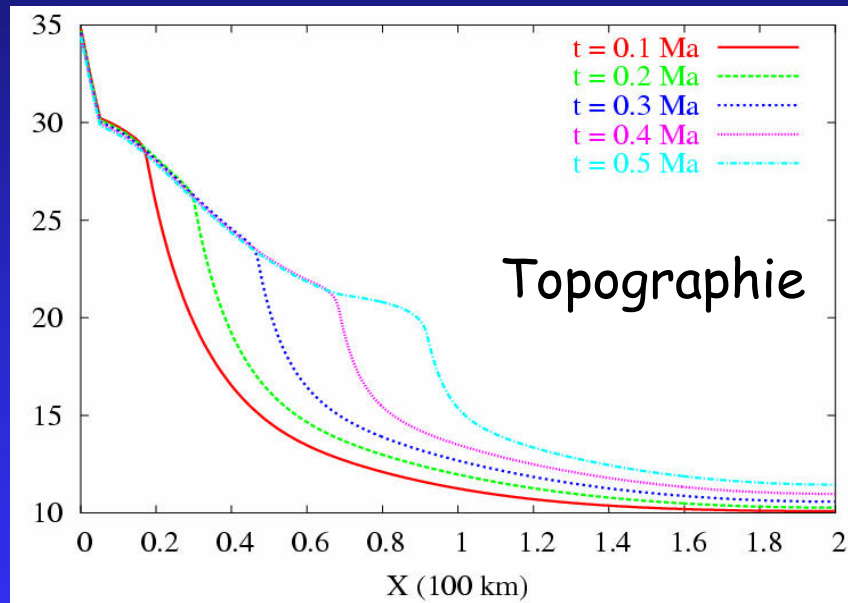
Exemple de progradation rétrogradation d'un Delta



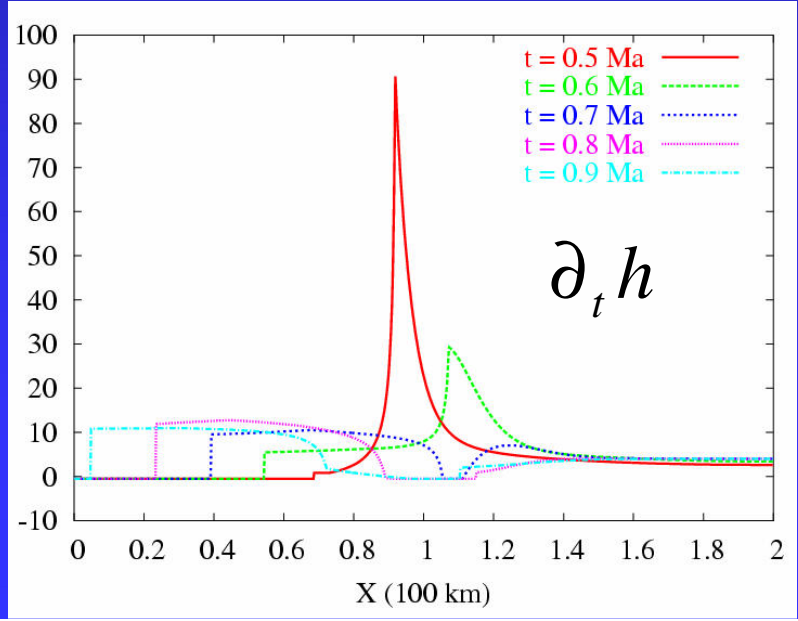
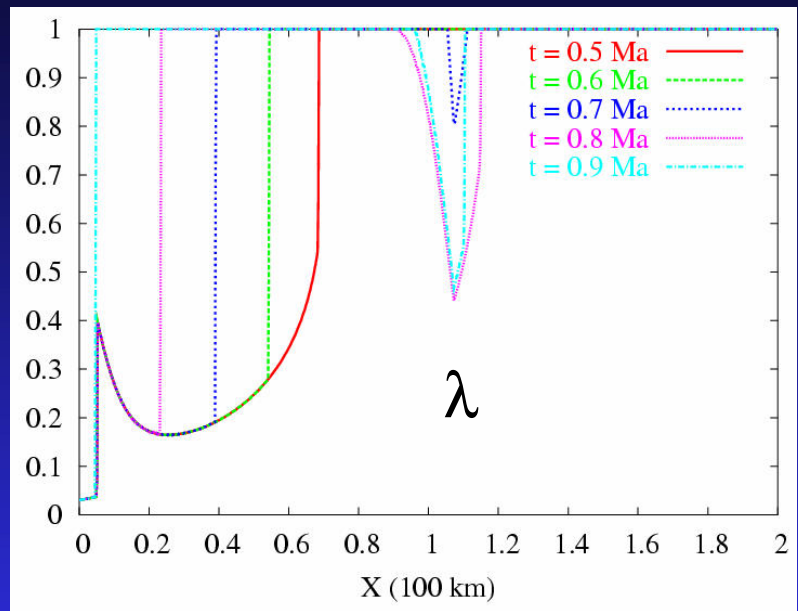
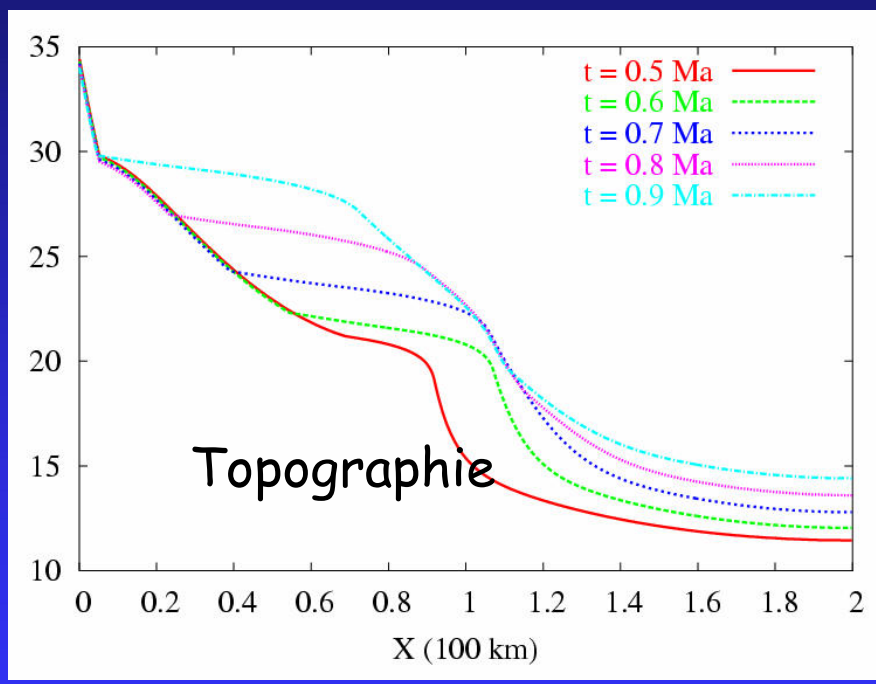
la zone en érosion sous
contrainte suit la ligne de
côte

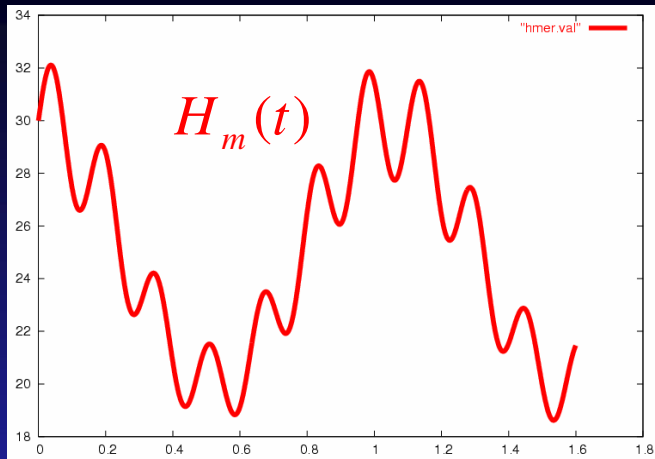


Progradation: H_m décroît

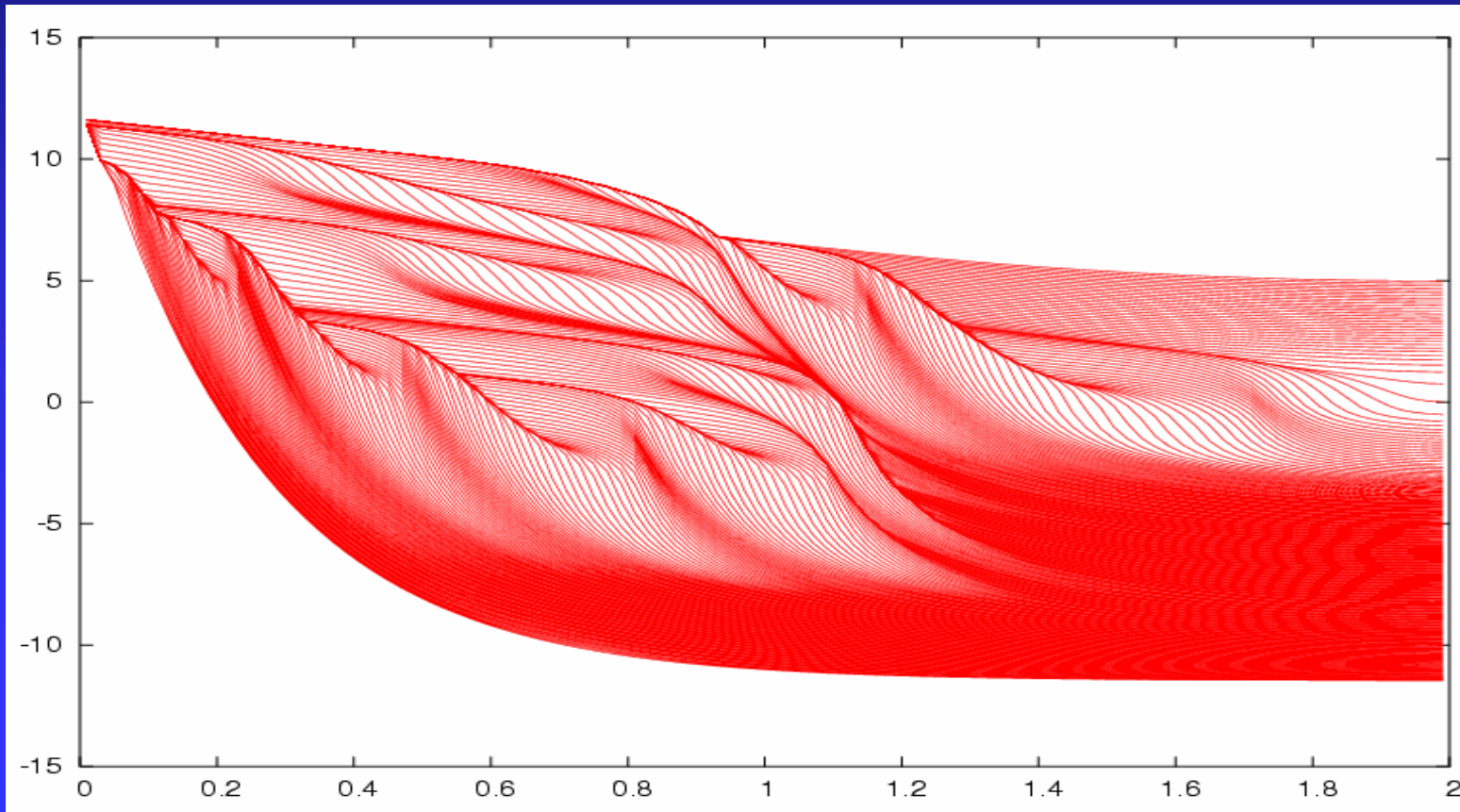


Rétrogradation: H_m croît





Progradation Rétrogradation d'un Delta

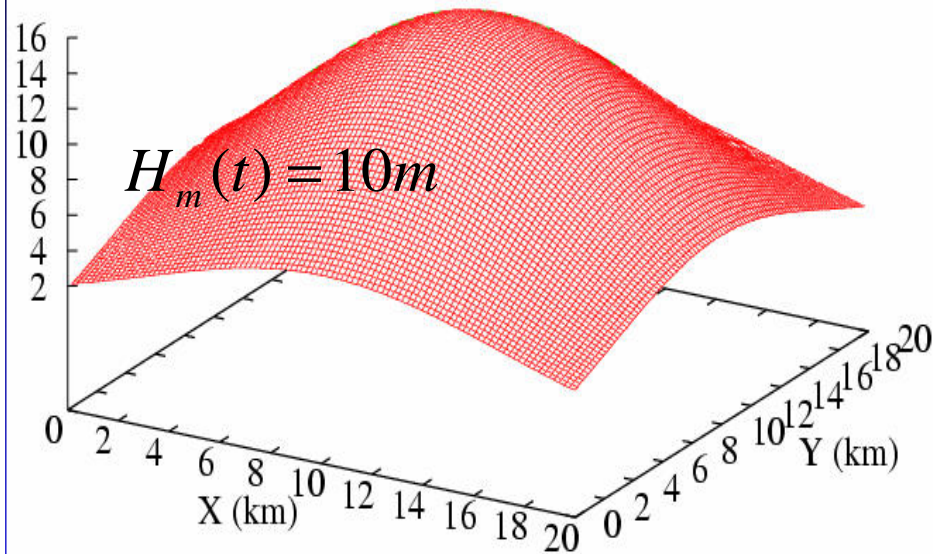


Exemple d'érosion sous contrainte en milieu continental



Z (m)

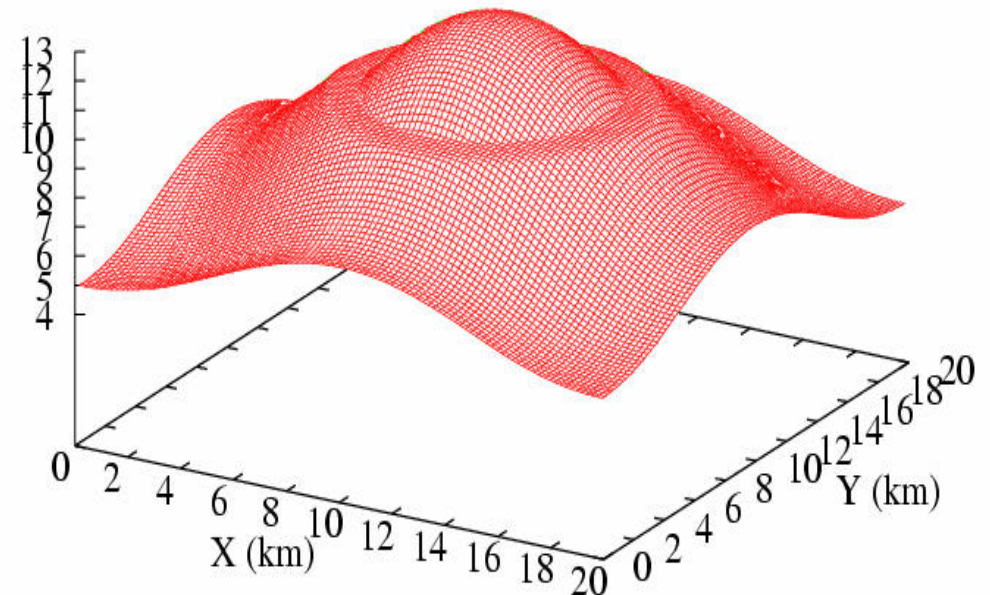
Topographie initiale



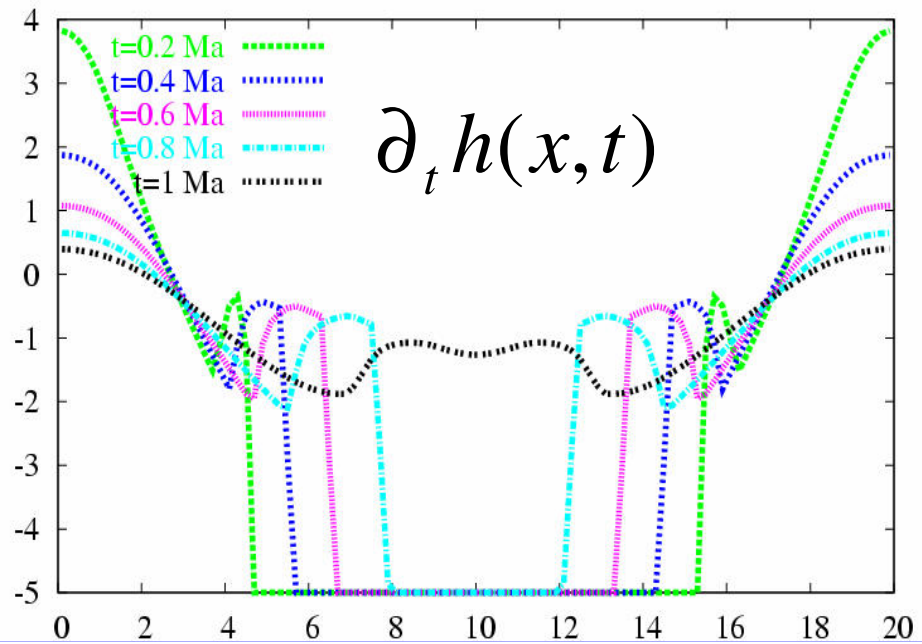
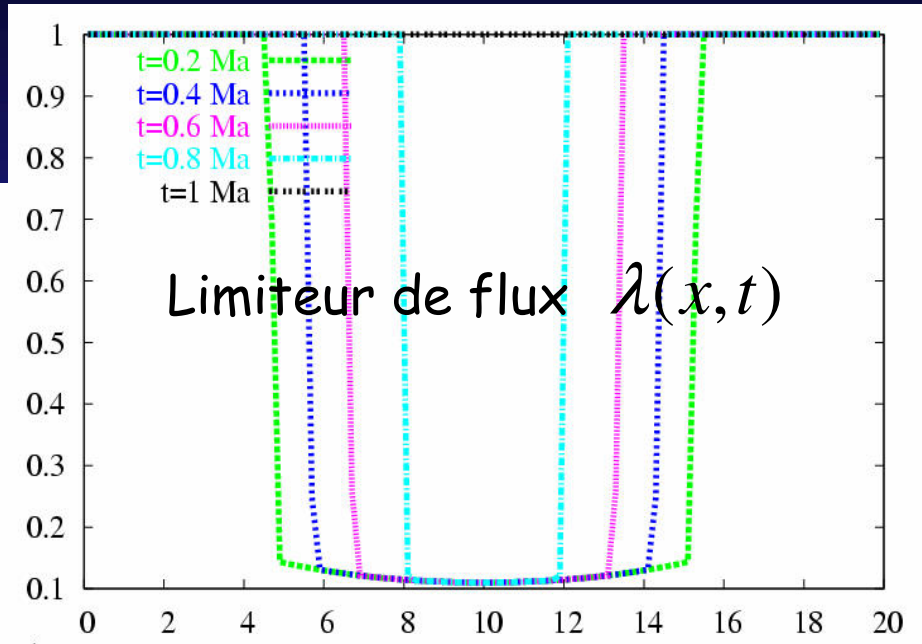
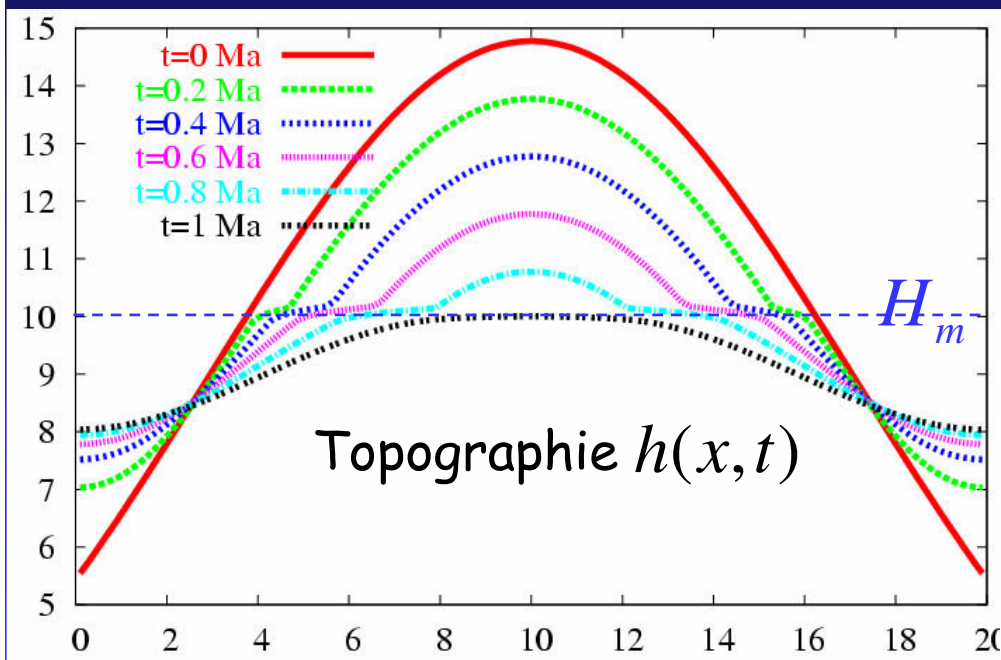
$$\begin{cases} k_{1,c} = 10^4 \text{ m}^2/\text{Ma} & k_{2,c} = 5 \cdot 10^3 \text{ m}^2/\text{Ma} \\ k_{1,m} = 2 \cdot 10^3 \text{ m}^2/\text{Ma} & k_{2,m} = 5 \cdot 10^2 \text{ m}^2/\text{Ma} \end{cases}$$

Z (m)

Topographie à $t = 0.4 \text{ Ma}$

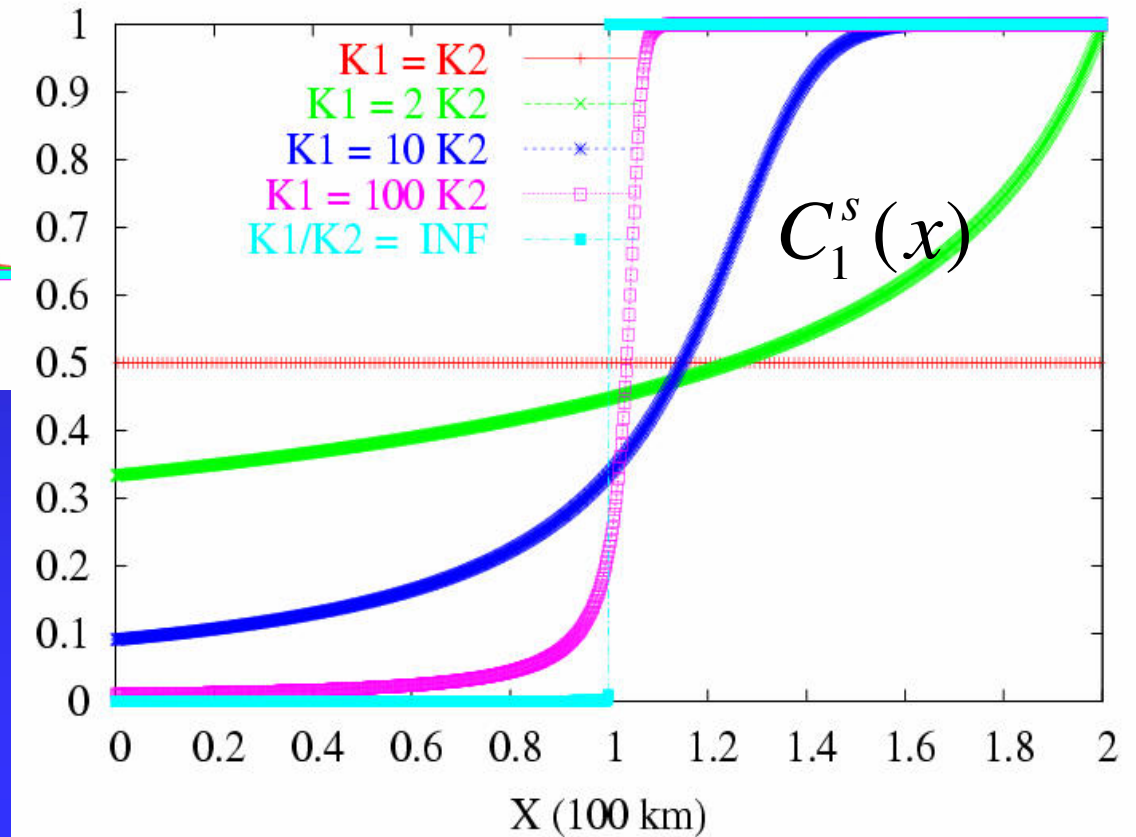
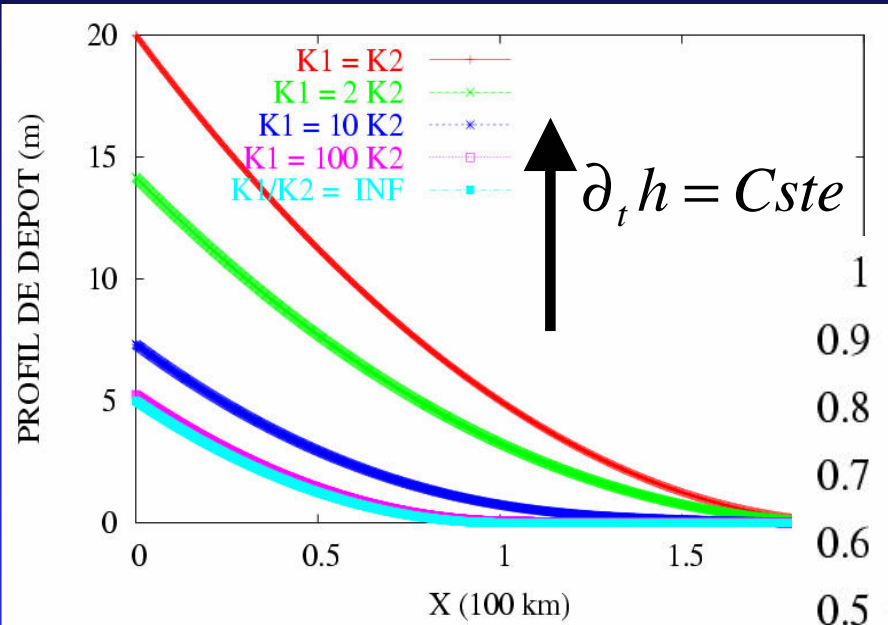


Coupes Y=10 km



Exemple de solutions stationnaires 1D telles que

$$\partial_{t^2} h = 0 \quad \text{et} \quad \partial_t c_i^s = 0$$



Diffusion d'un mélange galets-sable



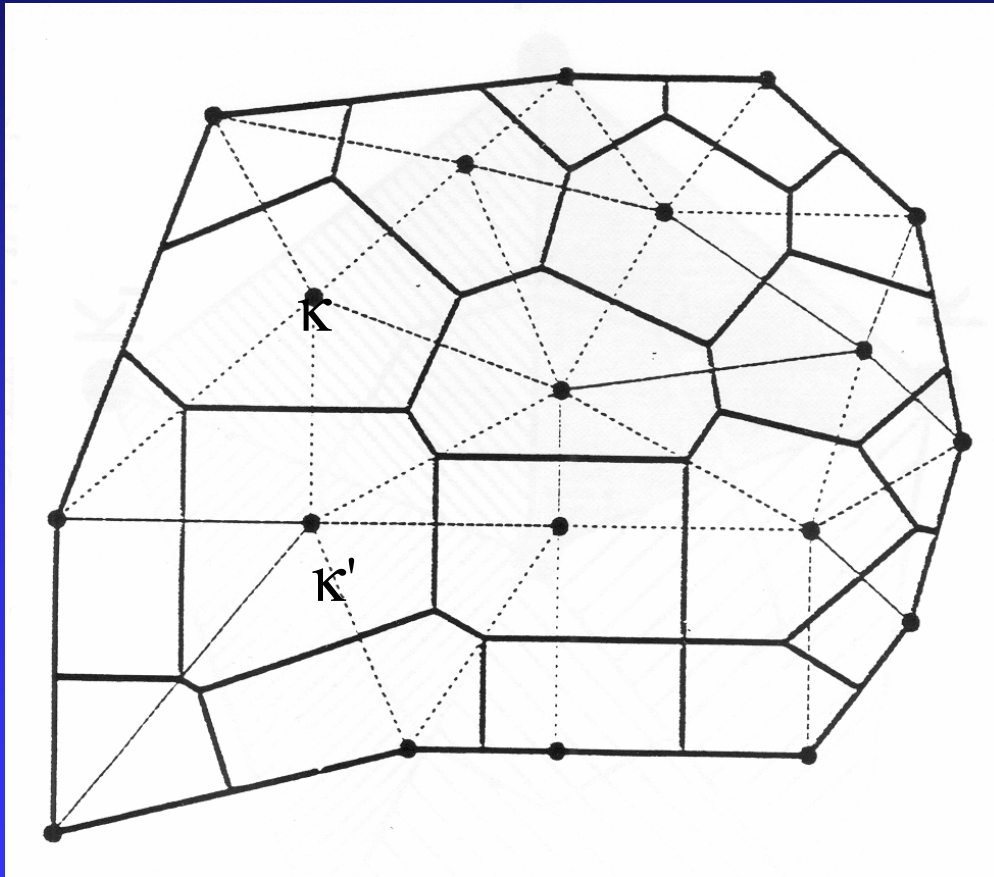
Schémas numériques

- Schéma Volume Fini en espace et Euler implicite en temps
 - *Adapté aux systèmes complexes*
 - *Capte les discontinuités du modèle*
 - *Robuste et efficace en temps calcul*

- *Existence de solutions discrètes stables*
- *Convergence dans un cas simplifié*
- *Couplage avec d'autres physiques*
 - *Compaction (couplage explicite)*
 - *Transport Fluvatile (couplage explicite)*
 - *Production de Carbonates (Prédicteur-correcteur)*

Discrétisation

Maillage admissible K de Ω



Cellules: κ

Centres: x_{κ}

Arêtes: $\kappa\kappa'$

Maillage admissible:

$$(x_{\kappa}, x_{\kappa'}) \perp \kappa\kappa'$$

Mailles voisines de $\kappa = K_{\kappa}$

Discrétisation sur le maillage K

- Schéma volume fini en espace

$$q_{i,\kappa\kappa'}^s \sim \int_{\kappa\kappa'} \lambda c_i^s k_i(b) \nabla b \, d\sigma$$

- Euler implicite en temps
 - Pas de schéma stable explicite en c_i
 - Pas de schéma stable séquentiel implicite en $h - c_i$ et conservatif
 - Schéma séquentiel implicite en $(h, c_i) - \lambda$: contrainte $\partial_t h \geq -E$ approchée

Discretisation sur le maillage \mathcal{K}

- Schéma volume fini en espace

$$q_{i,\kappa\kappa'}^s \sim \int_{\kappa\kappa'} \lambda c_i^s k_i(b) \nabla b \, d\sigma$$

- Euler implicite en temps

$$|\kappa| \Delta h_{i,\kappa}^{n+1} + \Delta t \sum_{\kappa' \in \mathcal{K}_\kappa} q_{i,\kappa\kappa'}^{s,n+1} = 0$$

- Intégration de $k_i(b)$

$$\psi_i(b) = \int_0^b k_i(u) \, du$$

$$k_i(b) \nabla b = \nabla \psi_i(b)$$

- Décentrage amont de c_i et λ

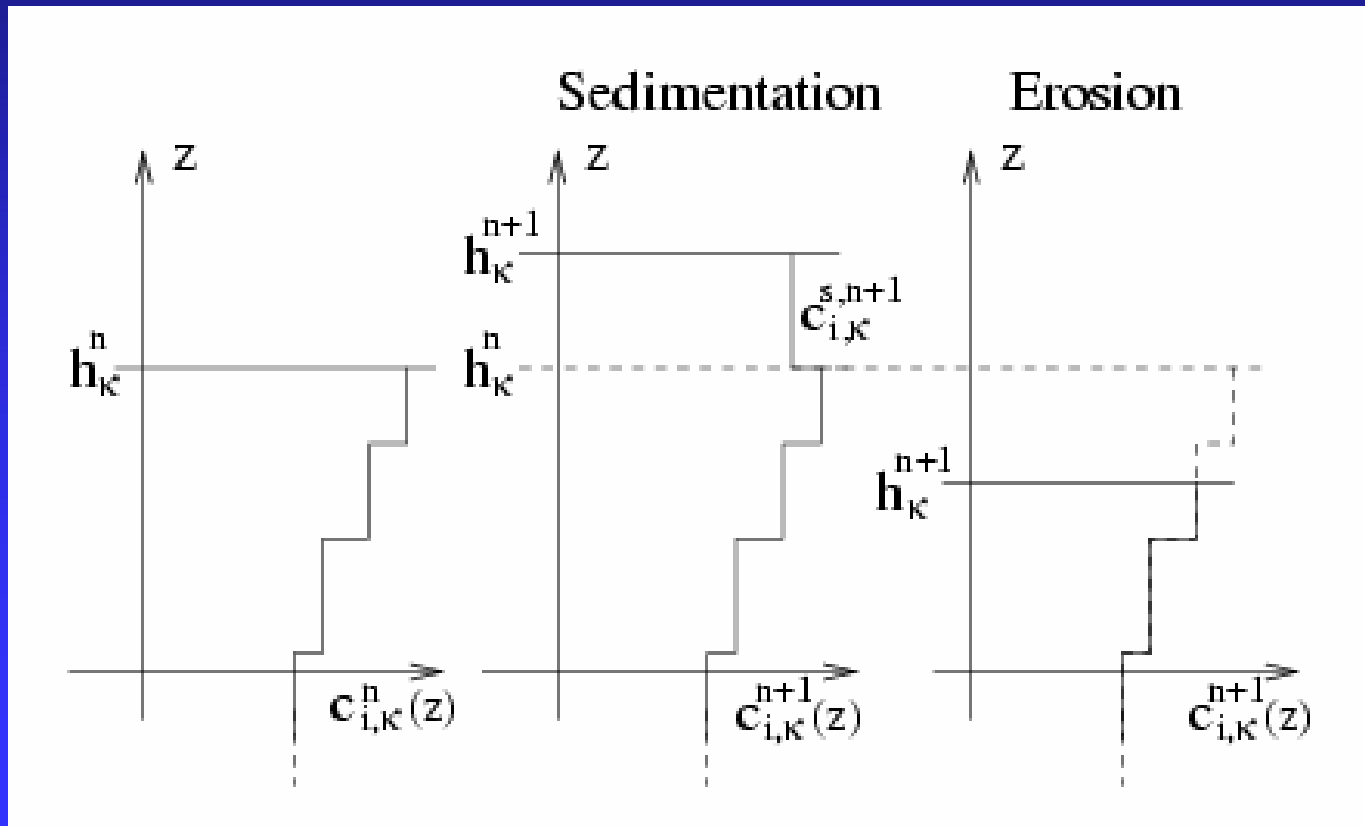
$$q_{i,\kappa\kappa'}^{s,n+1} = \lambda_{\kappa\kappa'}^{n+1} c_{i,\kappa\kappa'}^{s,n+1} |\kappa\kappa'| \frac{\psi_i(b_\kappa^{n+1}) - \psi_i(b_{\kappa'}^{n+1})}{d(\kappa, \kappa')}$$

Discrétisation des colonnes



$$\partial_t c_i = 0$$

$$c_i|_{\zeta=h} = c_i^s, \quad \text{si} \quad \partial_t h(x, t) > 0$$



Discrétisation: terme d'accumulation

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\kappa} \partial_t h_i(x, t) dx dt = \int_{\kappa} \left(\int_0^{h(x, t^{n+1})} c_i(x, \zeta, t^{n+1}) d\zeta - \int_0^{h(x, t^n)} c_i(x, \zeta, t^n) d\zeta \right) dx,$$

$$|\kappa| \Delta h_{i, \kappa}^{n+1} = |\kappa| \left(\int_0^{h_{\kappa}^{n+1}} c_{i, \kappa}^{n+1}(\zeta) d\zeta - \int_0^{h_{\kappa}^n} c_{i, \kappa}^n(\zeta) d\zeta \right),$$

- Sedimentation ($h_{\kappa}^{n+1} > h_{\kappa}^n$) : $\Delta h_{i, \kappa} = c_{i, \kappa}^{s, n+1} (h_{\kappa}^{n+1} - h_{\kappa}^n)$
- Erosion ($h_{\kappa}^{n+1} \leq h_{\kappa}^n$) : $\Delta h_{i, \kappa} = \int_{h_{\kappa}^n}^{h_{\kappa}^{n+1}} c_{i, \kappa}^n(z) dz$

Propriétés de stabilité du schéma

- Existence d'une solution telle que

$$\lambda \geq 0, c_i \in [0, 1]$$

- Flux sortants nuls: toute solution vérifie les estimations précédentes

Modèle découplé pour $k_i(b) = 1$, $E = \infty$

$$\begin{aligned} \partial_t h - \Delta h &= 0 && \text{sur } \Omega \times (0, T), \\ h|_{t=0} &= h^0 && \text{sur } \Omega, \\ -\nabla h \cdot \mathbf{n} &= g && \text{sur } \partial\Omega \times (0, T). \end{aligned}$$

La solution h est supposée dans $C^2(\bar{\Omega} \times [0, T])$.

$$\begin{aligned} u_i|_{\xi=0} \partial_t h + \operatorname{div}(-c_i^s \nabla h) &= 0, && \text{sur } \Omega \times (0, T), \\ c_i^s &= \mu_i && \text{sur } \{(x, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \mid g(x, t) < 0\}, \\ \\ \partial_t u_i + \partial_\xi(u_i \partial_t h) &= 0 && \text{sur } \Omega \times (0, +\infty) \times (0, T), \\ u_i|_{\xi=0} &= c_i^s && \text{sur } \{(x, t) \in \Omega \times (0, T) \mid \partial_t h(x, t) > 0\}, \\ u_i|_{t=0} &= u_i^0 && \text{sur } \Omega \times (0, +\infty). \end{aligned}$$

Preuve de convergence, d'existence et d'unicité



- Existence par convergence faible du schéma

- Définition d'une formulation faible
- Estimation BV faible (Eymard, Gallouët, Herbin 2000)

- Unicité

- Par linéarité et construction d'une solution au système adjoint
- Lemmes d'intégration par partie pour les solutions L^∞ des systèmes directs et adjoints

Solveurs non linéaires et linéaires

- Robustesse du Newton sur des cas réels
- Solveurs par blocs de variables pour les systèmes couplant des variables hyperboliques et paraboliques

Résolution du système non linéaire couplant les $L+2$ inconnues $(h, \lambda, c_i^s, i=1, \dots, L)$ sur le maillage K

$$\left\{ \begin{array}{l} c_i^{\text{top},n+1} \frac{h^{n+1} - h^n}{\Delta t} + \text{div} \left(\lambda^{n+1} k_i(b^{n+1}) q_e^n c_i^{s,n+1} \nabla b^{n+1} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, L \\ \sum_{i=1}^L c_i^{s,n+1} = 1, \\ (1 - \lambda^{n+1})(h^{n+1} - h^n - E\Delta t) = 0, \\ (1 - \lambda^{n+1}) \geq 0, \quad (h^{n+1} - h^n - E\Delta t) \geq 0. \end{array} \right.$$

$$c_i^{\text{top},n+1} = \begin{cases} c_i^{s,n+1} & \text{if } h^{n+1} > h^n \\ \frac{1}{h^{n+1} - h^n} \int_{h^n}^{h^{n+1}} c_i^n(\zeta) d\zeta & \text{if } h^{n+1} < h^n \end{cases}$$

- Système couplant des inconnues de types mixtes hyperboliques (c_i^s, λ) /parabolique (h)
- Dérivées discontinues (contraintes unilatérales, $\psi_i(b), \partial_+ h_i$)

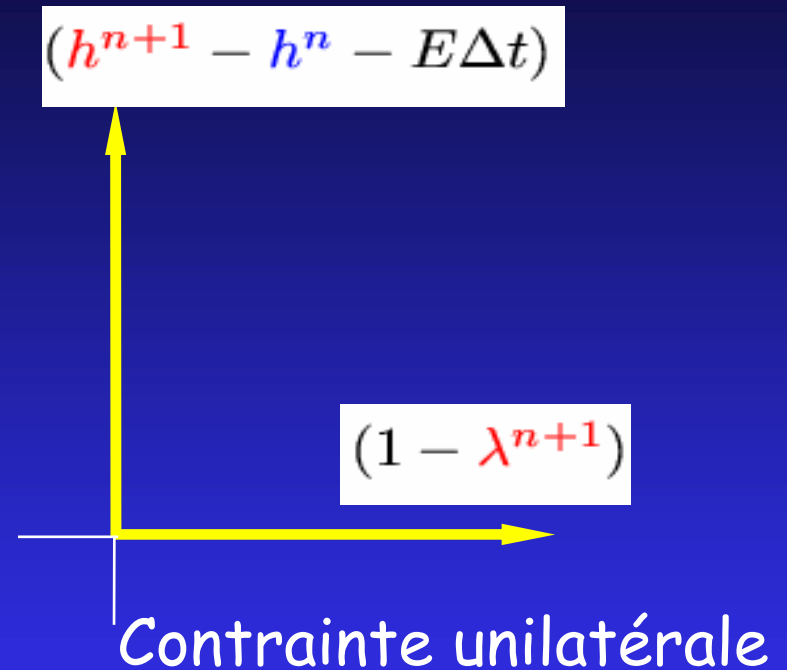
Newton adapté à la contrainte unilatérale

Indice d'activation: $i_{\kappa} \in \{0,1\}$

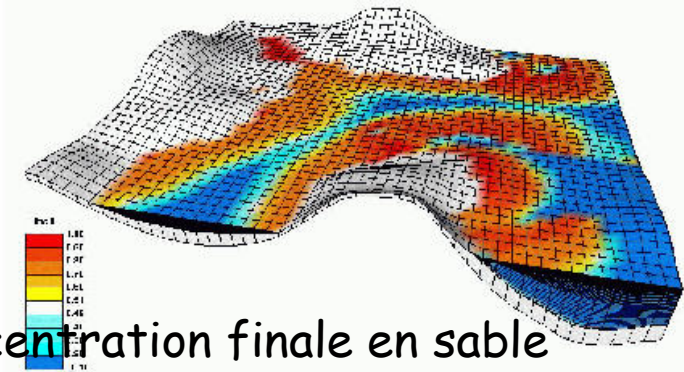
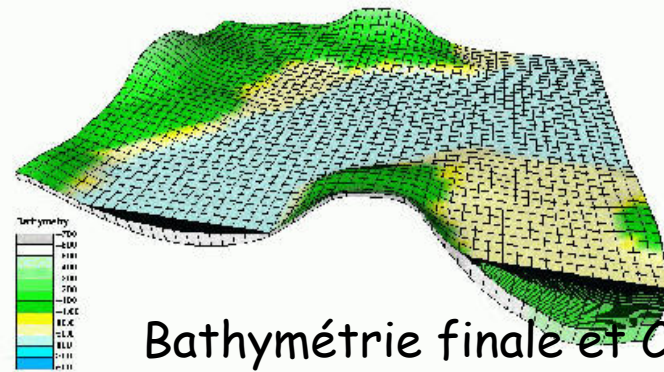
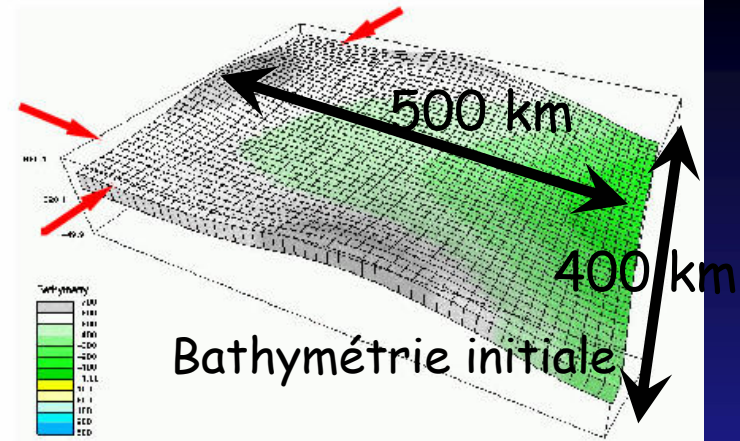
$$\begin{cases} \lambda_{\kappa} = 1 \text{ si } i_{\kappa} = 0, \\ h_{\kappa}^{n+1} = h_{\kappa}^n - E \Delta t \text{ si } i_{\kappa} = 1. \end{cases}$$

Inconnue y :

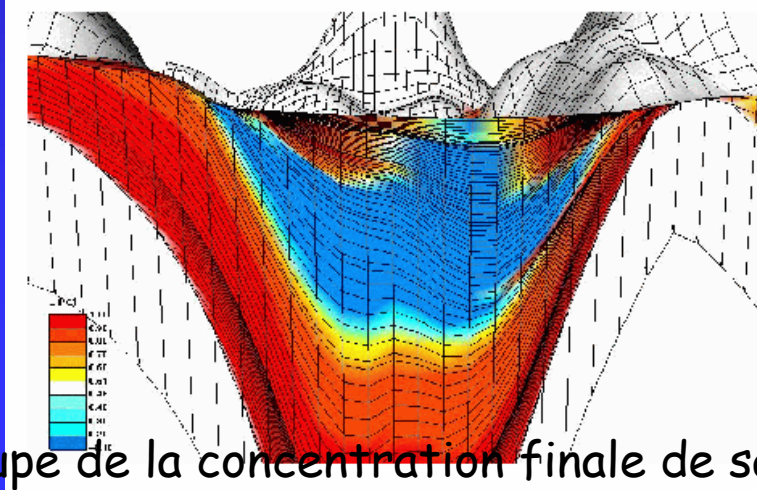
$$y_{\kappa} = \begin{cases} h_{\kappa}^{n+1} \text{ si } i_{\kappa} = 0, \\ \lambda_{\kappa} \text{ si } i_{\kappa} = 1. \end{cases}$$



Bassin de Paris



Bathymétrie finale et Concentration finale en sable



$$K1c = 10^5 \text{ m}^2/\text{ya}$$

$$E = 3 \text{ m/Ma}$$

$$K2c = 2 \cdot 10^6 \text{ m}^2/\text{ya}$$

$$T = 40 \text{ Ma}$$

$$K1m = 10^4 \text{ m}^2/\text{ya}$$

$$dt = 0.1 \text{ Ma}$$

$$K2m = 4 \cdot 10^4 \text{ m}^2/\text{ya}$$

Robustesse du solveur non linéaire

- Lissage adaptatif des coefficients de diffusion
- Initialisation du Newton
- Marche en temps
- Schéma séquentiel implicite pour le limiteur de flux

Exemple du Cas Paris
500x400 km

Lissage

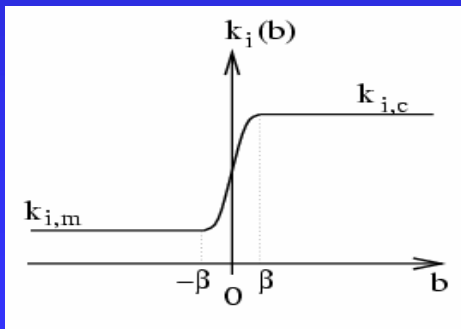


schéma	Δx (km)	$\beta = 5$ m	$\beta = 10$ m	$\beta = 20$ m
implicite couplé	10	5.9	5.3	5.1
	5	9.1	8.1	7.6
	2.5	17.6	16.1	13.9
séquentiel implicite	10	3.6	3.3	3.2
	5	3.75	3.5	3.4
	2.5	3.9	3.6	3.5

Schéma séquentiel implicite

$$c_i^{top,n+1} \frac{h^{n+1} - h^n}{\Delta t} + \operatorname{div} \left(\lambda^n c_i^{s,n+1} k_i(b^{n+1}) \nabla b^{n+1} \right) = 0, \quad i = 1, \dots, L$$

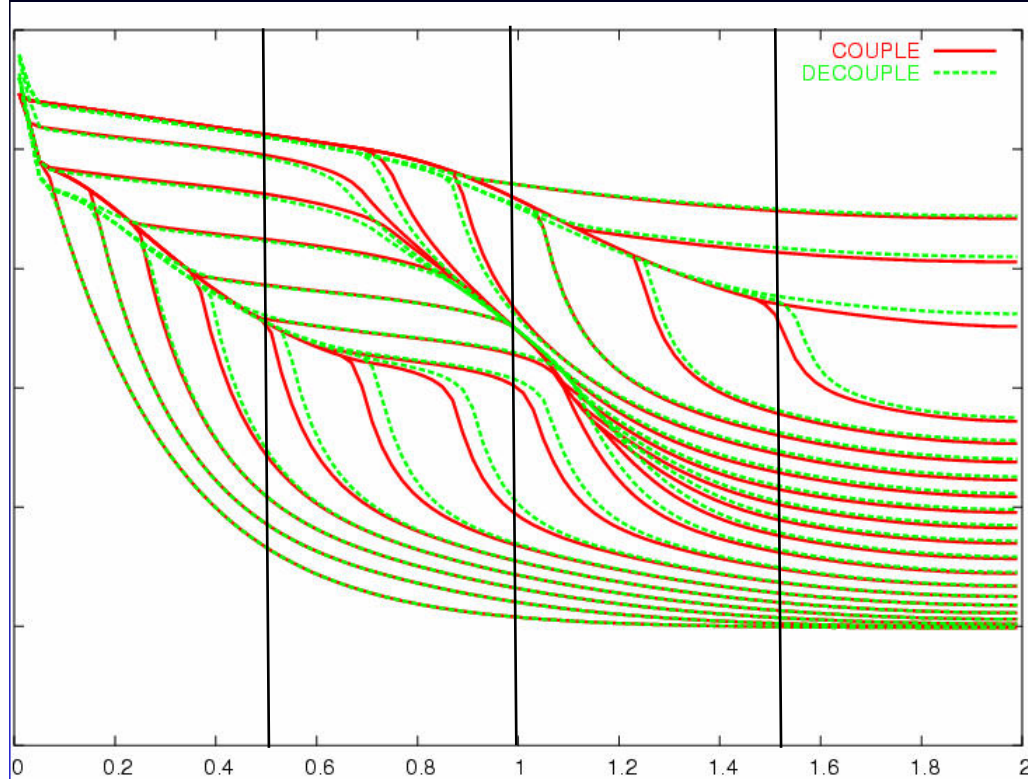
$$\sum_{i=1}^L c_i^{s,n+1} = 1$$

$$\left[1 - \lambda^{n+1} \right] \left[\operatorname{div} \left(\lambda^{n+1} \sum_{j=1}^L c_j^{s,n+1} k_j(b^{n+1}) \nabla b^{n+1} \right) - E \right] = 0,$$

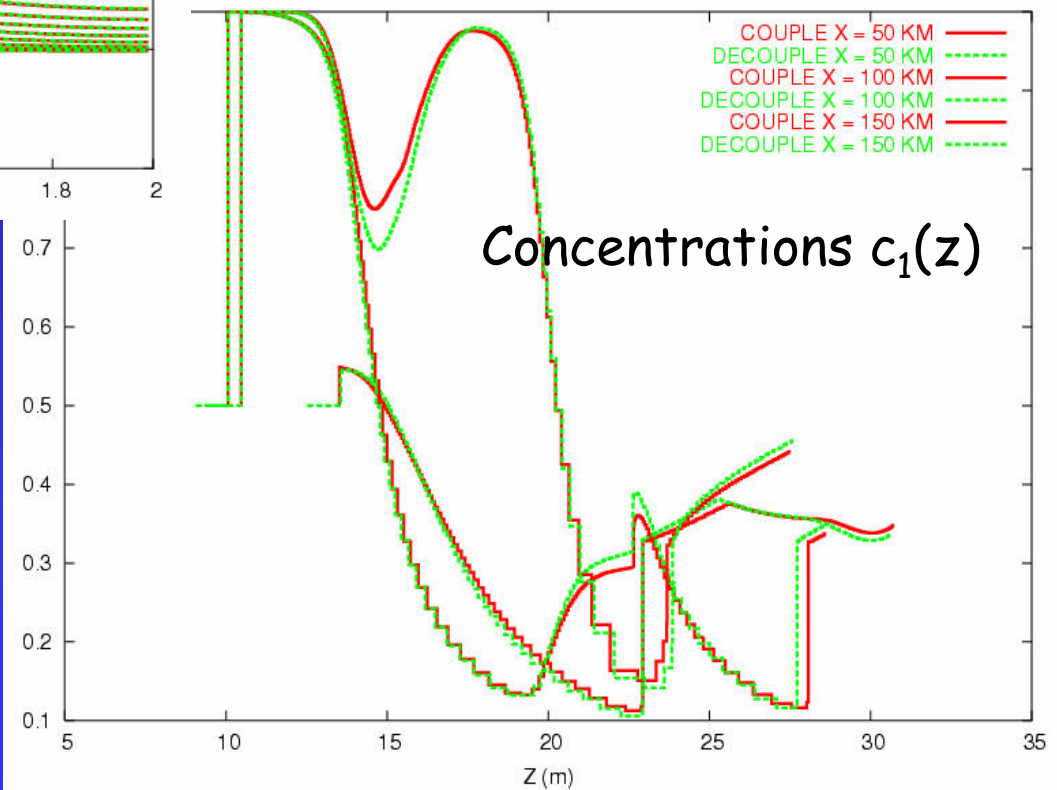
$$\lambda^{n+1} \leq 1,$$

$$\operatorname{div} \left(\lambda^{n+1} \sum_{j=1}^L c_j^{s,n+1} k_j(b^{n+1}) \nabla b^{n+1} \right) \leq E$$

Comparaison des schémas implicite couplé et séquentiel implicite



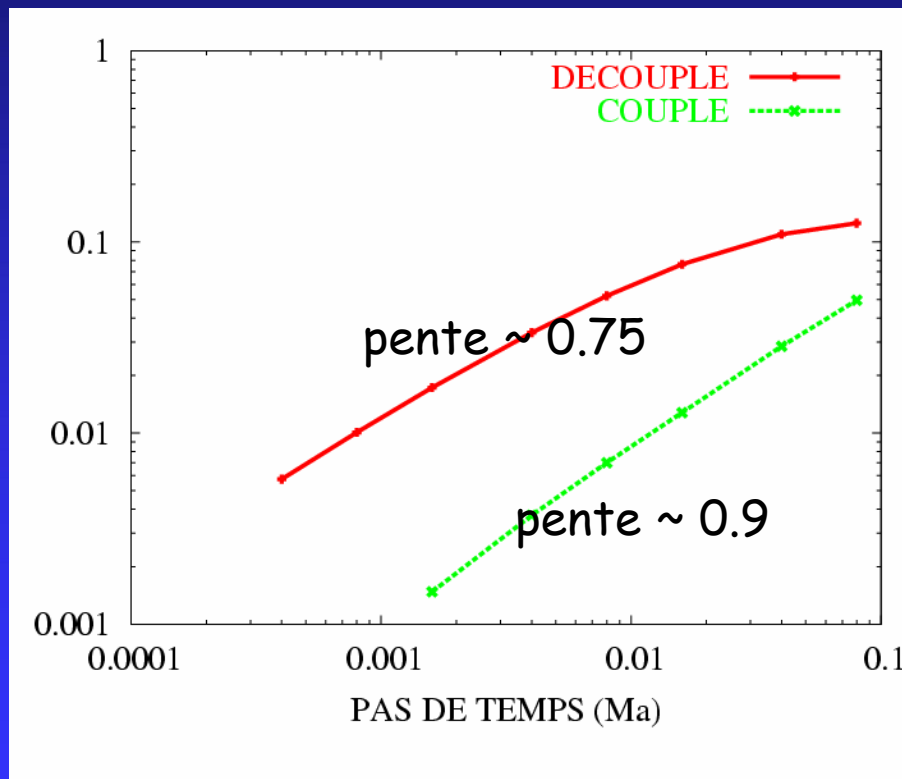
$T = 1,6 \text{ Ma}$, 400 pas de temps



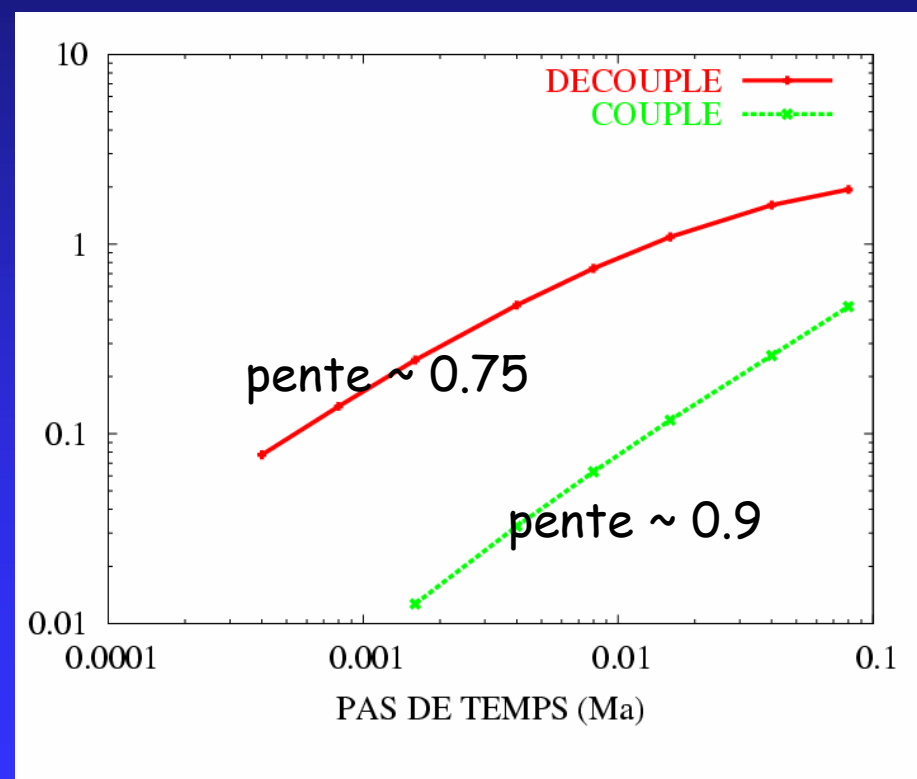
Comparaison implicite / séquentiel implicite

Convergence

Concentration c_1^s



Epaisseur h



Solveurs linéaires



- Élimination de la concentration c_1^s (pour fixer les idées)
- L équations de conservation linéarisées
- L inconnues: $\gamma, c_i^s, i=2, \dots, L$

$$J = \begin{pmatrix} J_{1,y} & -J_{1,1} & \cdots & -J_{1,1} \\ J_{2,y} & J_{2,2} & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ J_{L,y} & 0 & 0 & J_{L,L} \end{pmatrix}$$

$$J_{i,y} = \begin{pmatrix} J_{i,h,h} & J_{i,h,\lambda} \\ J_{i,\lambda,h} & J_{i,\lambda,\lambda} \end{pmatrix}$$

$\sum_{j=1}^L J_{j,h,h}$: convection diffusion

$\sum_{j=1}^L J_{j,\lambda,\lambda}$ et $J_{i,i}$: transport

(1) Découplage: définition d'une bonne équation de mélange par combinaisons linéaires des lignes locales à chaque maille

Combinaison linéaire:

$$g_{\kappa} = \left(1 \quad \alpha_{2,\kappa} \quad \cdots \quad \alpha_{L,\kappa} \right),$$

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} \tilde{J}_{1,y} & \tilde{J}_{1,2} & \cdots & \tilde{J}_{1,L} \\ J_{2,y} & J_{2,2} & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ J_{L,y} & 0 & 0 & J_{L,L} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{J}_{1,y} = \begin{pmatrix} \tilde{J}_{h,h} & \tilde{J}_{h,\lambda} \\ \tilde{J}_{\lambda,h} & \tilde{J}_{\lambda,\lambda} \end{pmatrix}$$

- Réduire le couplage entre les inconnues y et cis dans l'équation 1

- Définir un bloc $\tilde{J}_{h,h}$ de type convection diffusion

(1) Choix du Découplage

$$g_{\kappa} = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_{2,\kappa} & \cdots & \alpha_{L,\kappa} \end{pmatrix}$$

Coefficients α_{ik}

- Strictement positifs
- Bornés inférieurement et supérieurement
- Assurent un "bon" découplage des variables y et cis

-Découplage des termes d'accumulation

$$g_{\kappa} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

-Découplage des flux

$$g_{\kappa} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{k_1(b_{\kappa})}{k_2(b_{\kappa})} & \cdots & \frac{k_1(b_{\kappa})}{k_L(b_{\kappa})} \end{pmatrix}$$

-Découplage de Gauss

$$g_{\kappa} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{[J_{1,1}]_{\kappa,\kappa}}{[J_{2,2}]_{\kappa,\kappa}} & \cdots & \frac{[J_{1,1}]_{\kappa,\kappa}}{[J_{L,L}]_{\kappa,\kappa}} \end{pmatrix}$$

(2) Préconditionnement Gauss Seidel par Blocs



$$\begin{pmatrix} C_{1,y} & 0 & \dots & 0 \\ J_{2,y} & J_{2,2} & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ J_{L,y} & 0 & 0 & J_{L,L} \end{pmatrix}^{-1}$$

- Préconditionnement des blocs $J_{i,j}$:

- Inversion exacte par Gauss Seidel dans l'ordre des topographies décroissantes

- Préconditionnement du bloc

$$\tilde{J}_{1,y}$$

- Solveur direct creux (2D)

- 1 V-cycle d'une méthode multigrille algébrique (AMG)

Préconditionnement AMG du bloc

$$\tilde{J}_{1,y} = \begin{pmatrix} \tilde{J}_{h,h} & \tilde{J}_{h,\lambda} \\ \tilde{J}_{\lambda,h} & \tilde{J}_{\lambda,\lambda} \end{pmatrix}$$

- AMG ne convient pas pour le bloc complet
- Convient au sous bloc $\tilde{J}_{h,h}$ = opérateur de convection diffusion discret

➔ Préconditionnement Gauss Seidel par blocs de variables:

$$C_{1,y}^{-1} = \begin{pmatrix} C_{h,h} & 0 \\ \tilde{J}_{\lambda,h} & \tilde{J}_{\lambda,\lambda} \end{pmatrix}^{-1}$$

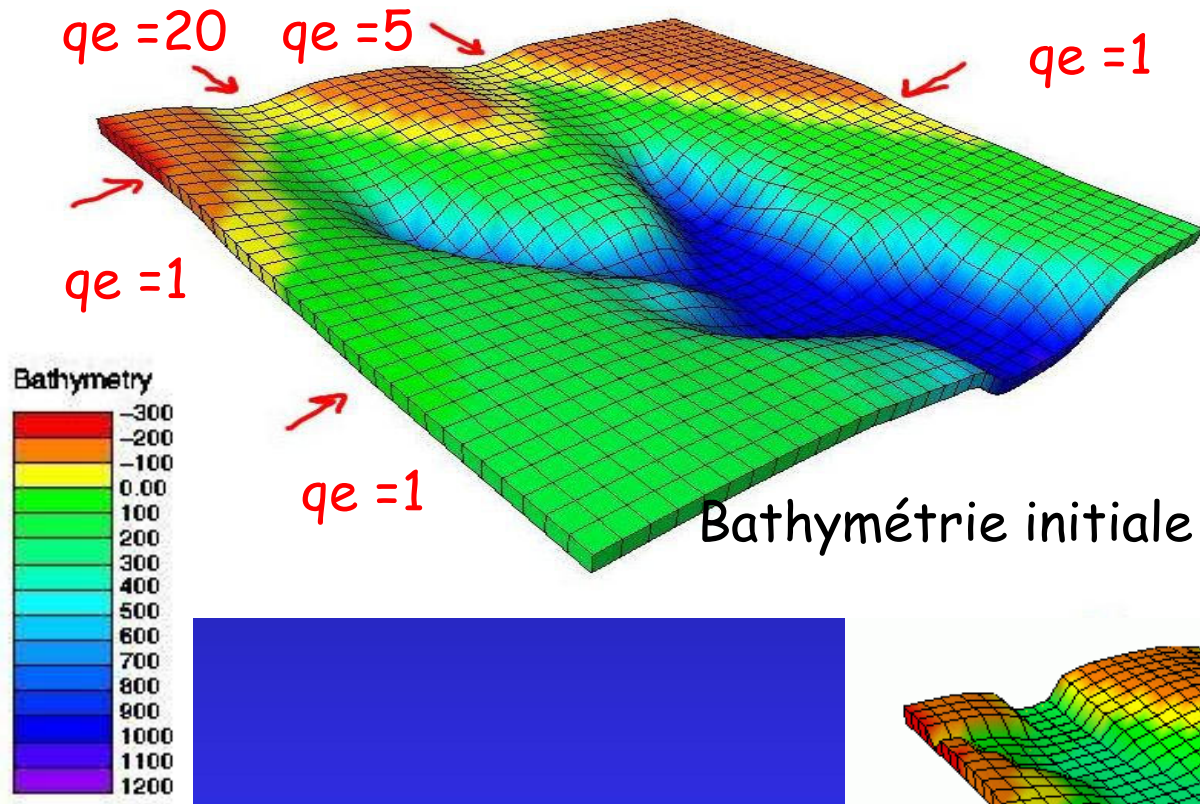
Cas du Bassin RIFT



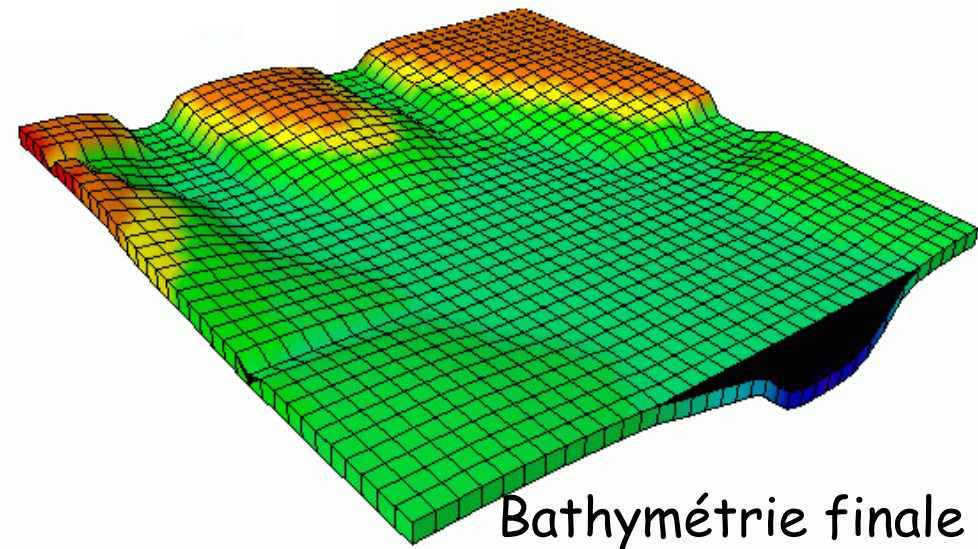
$E = 100 \text{ m/Ma}$

$T = 3 \text{ Ma}$

$dt = 0.03 \text{ Ma}$



Bathymétrie initiale



Bathymétrie finale

Coefficients de diffusion

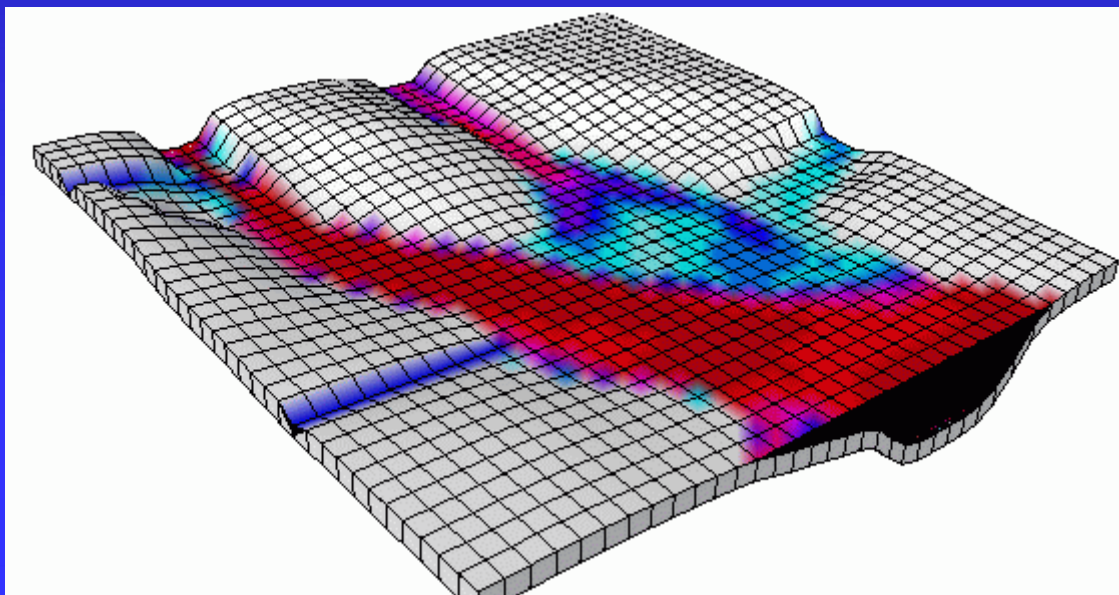
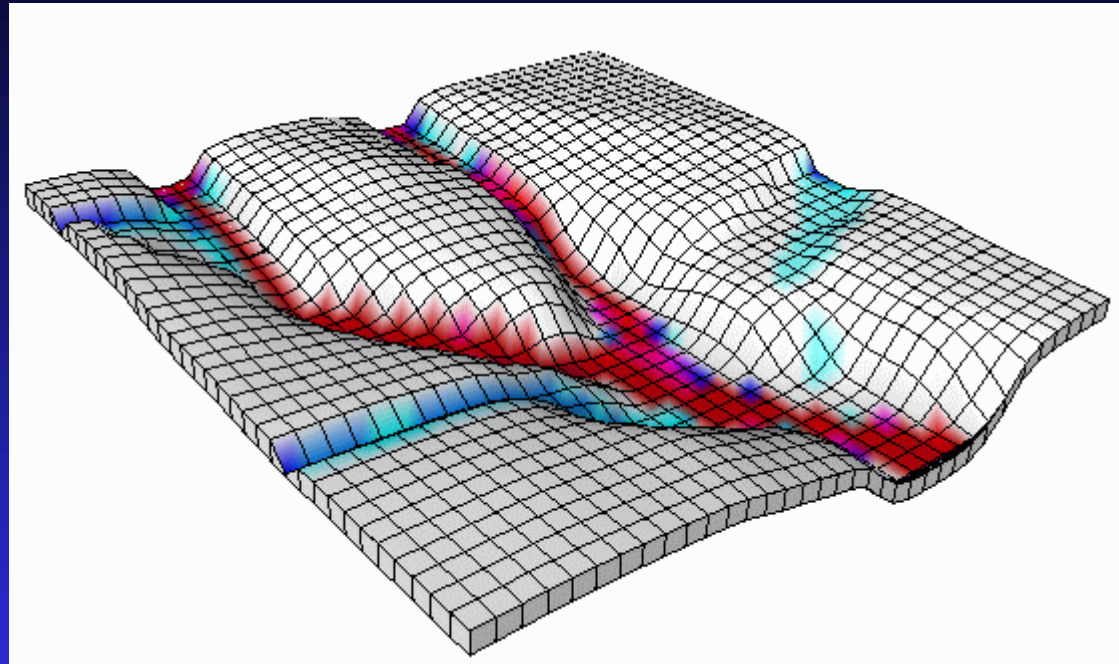
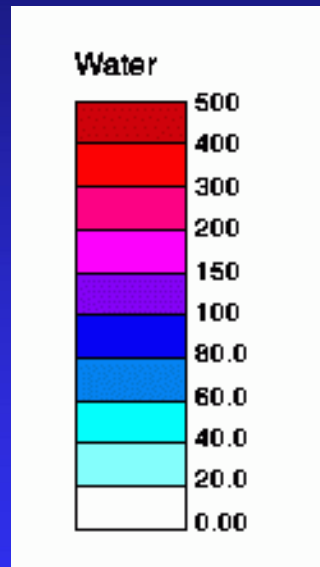
$$K1c = 7500 \text{ m}^2/\text{an}$$

$$K2c = 7500 \text{ m}^2/\text{an}$$

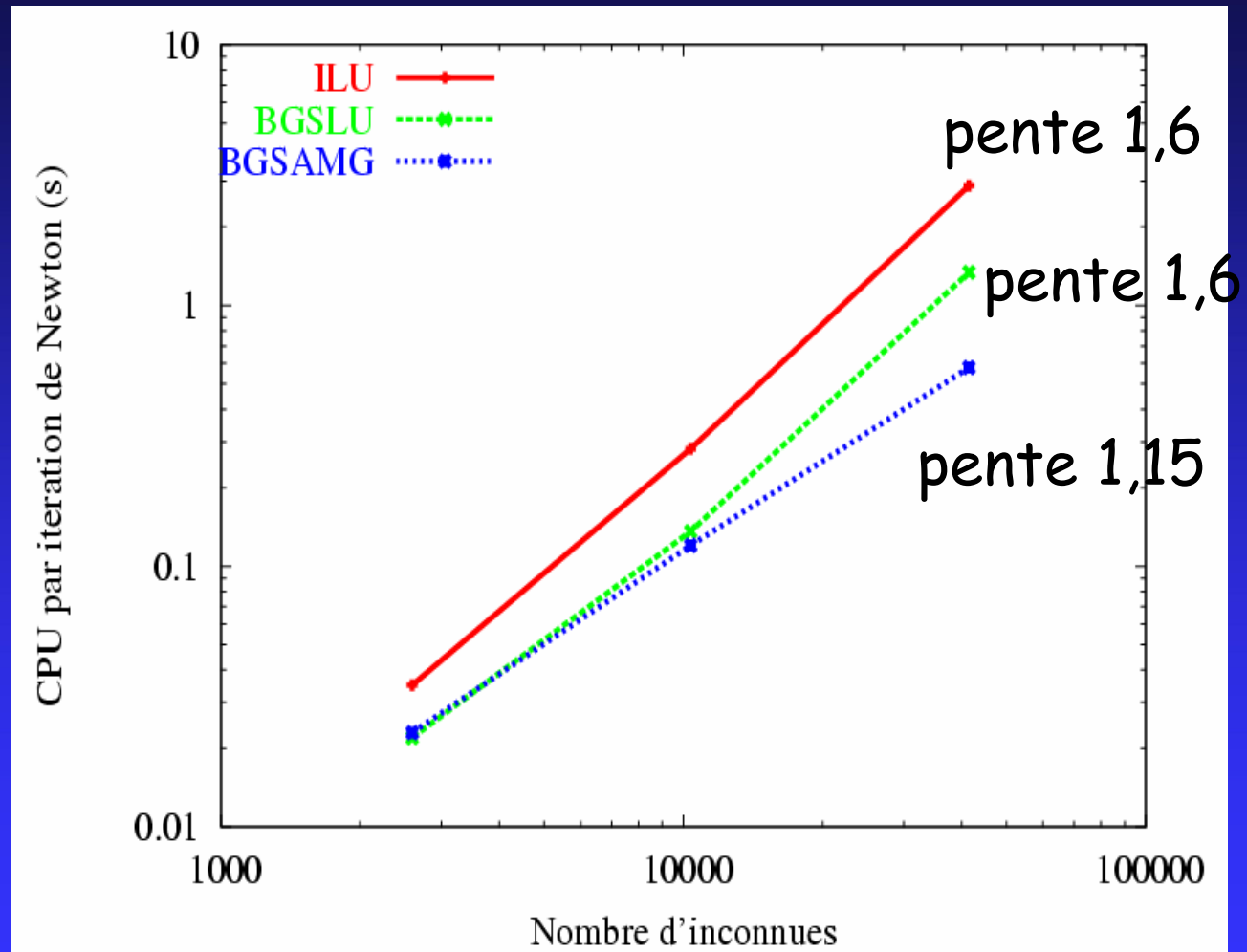
$$K1m = 4500 \text{ m}^2/\text{an}$$

$$K2m = 45000 \text{ m}^2/\text{an}$$

Cas RIFT: cartes du flux d'eau



Robustesse vis à vis du nombre d'inconnues



Robustesse vis à vis des coefficients de diffusion



$$r_{2,1} = \frac{k_{2,c}}{k_{1,c}} = \frac{k_{2,m}}{k_{1,m}}$$

$$r_{m,c} = \frac{k_{1,m}}{k_{1,c}} = \frac{k_{2,m}}{k_{2,c}}$$

$r_{2,1}$	BGSAMG	$r_{m,c}$	BGSAMG
100	20.4	100	20.4
10	14.2	10	15.9
1	8.8	1	14.4
0.1	11.6	0.1	12.4
0.01	13.8	0.01	13.3

Extensions aux écoulements polyphasiques en milieux poreux

■ Système

- Pression = elliptique/parabolique,
- Saturations/compositions = transport
- + capillarités, gravité, équilibre thermodynamique, ...

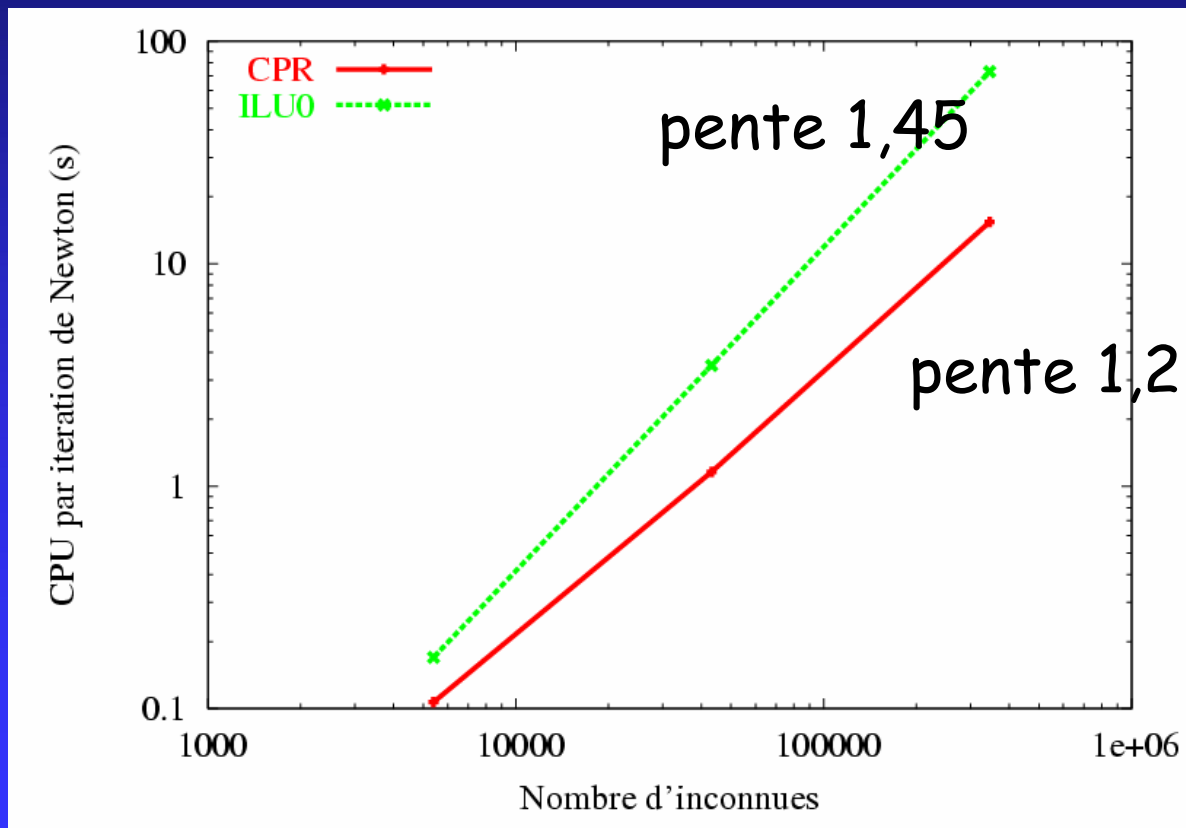
■ Méthodes CPR (Wallis)

- ILU0 + AMG pour le bloc pression (Y. Vassilevski, S. Lacroix et al 2002)
- Étude et améliorations des propriétés du bloc pression pour le solveur AMG
- Applications aux modèles de bassin et réservoir

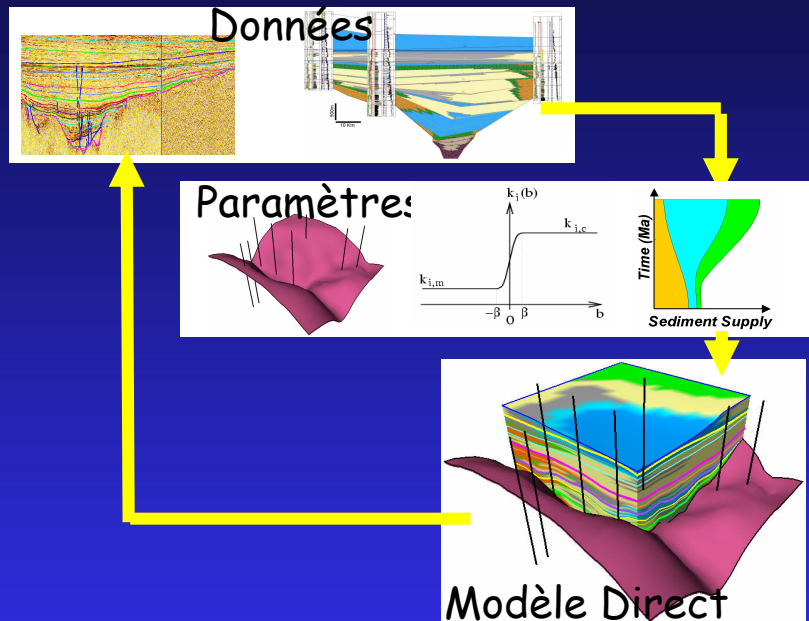
Extensions aux écoulements polyphasiques en milieux poreux



- Exemple: cas black oil hétérogène



Intégration des données sismiques et de puits



- Estimation des paramètres d'entrée du modèle

- Accommodation
- Apports en sédiments
- Coefficients de diffusion

- Données

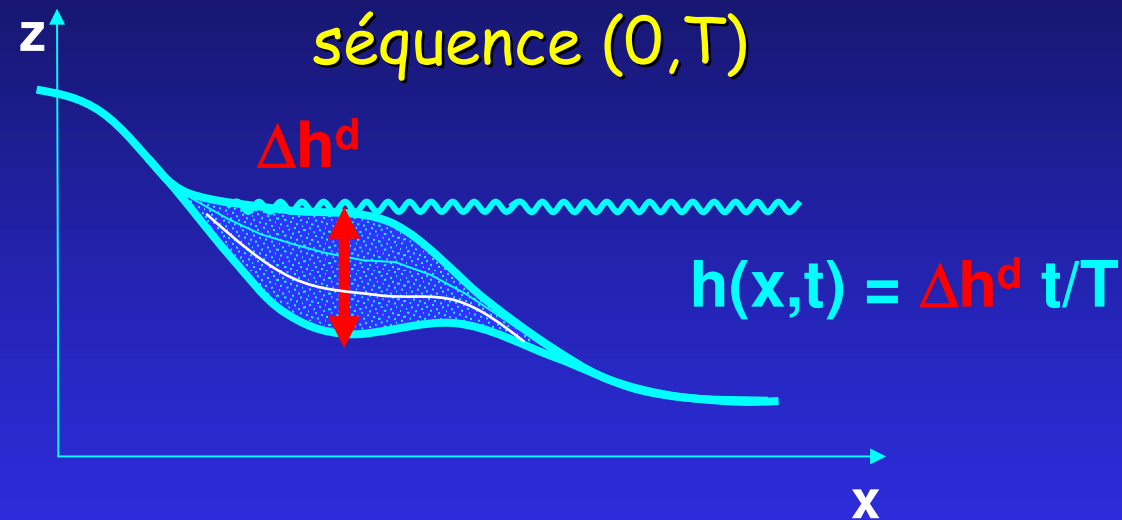
- **Cartes d'épaisseurs** des couches
- **Plages bathymétriques et de concentrations** aux puits

- Inversion séquence par séquence
- Approche par modèles réduits

Modèle Réduit

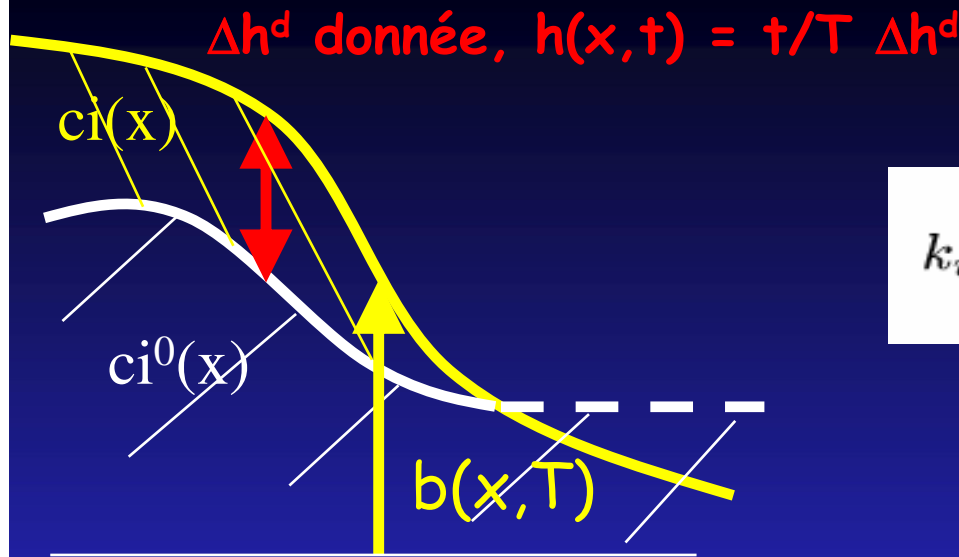


Interpolation des cartes d'épaisseur sur chaque



- Modèle EDP sur Ω donnant la bathymetry b^T en fin de séquence T et les concentrations $c_i, i=1, \dots, L$ constantes dans l'épaisseur
- Pas de boucle d'inversion pour caler les épaisseurs et pour inverser l'accommodation

Modèle Réduit



$$k_i(b) = r_i k(b), \quad \psi(b) = \int_0^b k(s) ds$$

$$\psi(b(x,t)) = \phi(x) + \alpha(t), \quad (x,t) \in \Omega \times (0,T)$$

où

ϕ, c_i, c_i^s pour tout $i = 1, \dots, L$

sont solutions
du système d'EDP sur Ω

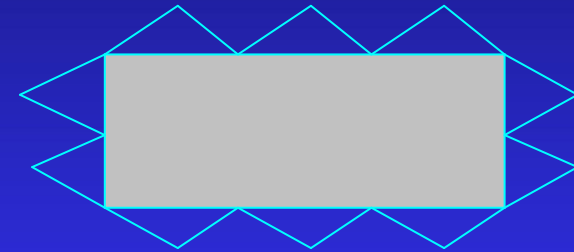
$$\begin{aligned} -\operatorname{div}\left(c_i^s r_i \nabla \phi\right) &= c_i \frac{\Delta h^d}{T} && \text{sur } \Omega, \\ \sum_{i=1}^L c_i^s &= 1 && \text{sur } \Omega, \\ \mu_i^s := \frac{r_i c_i^s}{\sum_{j=1}^L r_j c_j^s} &= \mu_i^e && \text{sur } \partial\Omega_-, \\ \sum_{j=1}^L c_j^s r_j \nabla \phi \cdot n_x &= g && \text{sur } \partial\Omega, \\ c_i &= \begin{cases} c_i^s & \text{si } \Delta h^d > 0 \\ c_i^0 & \text{si } \Delta h^d \leq 0 \end{cases} && \text{sur } \Omega \end{aligned}$$

Inversion des apports et des coefficients de diffusion

par calage des données de puits



- **Données** = plages de bathymétries et de concentrations aux puits
- **Paramètres**: Flux g décomposé dans une base, coefficients de diffusion $k_{i,m}, k_{i,c}$



↳ Ensemble admissible de solutions:

- polygone convexe définis par un ensembles de contraintes linéaires dans le cas mono-lithologique
- Peut être encadré et exploré de façon interactive dans le cas non linéaire

Inversion de l'accommodation par calage des épaisseurs



Objectif: améliorer le modèle de vitesse de sédimentation

- Paramétrisation basse fréquence de l'accommodation:

$$a(x, t) = \left(A^T(x) - A_0(x) \right) \frac{t}{T} + A_0(x)$$

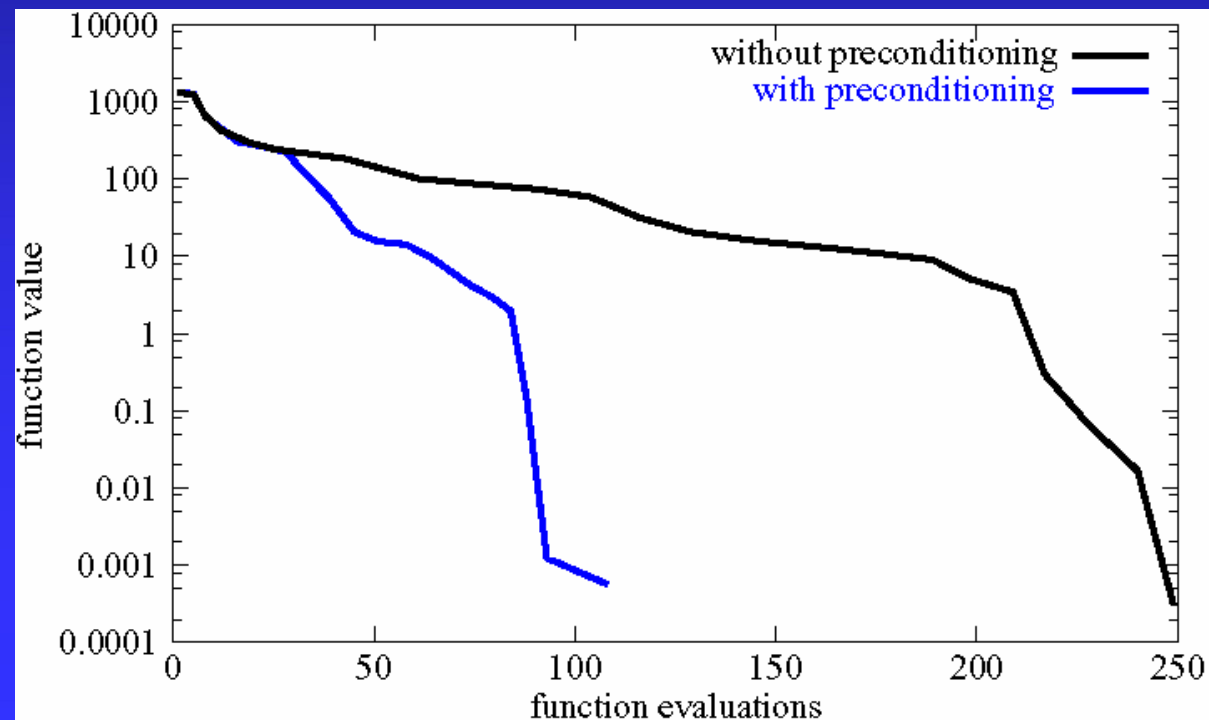
Etant donnés k , g , A^0 , Δh^d , tels que $\int_{\Omega} \frac{\Delta h^d}{T} dx + \int_{\partial\Omega} g d\sigma = 0$,
trouver A^T tel que

$$\begin{aligned} \partial_t h + \operatorname{div}(k(b) \nabla b) &= 0 && \text{sur } \Omega \times (0, T), \\ k(b) \nabla b \cdot n_x &= g && \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \\ b|_{t=0} &= A^0 && \text{sur } \Omega, \\ b &= a - h && \text{sur } \Omega \times (0, T), \\ a &= (A^T - A^0) \frac{t}{T} + A^0 && \text{sur } \Omega \times (0, T), \\ h|_{t=T} &= \Delta h^d && \text{sur } \Omega. \end{aligned}$$

Inversion de l'accommodation par calage des épaisseurs



- **Solution**: existence dans le cas mono-lithologique
- **Algorithme**: de type Newton Krylov préconditionné par le modèle réduit tangent et globalisé par recherche linéaire ou région de confiance



Merci pour votre attention