

Formulation et discrétisation des écoulements polyphasiques en milieux poreux

applications au stockage du CO₂ et à la simulation des réservoirs pétroliers

R. Eymard^{*}, C. Guichard[†], R. Herbin[#], R. Masson[†]

[†] IFP Énergies nouvelles
[#] LATP Université de Provence
^{*} Université Paris Est

SMAI 2011, Guidel, 24 mai 2011

- Formulation générique sur une gamme de modèles d'écoulements polyphasiques compositionnels
 - forts couplages entre le transport, la conservation du volume et les équilibres thermodynamiques
 - apparition et disparition de phases
- Discrétisation en espace
 - maillages généraux
 - prise en compte des hétérogénéités et anisotropies

Notations pour les systèmes polyphasiques compositionnels

- Phases: $\alpha \in \mathcal{P}$
- Composants: $i \in \mathcal{C}$
- Matrice binaire de présence des composants dans les phases

$$M = \begin{array}{c} (\alpha \in \mathcal{P}) \\ \left(\begin{array}{cc|c|cc} & (i \in \mathcal{C}) & & & & \\ & 1 & \dots & 0 & \dots & 1 \\ & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ \hline & 0 & \dots & 1 & \dots & 1 \\ \hline & \vdots & \dots & \vdots & \dots & \vdots \\ & 1 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{array} \right) \rightarrow \mathcal{C}_\alpha \\ \downarrow \\ \mathcal{P}_i \end{array}$$

Ensemble des phases présentes

- Du fait de l'équilibre thermodynamique, les phases $\alpha \in \mathcal{P}$ peuvent apparaître ou disparaître
- L'inconnue à valeurs discrètes \mathcal{Q} représente l'ensemble des phases présentes en chaque point du domaine

$$\mathcal{Q}(x, t) \subset \mathcal{P}$$

Formulation dans le jeu d'inconnues $Q, P, S^\alpha, C^\alpha, \alpha \in Q$

$$n_i = \phi \sum_{\alpha \in Q \cap \mathcal{P}_i} \zeta_\alpha(P, C^\alpha) S^\alpha C_i^\alpha, \quad Z = \left(\frac{n_i}{\sum_{j \in \mathcal{C}} n_j} \right)_{i \in \mathcal{C}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t n_i + \operatorname{div} \left(\sum_{\alpha \in Q \cap \mathcal{P}_i} C_i^\alpha \frac{\zeta_\alpha(P, C^\alpha) k_{r_\alpha}(S)}{\mu_\alpha(P, C^\alpha)} \mathbf{v}^\alpha \right) = 0, \quad i \in \mathcal{C}, \\ \sum_{\alpha \in Q} S^\alpha = 1, \\ \sum_{i \in \mathcal{C}} C_i^\alpha = 1, \quad \alpha \in Q, \\ f_i^\alpha(P, C^\alpha) = f_i^\beta(P, C^\beta), \quad \alpha \neq \beta \in Q \cap \mathcal{P}_i, \quad i \in \mathcal{C}, \end{array} \right.$$

avec

$$\mathbf{v}^\alpha = -\Lambda \left(\nabla \left[P + P_{c,\alpha}(S) \right] - \rho_\alpha(P, C^\alpha) \mathbf{g} \right), \quad \alpha \in Q.$$

Q est obtenu par le point fixe: $Q = \text{Flash}(P, Z)$.

Composants présents uniquement dans des phases absentes

Etant donné l'ensemble des phases présentes \mathcal{Q} et le composant i , l'ensemble $\mathcal{Q} \cap \mathcal{P}_i$ peut être vide.

- Dans ce cas, pour fermer le système, on définit les ensembles

$$\tilde{\mathcal{C}}_{\mathcal{Q}} = \{i \mid \mathcal{Q} \cap \mathcal{P}_i = \emptyset\}$$

- et les inconnues indépendantes n_i pour $i \in \tilde{\mathcal{C}}_{\mathcal{Q}}$.

L'ensemble des inconnues:

$$\left(\mathcal{Q}, P, S^{\alpha}, C_i^{\alpha}, n_j \right)_{i \in \mathcal{C}^{\alpha}, \alpha \in \mathcal{Q}, j \in \tilde{\mathcal{C}}_{\mathcal{Q}}}$$

correspond au nombre d'équations du système.

Discrétisation volume fini centré des modèles compositionnels

Ensemble de mailles $K \in \mathcal{M}$, de voisines $L \in \mathcal{T}_K$ partageant la face KL .

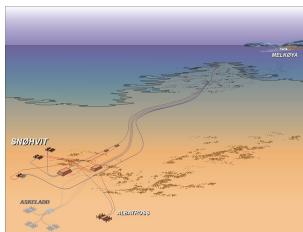
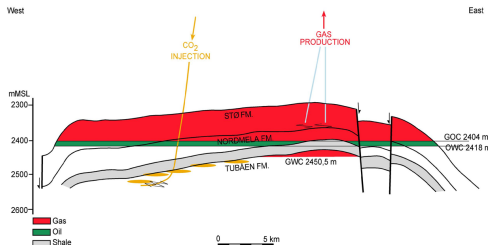
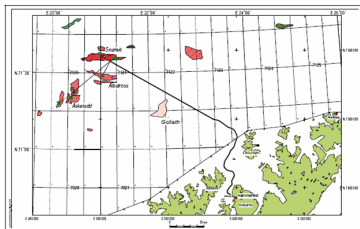
$X_K = \left(P_K, S_K^\alpha, C_{i,K}^\alpha, n_{j,K} \right)_{i \in \mathcal{C}^\alpha, \alpha \in \mathcal{Q}_K, j \in \tilde{\mathcal{C}}_{\mathcal{Q}_K}}$ inconnues de la maille K .

$$\frac{n_i(X_K) - n_i(X_K^n)}{\Delta t} |K| + \sum_{\mathcal{L} \in \mathcal{T}_K} \sum_{\alpha \in \mathcal{Q}_{K_\alpha} \cap \mathcal{P}_i} \left(C_i^\alpha \frac{\zeta_\alpha k_{r_\alpha}}{\mu_\alpha} \right) (X_{K_\alpha}) F_{KL}^\alpha = 0$$

- $F_{KL}^\alpha = -F_{LK}^\alpha$ discrétisation du flux de Darcy $\int_{KL} -\Lambda(\nabla P_\alpha - \rho^\alpha \mathbf{g}) \cdot \mathbf{n}_{KL} d\sigma$,
- Décentrage $K_\alpha = \begin{cases} K & \text{si } F_{KL}^\alpha \geq 0, \\ L & \text{si } F_{KL}^\alpha < 0. \end{cases}$
- Fermeture locales $\mathcal{C}_K(X_K) = 0$.
- Phases présentes: $\mathcal{Q}_K = \text{Flash}(P_K, Z_K)$

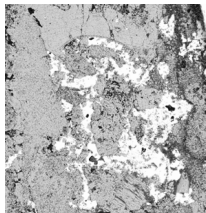
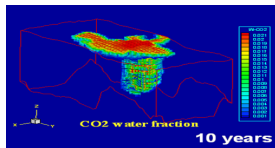
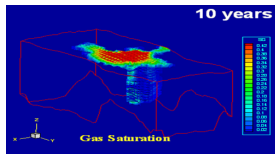
Exemple de la réinjection du CO2 du champ Snohvit

- Champ de gaz Snohvit avec 5 à 8 % de CO2
- Réinjection du CO2 dans l'aquifère salin Tubaen en contrebas
- 700000 tonnes par an depuis 2008
- Pertes d'injectivité constatées

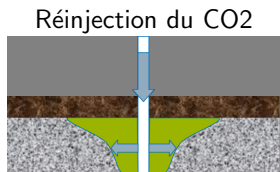


Phase d'injection: 10 à 50 ans

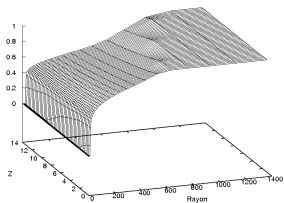
- Ecoulement diphasique en milieux poreux
 - Piègeage géologique par la couverture
 - Piègeage capillaire
- Dissolution du CO2 dans la phase aqueuse
 - Piègeage par dissolution
- Altération proche puits
 - Assèchement et précipitation de sel
 - Risque de perte d'injectivité



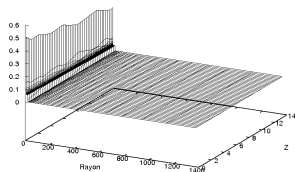
Cas Snohvit: simulation proche puits axisymétrique



Saturation en eau



Saturation en minéral

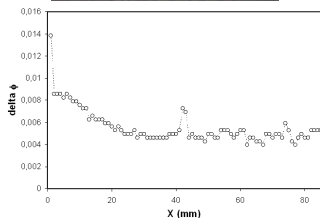


■ $\mathcal{P} = \{\text{eau, gaz, minéral}\}$

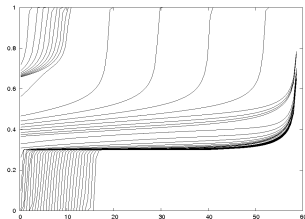
■ $\mathcal{C} = \{\text{H}_2\text{O, CO}_2, \text{Sel}\}$

■ $M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

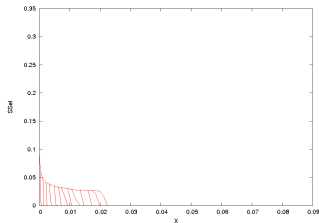
Assèchement et précipitation de sel proche puits par injection de CO₂



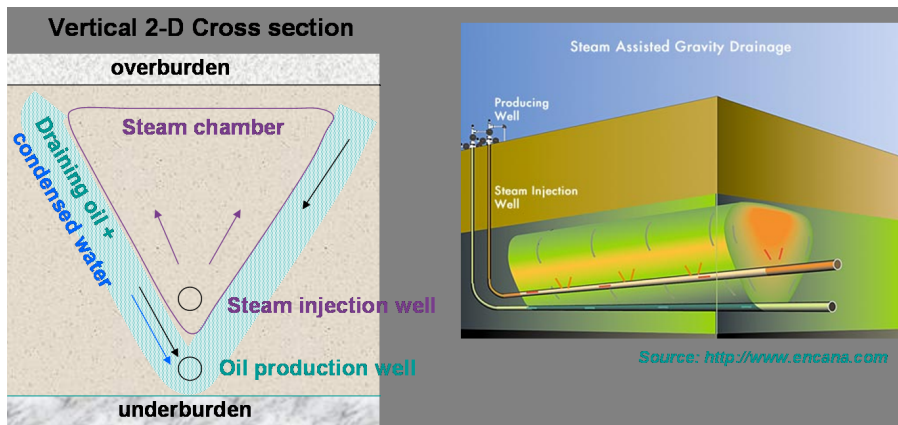
Saturation en eau



Saturation en minéral



Procédé SAGD de récupération des huiles lourdes par injection de vapeur

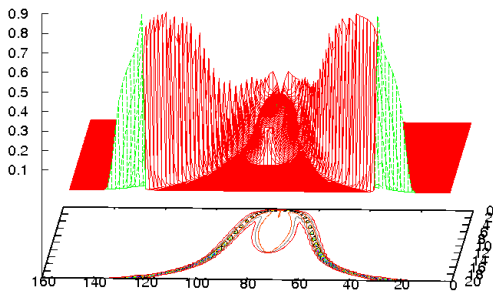


Modèle: écoulement triphasique eau gaz huile thermique

Exemple de la récupération des huiles lourdes par injection de vapeur

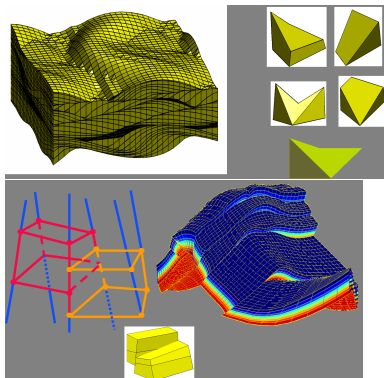
- $\mathcal{P} = \{\text{eau, gaz, huile}\}$
- $\mathcal{C} = \{\text{H}_2\text{O, HC}\}$
- $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
- Hypothèse d'huile dite morte (pas de composant vaporisable)
- Rajout de l'inconnue T et de l'équation d'énergie
- Forte dépendance en température de $\mu_{\text{huile}}(T)$ (3 ordres de grandeur)
- Equilibre Liq Vap à $P = P_{\text{sat}}(T)$

Front de saturation en eau



Discrétisation des flux diffusifs sur maillages généraux en milieux hétérogènes anisotropes

- Maillages
 - polyédriques généraux
 - Faces non planes
 - Failles, LGR
- Milieu hétérogène anisotrope



- Discrétisations des flux diffusifs $\int_{\sigma} -\Lambda \nabla u \, ds$ (Darcy, Fick, Dispersion, Fourier) pour les écoulements polyphasiques en milieux poreux.
 - Schémas centrés, compacts,
 - Schémas exacts pour les solutions de type flux constants par maille,
 - Schémas coercifs, convergents.

Discrétisation des flux diffusifs: problème modèle

- Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un domaine polyédrique borné
- Pour $f \in L^2(\Omega)$, on considère le problème suivant:

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(\Lambda \nabla u) = f \text{ dans } \Omega, \\ u = 0 \text{ sur } \partial\Omega \end{cases}$$

- Soit la forme bilinéaire $a(u, v) = \int_{\Omega} \Lambda \nabla u \cdot \nabla v \, dx$. La formulation faible s'écrit

Trouver $u \in H_0^1(\Omega)$ tel que $a(u, v) = \int_{\Omega} f v \, dx$ pour tout $v \in H_0^1(\Omega)$

Discrétisation des flux diffusifs sur maillages généraux en milieux hétérogènes anisotropes

Formulations variationnelles discrètes avec gradients constants par sous mailles et stabilisation par résidus [ADEM-2010]

- Forme bilinéaire sur l'espace des inconnues V_h :

$$a_h(u_h, v_h) = \int_{\Omega} \Lambda \nabla_h u_h \cdot \tilde{\nabla}_h v_h \, dx + \int_{\Omega} R_h u_h R_h v_h \, dx$$

- Formulation variationnelle: trouver $u_h \in V_h$ telle que

$$a_h(u_h, v_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} v_K \int_K f(x) dx \quad \text{pour tout } v_h \in V_h.$$

- Flux (exemple des schémas centrés): $F_{KL}(u) = -F_{LK}(u)$ tels que

$$a_h(u_h, v_h) = \sum_{KL \in \Sigma_h} F_{KL}(u) (v_K - v_L)$$

Convergence

- Consistance du gradient $\nabla_h \varphi_h$ et du résidu $R_h \varphi_h$
- Coercivité de la forme bilinéaire a_h
- Rellich discret: $u_h \rightarrow \tilde{u} \in H_0^1(\Omega)$ fort dans $L^2(\Omega)$ et $\tilde{\nabla}_h u_h \rightarrow \nabla \tilde{u}$ faiblement dans $(L^2(\Omega))^d$

- Preuve de $u = \tilde{u}$ par passage à la limite dans

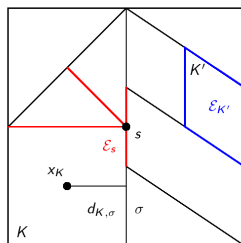
$$\int_{\Omega} \Lambda \nabla_h u_h \cdot \tilde{\nabla}_h \varphi_h \, dx + \int_{\Omega} R_h u_h R_h \varphi_h = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} (\varphi_h)_K \int_K f(x) \, dx$$

- On prouve auparavant la convergence forte dans $(L^2(\Omega))^d$ de $\nabla_h u_h$ vers $\nabla \tilde{u}$ en utilisant la coercivité de a_h et la formulation variationnelle discrète.

Approximation des flux par schémas volume fini

- Schémas symétriques, centrés mais **non compact** (stencil en voisins des voisins par les noeuds)
 - Sushi [Eymard et al., 2007]
 - VFSym [ADM-2008]
- Schémas **non symétriques**, centrés, compacts, mais conditionnellement coercifs et convergents:
 - Gradcell [ADEM-2010],
 - MPFA L,G [ADKM-2008],
 - **MPFA O** [Aavatsmark et al., 1996], [Edwards and Rogers, 1994], [AGM-2010]
- Schémas symétriques, compacts mais avec **inconnues supplémentaires aux faces ou aux noeuds**:
 - VFH [Eymard and Herbin, 2007], [Eymard et al., 2010a],
 - MFD [Brezzi et al., 2005],
 - DDFV [Hermeline, Omnes, Boyer, Hubert, Coudière, ...]
 - **VAG** [EHGM-2011]

Maillage polyédrique admissible



\mathcal{T}_h : ensemble des mailles K

$\mathcal{E}_h = \mathcal{E}_h^i \cup \mathcal{E}_h^b$: ensemble des faces internes et de bord σ

\mathcal{E}_K : faces de la maille K

\mathcal{E}_s : faces connectées au noeud s

\mathcal{V}_σ : noeuds de la face σ

O schéma généralisé: principes

- Inconnues de mailles et de sous faces:

$$u_h = \left(u_K, u_\sigma^s \right)_{K \in \mathcal{T}_h, s \in \mathcal{V}_\sigma, \sigma \in \mathcal{E}_h'}$$

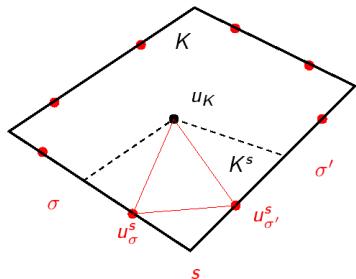
avec $u_\sigma^s = 0$ pour tout $\sigma \in \mathcal{E}_h^b$

- Construction de deux gradients constants par sous maille K^s , $s \in \mathcal{V}_K$

- Gradient consistant $\nabla_h u_h$
- Gradient faible non consistant $\tilde{\nabla}_h u_h$

- Formulation variationnelle discrète stabilisé par des résidus $R_h(u_h)$

- Élimination des inconnues de sous faces autour de chaque noeud s



Reconstruction des gradients constants par sous maille et résidus

- Gradient constant sur K^s :

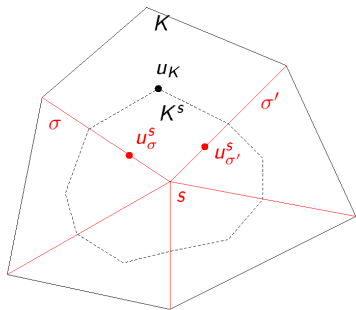
$$(\nabla_h u_h)_K^s = \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_s} (u_\sigma^s - u_K) g_{K,\sigma}^s$$

- Gradient faible constant sur K^s

$$(\tilde{\nabla}_h u_h)_K^s = \frac{1}{m_{K^s}} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_s} m_\sigma^s (u_\sigma^s - u_K) \mathbf{n}_{K,\sigma}$$

- Résidu constant sur K_σ^s

$$(R_h u_h)_{K_\sigma^s} = \frac{\alpha_K^s}{(d_{K,\sigma})^2} \left(u_\sigma^s - u_K - (\nabla_h u)_K^s \cdot (x_\sigma^s - x_K) \right).$$



Formulation variationnelle discrète

Forme bilinéaire sur \mathcal{H}_h :

$$a_h(u_h, v_h) = \int_{\Omega} \nabla_h u_h \cdot \Lambda_K \tilde{\nabla}_h v_h \, dx + \int_{\Omega} R_h(u_h) R_h(v_h) \, dx$$

Schéma volume fini: trouver $u_h \in \mathcal{H}_h$ telle que

$$a_h(u_h, v_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} v_K \int_K f(x) \, dx \quad \text{pour tout } v_h \in \mathcal{H}_h.$$

Schéma volume fini

$$a_h(u_h, v_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}_h} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K, s \in \mathcal{V}_\sigma} F_{K,\sigma}^s(u_h)(v_K - v_\sigma^s),$$

en définissant les flux de sous faces:

$$F_{K,\sigma}^s(u_h) = \sum_{\sigma' \in \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_s} (T_K^s)_{\sigma,\sigma'}(u_K - u_{\sigma'}^s),$$

Schéma volume fini:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{\sigma \in \mathcal{E}_K} \left(\sum_{s \in \mathcal{V}_\sigma} F_{K,\sigma}^s(u_h) \right) = \int_K f(x) dx \quad \text{for all } K \in \mathcal{T}_h, \\ F_{K,\sigma}^s(u_h) = -F_{L,\sigma}^s(u_h) \quad \text{for all } s \in \mathcal{V}_\sigma, \sigma = \mathcal{E}_K \cap \mathcal{E}_L \in \mathcal{E}_h^i. \end{array} \right.$$

Avantages et Inconvénients du schéma en O

■ Avantages

- précis lorsque le schéma est coercif,
- traite les hétérogénéités et anisotropies, reproduction des solutions à flux constants par mailles,
- compacité du stencil,
- traite les faces non planes.

■ Inconvénients

- perte de coercivité pour les fortes anisotropies sur maillages déformés,
- coût de construction,
- ne traite pas certaines mailles dégénérées,
- coûteux sur les maillages tétraédriques par rapport aux EF.

Perte de coercivité du schéma en O: maillage déformé plus anisotropie

$$u = \sin(\pi x) \sin(\pi y), \quad K = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{bmatrix} \delta x^2 + y^2 & (\delta - 1)xy \\ (\delta - 1)xy & x^2 + \delta y^2 \end{bmatrix}.$$

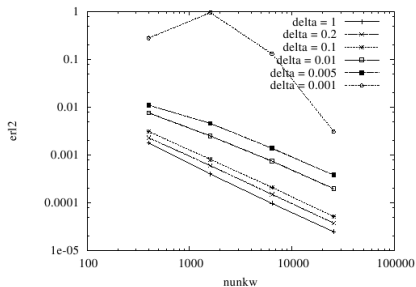
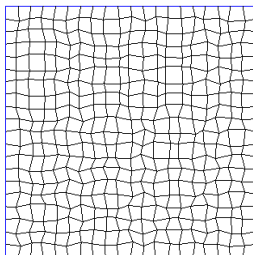


Schéma VAG: Vertex Approximate Gradient [Eymard et al., 2010b]

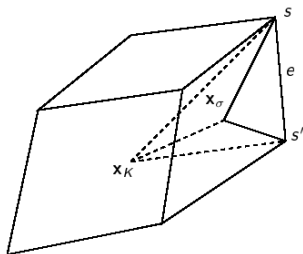
Espace discret: inconnues aux noeuds et aux mailles

$$V_h = \{u_s \in \mathbb{R}, s \in \mathcal{V}, u_K \in \mathbb{R}, K \in \mathcal{T} \mid u_s = 0 \text{ on } \partial\Omega\}$$

Reconstruction du gradient sur V_h (exemple conforme):

$$\mathbf{x}_\sigma = \sum_{s \in \mathcal{V}_\sigma} \frac{1}{\text{Card}\mathcal{V}_\sigma} \mathbf{x}_s, \quad u_\sigma = \sum_{s \in \mathcal{V}_\sigma} \frac{1}{\text{Card}\mathcal{V}_\sigma} u_s$$

$$\nabla_{K,\sigma,e} u_h = \sum_{s \in \mathcal{V}_\sigma} (u_s - u_K) \mathbf{g}_{K,\sigma,e}^s$$



Gradient dans $L^2(\Omega)^d$ constant par sous mailles:

$$\nabla_h u_h = \nabla_{K,\sigma,e} u_h \text{ sur chaque tétraèdre, } \mathbf{x}_K, \mathbf{x}_\sigma, \mathbf{x}_s, \mathbf{x}_{s'}, \text{ avec } e = ss'$$

Formulation variationnelle et flux

Forme bilinéaire sur $V_h \times V_h$

$$\left\{ \begin{aligned} a_h(u_h, v_h) &= \int_{\Omega} \Lambda \nabla_h u_h \cdot \nabla_h v_h \, dx \\ &= \sum_{K \in \mathcal{T}} \sum_{s \in \mathcal{V}_K} F_{K,s}(u_h) (v_K - v_s) \end{aligned} \right.$$

en définissant le flux entre la maille K et le noeud s par

$$F_{K,s}(u_h) = \sum_{s' \in \mathcal{V}_K} A_K^{s,s'} (u_K - u_{s'})$$

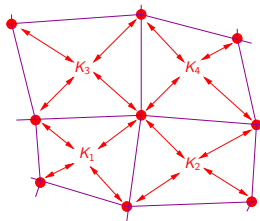
Schéma volume fini: flux

La formulation variationnelle: trouver $u_h \in V_h$ tel que

$$a_h(u_h, v_h) = \sum_{K \in \mathcal{T}} v_K \int_K f \, dx \quad \text{pour tout } v_h \in V_h$$

est équivalente à

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{s \in \mathcal{V}_K} F_{K,s}(u_h) = \int_K f \, dx \text{ pour tout } K \in \mathcal{T}, \\ \sum_{K \in \mathcal{T}_s} -F_{K,s}(u_h) = 0 \text{ pour tout } s \in \mathcal{V} \setminus \partial\Omega \end{array} \right.$$



Flux conservatifs:

$$F_{s,K}(u_h) = -F_{K,s}(u_h) = \sum_{s' \in \mathcal{V}_K} A_K^{s,s'} (u_{s'} - u_K)$$

Quel volume poreux attribuer aux noeuds?

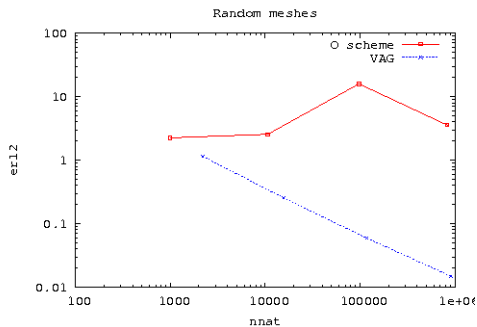
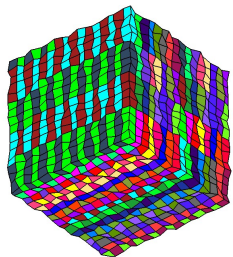
- On redistribue aux noeuds de façon conservative une portion μ des volumes poreux des mailles adjacentes
- Le volume poreux est prélevé au prorata de la transmissibilité totale maille noeud:

$$B_{K,s} = \sum_{s' \in \mathcal{V}_K} A_K^{s,s'}$$

Comparaison des schéma en O et VAG: cas test Random Mesh du benchmark FVCA6 [Herbin and Hubert, 2010]

$$u = \sin(2\pi x) \sin(2\pi y) \sin(2\pi z)$$

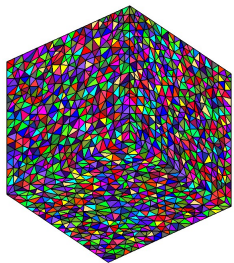
$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 10^3 \end{pmatrix}$$



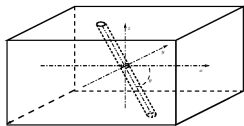
Comparaison des schémas en O et VAG: cas test Tetraédrique du benchmark FVCA6

$$u = 1 + \sin(\pi x) \sin(\pi(y+1/2)) \sin(\pi(z+1/3))$$

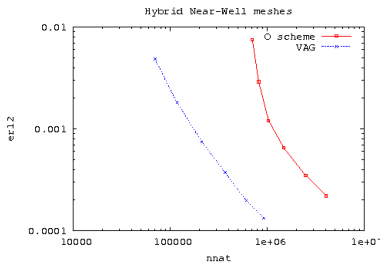
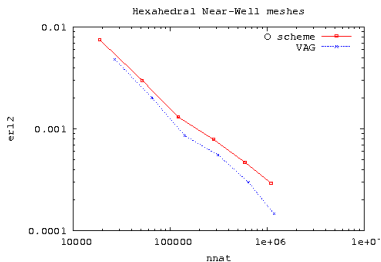
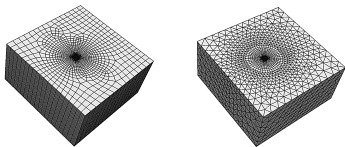
$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$



Comparaison des schémas en O et VAG: cas test Puits du benchmark FVCA6

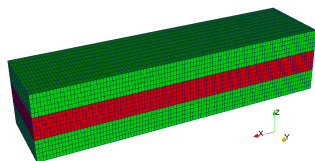


$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0.2 \end{pmatrix}$$

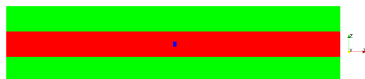


Cas test diphasique hétérogène

- Injection de CO_2 immiscible dans de l'eau
- Géométrie : $[-100, 100] \times [0, 50] \times [0, 45] \text{ m}^3$
- Rapport de perméabilité drain - barrière de 10^4
- Maillage : $100 \times 10 \times 15$ control volumes



drain
barrière



Puits injecteur au centre
(une maille perforée)

Cas test diphasique hétérogène

Front de saturation en gaz

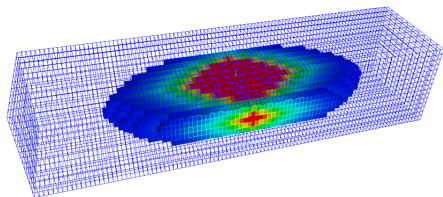


Schéma TPFA (ou en O)

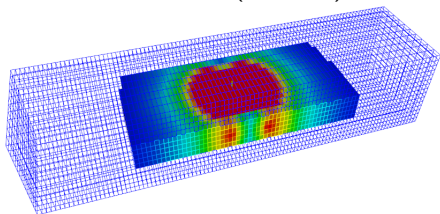
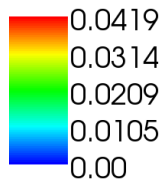


Schéma VAG

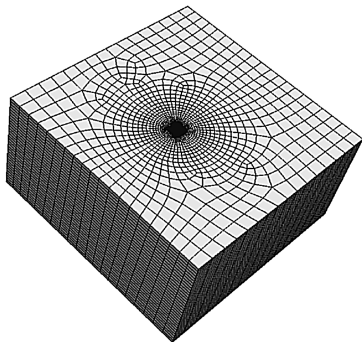


Saturation de gaz

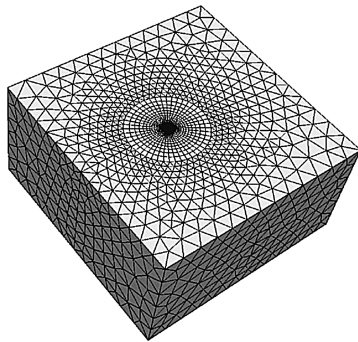
VAG est peu sensible à l'effet d'orientation du maillage.

Cas test proche puits diphasique

- Injection de CO_2 miscible dans l'eau
- Puits dévié
- Anisotropie selon Z non alignée avec l'axe du puits



Maillage hexaédrique

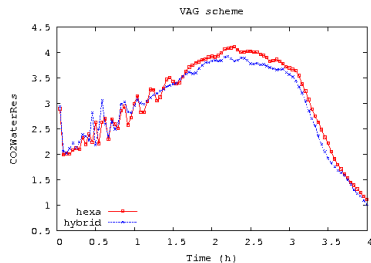
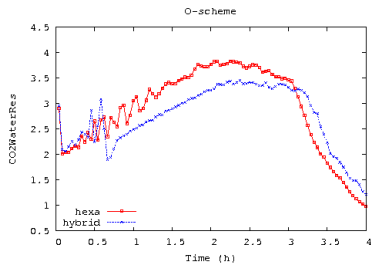


Maillage hybride

Cas test proche puits

Masse de CO_2 dissous dans le réservoir

Comparaison des solutions sur maillages hexaédrique et hybride à même nombre de mailles



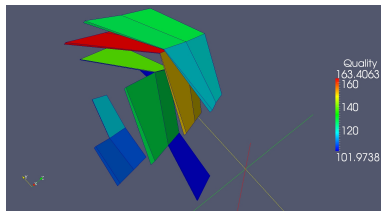
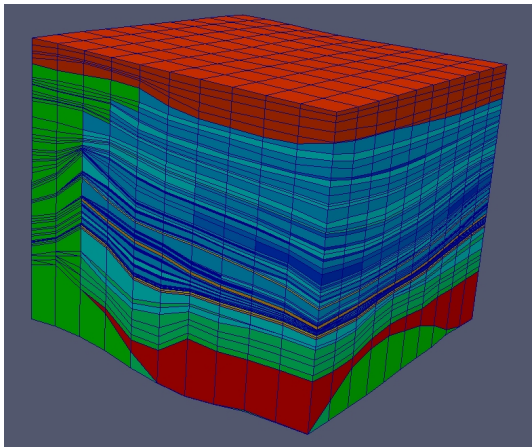
Taux de variation de la masse de CO_2 dissous dans le réservoir

- Formulation des modèles polyphasiques compositionnels pour une large classe de modèles
- Discrétisation VAG
 - Inconditionnellement coercive
 - Facile à mettre en oeuvre sur des maillages généraux (faces non planes, non coïncidences, mailles dégénérées, ...)
 - Adaptée aux simulateurs commerciaux à base de graphe de transmissibilités
 - Schéma compact et peu coûteux
 - Très performant sur des maillages tétraédriques

- Schéma VAG sur des cas tests proche puits plus réalistes
 - Cas proche puits avec assèchement et précipitation de sel
 - Cas SAGD sur une paire de puits

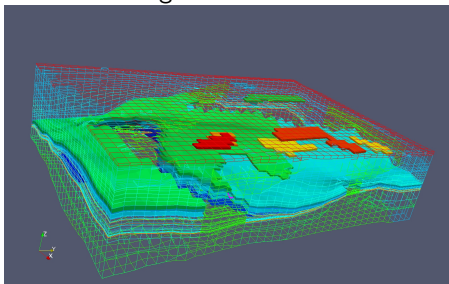
- Autres applications et problèmes ouverts
 - Fractures diffuses homogénéisées en double milieu: fortes anisotropies dans la direction des fractures
 - Maillages bassins: mailles plates dégénérées et forts pendages

Maillages bassins avec piliers et cinématique verticaux



Maillages bassins: $\Lambda = I$ et solution $u = \frac{z}{L_z} + e^{\cos(\frac{x}{L_x} + \frac{y}{L_y} + \frac{z}{L_z})}$

Maillage à 53279 mailles

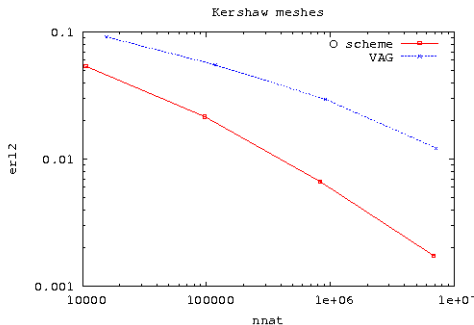
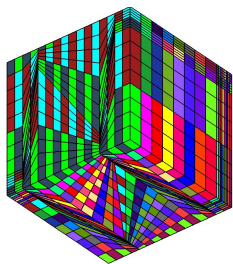


	TPFA	MPFA	VAG	VFH
Erreur l^2	0.068	0.035	0.033	0.013
Erreur l^∞	0.23	0.21	0.13	0.05
Itérations ILU0	22	10	13	33
CPU solveur	0.20	0.4	0.42	1.3
CPU schéma + assemblage	0.07	3.0	0.85	1.45

Comparaison des schéma en O et VAG: cas test Kershaw du benchmark FVCA6

$$u = 1 + \sin(\pi x) \sin(\pi(y+1/2)) \sin(\pi(z+1/3))$$

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0.5 & 0 \\ 0.5 & 1 & 0.5 \\ 0 & 0.5 & 1 \end{pmatrix}$$



References



AGELAS L., D.A. DI PIETRO, EYMARD R., MASSON R.: *An abstract analysis framework for nonconforming approximations of the single phase Darcy equation*. IJFV, 2010.



AGELAS L., C. GUICHARD, MASSON R.: *Convergence of finite volume MPFA O type schemes for heterogeneous anisotropic diffusion problems on general meshes*, IJFV, december 2010.



V. GERVAIS, R. MASSON *Numerical simulation of a stratigraphic model at geological time scales*, Computational Geosciences, 12:163-179, 2008.



L. JEANNIN, M. MAINGUY, R. MASSON, S. VIDAL-GILBERT *Accelerating the convergence of coupled geomechanical-reservoir simulations*, Int. Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics, vol. 31, issue 10, 2007.



J. BLUM, G. DOBRANSZKY, R. EYMARD, R. MASSON *Identification of a stratigraphic model with seismic constraints*, Inverse Problems, 22, 1207-1225, 2006.



R. EYMARD, T. GALLOUËT, V. GERVAIS, R. MASSON *Convergence of a numerical scheme for stratigraphic modeling*, SIAM Journal of Numerical Analysis, vol. 43, 2, pp. 474-501, 2005.



V. GERVAIS, R. MASSON *Mathematical and numerical analysis of a stratigraphic model*, M2AN, Vol. 38, 4, pp 585-612, july/august 2004.



R. EYMARD, T. GALLOUËT, D. GRANJEON, R. MASSON, Q. H. TRAN *Multi-lithology stratigraphic models under maximum erosion rate constraint*, International Journal of Numerical Methods in Engineering, **60**, pp 527-548, 2004.



E. FLAURAUD, F. NATAF, I. FAILLE, R. MASSON *Domain Decomposition for an asymptotic geological fault modeling*, Comptes Rendus à l'académie des Sciences, Mécanique, 331, pp 849-855, 2003.



R. SCHEICHL, R. MASSON, J. WENDEBOURG *Decoupling and block preconditioning for sedimentary basin simulations*, Computational Geosciences 7, pp 295-318, 2003.



R. MASSON, M.C. CACAS, G. DOBRANSZKY *Méthode pour simuler le dépôt d'une séquence sédimentaire dans un bassin*, brevet d'invention, 2003.



R. MASSON, M.C. CACAS, G. DOBRANSZKY *Méthode pour simuler le dépôt d'une séquence sédimentaire dans un bassin respectant les épaisseurs des séquences sédimentaires*, brevet d'invention, 2004.



R. EYMARD, S. LEMAIRE, R. MASSON: *Hybrid finite volume discretization of linear elasticity models on general meshes*. In proceedings of FVCA VI, Prague, accepted 2011.



R. EYMARD, R. HERBIN, C. GUICHARD, R. MASSON: *Multiphase flow in porous media using the VAG scheme*. In proceedings of FVCA VI, Prague, accepted 2011.



R. EYMARD, C. GUICHARD, R. MASSON: *Grid orientation effect and multiPoint flux approximation*. In proceedings of FVCA VI, Prague, accepted 2011.



AGELAS L., DI PIETRO D., MASSON R. *A symmetric finite volume scheme for multiphase porous media flow problems with applications in the oil industry*, in the Proceedings of the FVCA5 conference, june 2008.



AGELAS L., D.A. DI PIETRO, I. KAPYRIN, R. MASSON: *Generalized L-scheme for the discretization of diffusion fluxes on general meshes*, in the proceedings of ECMOR XI, Bergen, september 2008.



Aavatsmark, I., Barkve, T., Boe, O., and Mannseth, T. (1996).
Discretization on non-orthogonal, quadrilateral grids for inhomogeneous, anisotropic media.
J. Comput. Phys., 127 (1):2–14.



Agélas, L., Di Pietro, D. A., Eymard, R., and Masson, R. (2010a).
An abstract analysis framework for nonconforming approximations of anisotropic heterogeneous diffusion.
Int. Journal of Finite Volume.



Agélas, L., Guichard, C., and Masson, R. (2010b).

Convergence of finite volume mpfa σ type schemes for heterogeneous anisotropic diffusion problems on general meshes.
Int. Journal of Finite Volume, December.



Agelas, L. and Masson, R. (2008).

Convergence of the finite volume MPFA σ scheme for heterogeneous anisotropic diffusion problems on general meshes.
C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. I, 346:1007–1012.



Brezzi, F., Lipnikov, K., and Simoncini, V. (2005).

A family of mimetic finite difference methods on polygonal and polyhedral meshes.
Math. Mod. Meths. Appli. Sci. (M3AS), 15:1533–1553.



Edwards, M. and Rogers, C. (1994).

A flux continuous scheme for the full tensor pressure equation.
In Proc. of the 4th European Conf. on the Mathematics of Oil Recovery, volume D, Røros, Norway.



Eymard, R., Gallouet, T., and Herbin, R. (2010a).

Discretisation of heterogeneous and anisotropic diffusion problems on general non-conforming meshes, sushi: a scheme using stabilisation and hybrid interfaces.
IMA J. Numer. Anal., 30 (4):1009–1043.



Eymard, R., Guichard, C., and Herbin, R. (2010b).

Small-stencil 3d schemes for diffusive flows in porous media.
<http://hal.archives-ouvertes.fr>, submitted.



Eymard, R. and Herbin, R. (2007).

A new collocated finite volume scheme for the incompressible Navier-Stokes equations on general non matching grids.
C. R. Math. Acad. Sci., 344(10):659–662.



Eymard, R., Herbin, R., Guichard, C., and Masson, R. (2010c).

Multiphase flow in porous media using the vsg scheme.
In *Finite Volumes for Complex Applications VI*.



Eymard, R., Herbin, R., and Latché, J. (2007).

Convergence analysis of a colocated finite volume scheme for the incompressible Navier-Stokes equations on general 2D or 3D meshes.
SIAM J. Numer. Anal., 45(1):1–36.



Herbin, R. and Hubert, F. (2010).

3d benchmark on discretization schemes for anisotropic diffusion problem on general grids.
In *Finite Volumes for Complex Applications VI*.