

UNIVERSITÉ DE MARNE LA VALLÉE

HABILITATION À DIRIGER LES RECHERCHES

Spécialité:

Mathématiques Appliquées

Présentée par:

Roland MASSON

Sujet:

**Contributions à la simulation numérique
des écoulements en milieux poreux
et des modèles stratigraphiques**

Soutenue le 12 janvier 2006 devant le jury composé de:

Mr Benoit Perthame	(Rapporteur)
Mr Yvon Maday	(Rapporteur)
Mr Peter Bastian	(Rapporteur)
Mr Robert EYMARD	(Coordinateur)
Mr Damien Lamberton	(Examineur)
Mr Thierry Gallouët	(Examineur)
Mr Jacques Blum	(Examineur)
Mr Albert Cohen	(Examineur)

Remerciements

Je voudrais adresser tous mes remerciements à l'ensemble des membres du jury. Robert Eymard a présenté mon dossier à l'université de Marne-la-Vallée, c'est un grand plaisir et une chance de pouvoir collaborer avec lui. Peter Bastian, Yvon Maday et Benoit Perthame, malgré leur emploi du temps très chargé, ont eu la gentillesse de rapporter sur ce mémoire et d'être présent dans mon jury, je leur en suis très reconnaissant. Thierry Gallouët et Jacques Blum ont dirigé deux des thèses que j'ai coencadré à l'IFP. J'ai beaucoup apprécié leur enthousiasme et leur bonne humeur dans ce travail, je les remercie de faire partie de mon jury. J'exprime également toute ma gratitude à Damien Lambertson, professeur au laboratoire de Mathématiques de l'université de Marnes-la-Vallée qui a accepté d'être le local de l'étape. Je suis particulièrement touché qu'Albert Cohen est pu se joindre au jury en invité surprise, après avoir encadré ma thèse de doctorat il y a 7 ans déjà.

Alain Bamberger n'a pas pu être présent dans ce jury, je profite de ces quelques lignes pour lui adresser ma reconnaissance pour la confiance qu'il m'a témoigné en me confiant un poste à l'IFP après ma thèse.

Je remercie également chaleureusement les personnes qui sont venus en supporter pour cette soutenance malgré la distance: Frédéric Nataf, Frédéric Coquel et Marie Postel de l'université de Paris VI, Philippe Quandalle, Laurent Trenty, Anthony Michel, Marie Christine Cacas, Gabriela Dobranszky, Elodie Tillier de l'IFP et particulièrement Zakia Benjelloun qui a eu la gentillesse de nous assister Anna et moi dans la préparation du pot. C'est avec beaucoup de plaisir que j'ai fait connaissance avec les autres membres du laboratoire qui ont assisté à cette soutenance ou nous ont rejoint au pot.

Ce travail est le fruit de nombreuses collaborations universitaires. Je remercie à nouveau Robert Eymard, Thierry Gallouët, Jacques Blum, Peter Bastian mais aussi Roland Glowinski avec qui j'ai eu beaucoup de plaisir à travailler lors de leurs visites à l'IFP et qui m'ont beaucoup appris. Il s'est aussi largement nourri de collaborations avec les autres directions de l'IFP, notamment sur les modèles stratigraphiques avec Didier Granjeon et Marie Christine Cacas de la direction Géologie de l'IFP, avec qui il est toujours très agréable de travailler grâce à leurs remarquables intuitions en modélisation et leur facilité à dialoguer avec des mathématiciens.

Ce travail est essentiellement issu des thèses de Véronique Gervais, Sébastien Lacroix, Pierre Bonneau, Gabriela Dobranszky, Stéphanie Gaiffe, et du postdoctorat de Robert Scheichl, je voudrais leur adresser mes remerciements pour y avoir grandement contribué.

Enfin je suis reconnaissant envers l'ensemble des collègues du département mathématiques appliquées, de la direction et plus largement de l'IFP avec qui j'ai beaucoup de plaisir à partager des moments de travail ou de détente dans une ambiance dont j'apprécie beaucoup la convivialité.

Anna a supporté les longues heures de programmation ou de rédaction à domicile, je lui adresse un clin d'oeil pour son soutien et sa compréhension.

Contents

1	Introduction	2
2	Préconditionneurs par blocs pour les écoulements de Darcy polyphasiques en modélisation de bassin et de réservoir [7], [23]	10
2.1	Modèles d'écoulements immiscible et Black Oil	12
2.2	Discrétisation volume fini	15
2.3	Solveurs par blocs de variables	17
2.4	Cas test en simulation de réservoir pour un modèle black oil	23
2.5	Travaux en cours et Perspectives	28
3	Une méthode de décomposition de domaine pour les écoulements monophasiques compressibles [26], [10], [9]	30
3.1	Décomposition de domaine et approximation par EFM avec éléments joints . . .	31
3.2	Une formulation en flux équivalente	32
3.3	Discrétisation en temps par un schéma de projection	33
3.4	Un exemple Numérique	35
4	Modélisation stratigraphique [4], [24], [21], [1], [5], [22], [3]	36
4.1	Modèle multi-lithologique sous contrainte de taux d'érosion maximum [4], [24] .	41
4.2	Simulation numérique [4], [24], [21], [1]	54
4.3	Solveurs non linéaire et linéaire [1]	59
4.4	Analyse mathématique et numérique du modèle multi-lithologique [5], [22], [3] .	71
4.5	Travaux en cours et Perspectives	74
5	Inversion de modèles stratigraphiques [18], [20], [19], [2]	77
5.1	Modèle stationnaire mono-lithologique [18], [20]	82
5.2	Inversion des flux g et des coefficients de diffusion k_m, k_c par calages des données paléo-bathymétriques aux puits	86
5.3	Modèle stationnaire multi-lithologique [18], [20]	89
5.4	Calage des épaisseurs pour le modèle multi-lithologique instationnaire [19], [2] .	95
5.5	Travaux en cours et Perspectives	99

1 Introduction

Les quatre chapitres qui suivent résumant mes principaux travaux de recherches menés à l'Institut Français du Pétrole depuis 1999. Ils sont présentés par domaines d'application: d'une part les écoulements en milieux poreux en simulation de réservoir ou de bassin pour les chapitres 2 et 3, et d'autre part la modélisation stratigraphique directe puis inverse pour les chapitres 4 et 5.

Afin d'en faciliter la lecture, en particulier pour les deux derniers chapitres consacrés à la modélisation stratigraphique, cette introduction propose un guide de lecture par domaines de compétences mises en oeuvre en y incluant les travaux du stage de DEA sur l'approximation spectrale des équations de convection non-Boussinesq et ceux de thèse sur l'approximation des EDPs en bases d'ondelettes.

1.1 Théorie de l'approximation

Travaux de thèse: approximations des EDPs en bases d'ondelettes [11], [12], [13], [14], [15], [16]

Les propriétés de compression, d'analyse "télescopique" des bases d'ondelettes et leur habilité à caractériser les espaces fonctionnels classiques par des normes discrètes des coefficients de la décomposition, en ont fait depuis la fin des années 80 un outil privilégié dans des champs aussi divers que le traitement du signal et d'images, l'analyse mathématique et les statistiques.

Leur application à l'analyse numérique date du début des années 90 avec les travaux précurseurs de [BCR] sur la compression des opérateurs et de [MPR] sur l'adaptativité en bases d'ondelettes. Elles offrent un cadre théorique unifié pour traiter à la fois

- (i) la compression de la représentation matricielle en bases d'ondelettes d'opérateurs dont le noyau intégral possède certaines propriétés de décroissance et de régularité en dehors de la diagonale,
- (ii) le préconditionnement de systèmes linéaires issus de la discrétisation d'opérateurs elliptiques,
- (iii) les approximations adaptatives en bases d'ondelettes de solutions d'EDPs ou de problèmes intégraux.

L'obstacle principal à l'utilisation des bases d'ondelettes en Analyse Numérique reste leur construction sur des domaines assez généraux avec la possibilité d'imposer des conditions aux limites sans dégrader au voisinage du bord du domaine les propriétés d'approximation, de compression et de caractérisation des espaces de Sobolev.

L'approche adoptée dans la thèse a été celle de la décomposition de domaine sans recouvrement. Le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ (ou plus généralement la variété de dimension d) est découpé en sous domaines Ω_i , $i = 1, \dots, N$, disjoints et tels que

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^N \bar{\Omega}_i.$$

Chaque sous domaine est en outre supposé difféomorphe au domaine de référence $\hat{\Omega} =]0, 1[^d$ par la paramétrisation régulière

$$\kappa_i : \overline{\hat{\Omega}} \rightarrow \overline{\Omega}_i.$$

L'avantage est de se ramener à la construction de bases d'ondelettes sur le domaine de référence, qui est une tâche bien plus aisée que la construction sur le domaine Ω . La construction sur les sous domaines s'en déduit simplement par le difféomorphisme régulier κ_i^{-1} et l'essentiel du travail consistera donc à raccorder ces bases aux interfaces de la décomposition $\bigcup_{i=1}^N \partial\Omega_i$.

Dans ce cadre, ma contribution, essentiellement réalisée pendant la thèse, a porté sur les points suivants:

- (1) La construction de bases d'ondelettes sur le domaine de référence qui se ramène par produit tensoriel à l'intervalle $[0, 1]$ où il se traite par restriction et adaptations aux extrémités 0 et 1 d'ondelettes sur la droite réelle (cf [CDF],[Dau]), de façon à préserver les propriétés d'approximation, de stabilité et de compression.

Le travail a consisté à généraliser dans [16], au cadre des ondelettes biorthogonales, pour des ordres d'approximation optimaux et des conditions aux limites quelconques, les constructions initiales de [CDV] et [AJP].

- (2) Le traitement adaptatif des conditions aux limites de Dirichlet non homogènes pour les problèmes du second ordre faisant l'objet de l'article [13].

Ce problème est important pour étendre l'adaptativité en base d'ondelettes aux problèmes avec conditions aux limites non homogènes. Il se ramène à la construction d'une base d'ondelettes sur le domaine Ω , stable dans $H^1(\Omega)$, et dont les traces sur le bord du domaine $\Gamma = \partial\Omega$ (ou une partie Γ_D de celui-ci), définissent une base d'ondelettes stable dans $H^{1/2}(\Gamma)$.

On a défini pour cette étude un cadre théorique qui conduit à la construction d'opérateurs de relèvement stables dans la classe des espaces de Besov.

La mise en oeuvre pratique de ce formalisme est étudiée dans le cadre de la décomposition de domaine où on propose une méthodologie complète pour construire les ondelettes au bord du domaine et aux interfaces de la décomposition.

- (3) Construction de discrétisations en bases d'ondelettes pour le problème de Stokes satisfaisant la condition de Ladyzhenskaya-Babuska-Brezzi (LBB) en formulation vitesse pression.

Dans le cadre d'approximations adaptatives, étant donnée une discrétisation en ondelettes de l'espace de pression, il s'agit de construire une discrétisation en ondelettes *minimale* de l'espace de vitesse, telle que la condition LBB puisse être prouvée. Idéalement, la dimension de cet espace doit être aussi proche que possible de la dimension de l'espace de discrétisation de la pression.

Dans un premier temps, on a prouvé qu'il est toujours possible de construire une telle discrétisation de la vitesse dont la dimension soit proportionnelle à celle de l'espace de pression, avec une constante indépendante de la pression.

En pratique cependant, la constante de proportionnalité est trop élevée de sorte que, en prenant comme point de départ les travaux de [Lem] et [DKU2], on a étudié quelques familles de discrétisations en ondelettes permettant d’obtenir des constantes proches de d voire de 1 pour des constructions sur des domaines tensoriels avec conditions aux limites.

- (4) Stabilisation du problème de Stokes par construction d’un inverse à droite de l’opérateur divergence en base d’ondelettes.

Au lieu de chercher à satisfaire la condition inf-sup, une alternative introduite par Hughes, Franca et Balestra [HFB], consiste à ajouter un terme de stabilisation consistant à l’équation de continuité. Ce terme de stabilisation réalise un contrôle d’une norme discrète de la pression qui garantit le caractère bien posé du problème de Stokes discret stabilisé.

Il est alors naturel d’exploiter les propriétés de représentation des normes de Sobolev et de leurs normes duales par des sommes pondérées des coefficients d’ondelettes, afin de construire de nouveaux opérateurs de stabilisation. Dans [11], nous proposons une nouvelle stabilisation consistante du problème de Stokes qui fournit un contrôle direct de la norme L^2 de la pression indépendamment de tout paramètre de discrétisation. Cette stabilisation s’applique quel que soit l’espace de discrétisation pour la vitesse qui peut donc être non uniforme. Elle s’appuie sur la décomposition de la pression dans une base d’ondelettes biorthogonale et sur la construction d’un inverse à droite local de l’opérateur divergence. Cet opérateur transposé, appliqué au résidu de l’équation de vitesse du problème de Stokes définit le terme de stabilisation consistant à ajouter à l’équation de continuité.

La construction pratique de la base d’ondelettes pour la pression et de l’inverse à droite de la divergence utilise une approche par décomposition de domaine non nécessairement conforme et la construction sur l’intervalle $(0, 1)$ des ondelettes biorthogonales de Cohen-Daubechies-Feauveau [CDF].

1.2 Préconditionnement de grands systèmes linéaires creux issus de la discrétisation des EDPs

Stage de DEA: convection non Boussinesq en discrétisation spectrale [17]

L’objectif était de résoudre par une méthode de collocation spectrale les équations de Navier Stokes en formulation vitesse pression dans l’approximation non Boussinesq de la convection thermique pour une cavité rectangulaire différentiellement chauffée. Pour de forts écarts de températures considérés ici, l’approximation de Boussinesq n’est plus valable et le modèle doit en particulier prendre en compte les variations de viscosité et la conductivité thermique avec la température conduisant à des coefficients variables dans les termes de diffusion.

La principale difficulté consistait alors à construire des preconditionnements efficaces pour les équations de vitesses et de température d’une part et pour l’opérateur d’Uzawa d’autre part (complément de Schur du problème de Stokes généralisé pour la variable pression). L’idée étudiée dans ce travail consistait à utiliser comme preconditionnement une approximation séparable des coefficients variables pour laquelle un solveur exact des opérateurs de diffusion peut être construit par diagonalisation des opérateurs monodimensionnels. Le preconditionnement

de l'opérateur d'Uzawa était obtenu par construction puis factorisation du complément de Schur approché obtenu par les approximations séparables des opérateurs de vitesse.

Travaux de thèse: préconditionnements en base d'ondelettes [13], [12]

Les équations elliptiques sont le domaine d'application naturel des méthodes d'ondelettes dans la mesure où la caractérisation des espaces de Sobolev H^s , par les normes l^2 pondérées des coefficients d'ondelettes, se traduit par un préconditionnement diagonal optimal de la discrétisation en bases d'ondelettes des opérateurs elliptiques coercifs en norme H^s .

On s'est placé dans le cadre de la décomposition de domaine étudiée précédemment pour la construction des bases d'ondelettes et on a étudié et testé numériquement trois types d'opérateurs elliptiques

- (1) opérateurs du second ordre: laplacien et opérateurs à coefficients variables réguliers $-\text{div}A\nabla$,
- (2) opérateur du quatrième ordre: bilaplacien sur un domaine tensoriel,
- (3) un opérateur $H^{-1/2}$ elliptique: l'opérateur de bord $\psi - \omega$ pour le problème de Stokes en formulation $\psi - \omega$.

Afin d'améliorer la robustesse du préconditionnement en bases d'ondelettes on a étudié par ailleurs les techniques d'inverses approchés creux. Ces méthodes sont naturellement performantes en bases d'ondelettes du fait des propriétés dans ces bases de compression des opérateurs et de leurs inverses.

Préconditionnements par blocs de variables pour les systèmes couplés [7], [23], [21], [1]

S'il existe actuellement un cadre bien établi et un large choix de préconditionneurs pour la résolution par méthodes itératives préconditionnées des systèmes linéaires creux issus de la discrétisation des EDPs scalaires, le cas des systèmes d'EDPs couplant implicitement plusieurs variables n'est traité que pour quelques cas particulier comme les problèmes mixtes de type Stokes ou elliptiques de type élasticité.

Dans le cas des écoulements polyphasiques en milieux poreux et de la modélisation stratigraphique, les systèmes d'EDPs couplent implicitement une variable de nature elliptique ou parabolique (appelée pression pour fixer les idées) avec des variables de type hyperboliques (appelées compositions pour fixer les idées). Pour ce type de systèmes, les préconditionnements par blocs de variables et les méthodes combinatives issus des travaux de [Be82], [BV82], [Wa85], [KRW96] en simulation de réservoir permettent d'exploiter efficacement la différence de nature entre la variable elliptique nécessitant un préconditionnement "global" et les variables hyperboliques pouvant se contenter d'un préconditionnement "local".

Notre approche a consisté à combiner ces méthodes aux préconditionnements multigrilles algébriques pour le préconditionnement de "l'équation de pression". La principale difficulté réside dans le choix au niveau algébrique de l'équation pour la variable pression par combinaisons linéaires des lignes permettant à la fois un découplage satisfaisant des variables pression et compositions et une bonne résolution par les méthodes multigrilles algébriques.

1.3 Méthodes de décomposition de domaine [26], [10], [9]

Les méthodes de décomposition de domaine sans recouvrement permettent de résoudre efficacement les hétérogénéités et les singularités géométriques en adaptant la discrétisation en espace dans chaque sous domaine à ces caractéristiques.

La méthode proposée dans [26], [10], [9] pour la résolution d'une EDP parabolique combine ces techniques de discrétisation spatiale avec celles de splitting en temps ou de décomposition d'opérateur de façon à découpler à chaque pas de temps les résolutions dans les sous domaines de celle du problème d'interface.

La discrétisation en espace est de type éléments finis mixtes ou volume fini dans chaque sous domaine. Grosso modo, l'idée du splitting en temps consiste à fixer la pression à l'interface entre les sous domaines par sa valeur au pas de temps précédent (schéma d'ordre 1) ou mieux par une interpolation d'ordre deux des valeurs aux deux pas de temps précédents (schéma d'ordre 2). On peut ensuite résoudre indépendamment les problèmes dans les sous domaines et il reste à mettre à jour la pression d'interface au pas de temps courant en écrivant la continuité des flux à l'interface.

On obtient ainsi un algorithme complètement parallèle et la possibilité d'utiliser des pas de temps locaux dans les sous domaines de façon à traiter adaptativement les différentes échelles de temps du problème.

L'analyse numérique de la méthode utilise une formulation équivalente en flux qui permet de réinterpréter la méthode comme un schéma de projection introduit par Chorin [Cho68]. La version incrémentale (cf [GQ98]) du schéma de projection équivaut à l'interpolation en temps d'ordre 2 de la pression d'interface. On peut alors montrer la stabilité inconditionnelle du schéma et déduire des estimations d'erreurs.

L'application principale visé est celle des écoulements de Darcy monophasiques compressibles qui interviennent dans le cadre des essais de puits lors de la phase de déplétion du réservoir. L'intérêt de la méthode combinant décomposition de domaine sans recouvrement et décomposition d'opérateur est de permettre d'adapter la discrétisation en espace et en temps aux échelles d'espace et de temps ainsi qu'aux hétérogénéités locales en distinguant en particulier le voisinage du puits et le domaine réservoir. Les inconvénients résident dans le caractère non conservatif de la méthode lié au découplage à l'interface entre les sous domaines. et dans la condition de convergence du schéma qui exige en pratique de prendre des pas de temps du même ordre que le pas d'espace. Pour pallier à ces inconvénients il faut veiller à ce que l'interface entre les sous domaines soit situé dans une zone où la pression varie lentement en temps.

1.4 Schémas numériques et analyse numérique [17], [11], [9], [4], [3], [5]

J'ai abordé au cours de mes travaux plusieurs méthodes de discrétisations en espace des EDPs selon les applications concernées en commençant par les méthodes spectrales pour les équations de Navier Stokes incompressibles [17] pendant mon stage de DEA.

Dans le cadre de mes travaux de thèse sur l'approximation adaptatives des EDPs en bases

d'ondelettes, j'ai été amené à m'intéresser aux méthodes de Galerkin et de Petrov Galerkin pour les problèmes elliptiques et aux méthodes mixtes pour le problème de Stokes en formulation vitesse pression (voir ci-dessus).

Par la suite, mes travaux de recherches à l'IFP dans le domaine des géosciences m'ont naturellement porté vers des discrétisations en espace localement conservatives et adaptées aux milieux hétérogènes présentant de fortes discontinuités des propriétés du milieu. Dans [26], [10], [9] les méthodes d'éléments finis mixtes ou de volumes finis sont utilisées dans les sous domaines de la décomposition pour la simulation des écoulements monophasiques compressibles en milieux poreux.

En modélisation stratigraphique [4], les méthodes volumes finis avec variables centrées aux mailles sont particulièrement adaptées pour la discrétisation de systèmes complexes couplant des variables de différentes natures. Dans un contexte de codes de calculs industriels, ces schémas permettent de préserver les propriétés physiques du système d'équations du fait de leurs propriétés de monotonie et de conservativité, et conduisent à des codes performants, robustes avec une relative facilité pour incorporer de nouveaux modules physiques.

On considère le modèle stratigraphique défini dans [4] dans le cas simplifié où les coefficients de diffusion des lithologies sont égaux et sans contrainte sur le taux d'érosion. Dans ce cas, l'inconnue hauteur des sédiments $h(x, t)$ vérifie une équation parabolique qui découple des variables concentrations en lithologies.

Les équations restantes couplent pour chaque lithologie i une équation linéaire du premier ordre pour la concentration des sédiments en surface du bassin $c_i^s(x, t)$ avec une équation d'advection linéaire pour la concentration des sédiments du bassin $c_i(x, z, t)$ qui admet c_i^s comme condition limite entrante à la surface du bassin $z = h(x, t)$ en cas de sédimentation.

Dans ce cas, on introduit dans [5], [22] une définition de solutions du système au sens faible et on prouve la convergence faible du schéma volume fini vers une telle solution.

La démonstration de la convergence du schéma reprend les estimations de [EGH00] en utilisant la similarité du couplage des variables (h, c_i^s) avec celui des variables pression et saturation dans le modèle d'écoulement immiscible en milieux poreux avec mobilités égales et de somme unité. La principale difficulté consiste alors à traiter les termes couplant les concentrations de surface c_i^s avec les concentrations du bassin c_i par la condition limite entrante en surface du bassin.

1.5 Modélisation et analyse mathématiques [4], [3]

Les modèles stratigraphiques utilisés à l'IFP en exploration pétrolière sont des modèles dits diffusifs introduits par Kenyon et Turcotte [KT85]. Ils reposent sur l'écriture de la loi de conservation de la masse des sédiments et la modélisation empirique de lois de transport des sédiments. Le modèle le plus simple (qui donne son nom à ce type de modèles) traduit que le flux de sédiments est proportionnel à la pente de la surface topographique avec un coefficient de proportionnalité fonction de l'environnement de dépôt, conduisant à une équation parabolique non linéaire.

Ce modèle basique doit son succès à sa capacité à représenter aux grandes échelles d'espace et de temps les profils de dépôt en particulier de type cliniformes et les séquences de prograda-

tion et de rétrogradation des deltas sous l'effet des variations eustatiques du niveau de la mer, moyennant l'utilisation d'un coefficient de diffusion non linéaire distinguant la diffusion forte en milieu de dépôt continental (transport par les fleuves) et faible en milieu de dépôt marin (piégeage à l'embouchure des Deltas) (voir [JF91]).

Ce modèle parabolique de base a été depuis son introduction par Kenyon et Turcotte affiné soit par l'ajout d'autres processus de transports de sédiments soit en détaillant la description des sédiments.

En particulier, la disponibilité limitée en sédiments impose un seuil maximal sur le taux d'érosion des sédiments qui viole la loi de transport par diffusion gravitaire. Ce seuil traduit le fait que les sédiments doivent être préalablement rendus meubles par l'attaque climatique avant de pouvoir être transportés par érosion marine, fluviale, éolienne ou gravitaire (voir [AH89], [How94], [G97]).

Une description plus fine des sédiments nécessite de prendre en compte outre la porosité, la granulométrie et la composition en lithologies (comme le sable ou l'argile) des sédiments. La représentation des sédiments comme mélange immiscible de lithologies est à la base du modèle diffusif multi-lithologique introduit par [R92] et étendu dans [G97].

Enfin on est aussi intervenu sur la modélisation du transport fluvial des sédiments qui agit le long des lignes de plus grande pente du réseau hydrographique. Ces modèles nécessitent le calcul du réseau hydrologique de surface et son couplage à la loi de conservation des sédiments par des lois de transport.

De façon à concevoir un schéma numérique du modèle stratigraphique introduit par [G97] pour l'exploration pétrolière, notre première contribution a consisté à formaliser sur le plan mathématique le modèle multi-lithologique introduit au niveau discret par Rivenaes [R92] et Didier Granjeon [G97] de façon à prendre en compte la disponibilité limitée en sédiments ainsi que le couplage avec l'écoulement hydrologique. On a en particulier proposé un modèle mathématique original pour le modèle discret de couplage de la contrainte sur le taux d'érosion avec la loi de conservation des sédiments introduit par Didier Granjeon [G97].

Par la suite, nous avons prouvé dans [5], [3] l'existence et l'unicité d'une solution faible au modèle multi-lithologique et la convergence faible du schéma numérique vers cette solution, en se restreignant au cas simplifié sans contrainte sur le taux d'érosion et pour lequel le calcul des concentrations lithologiques des sédiments découple de celui de la géométrie des couches successives. L'existence d'une solution faible est déduite de la convergence faible du schéma volume fini démontrée dans [5]. L'unicité a recours à l'équation adjointe pour laquelle l'existence d'une solution faible se déduit à nouveau de la convergence du schéma volume fini. Pour en déduire l'unicité on prouve dans [3] deux lemmes d'intégration par parties pour des solutions non régulières des systèmes direct et adjoint.

1.6 Problèmes inverses [18], [20], [19], [2]

Les modèles stratigraphiques sont utilisés dans l'industrie pétrolière en phase d'exploration d'un bassin sédimentaire afin de mieux prédire la géométrie et la nature des roches et donc l'emplacement des réservoirs potentiels. Du fait de leur nature phénoménologique, ils permet-

tent de mieux comprendre la formation du bassin en validant ou non des hypothèses géologiques sur son origine et en donnant une vision quantitative et tridimensionnelle de son évolution.

Aucune des données d'entrée d'un tel modèle n'est directement accessible. Elles doivent donc être estimées par calage des données sismiques et des données de puits. Cette étape est essentielle à la bonne prédictibilité du modèle.

La difficulté de ce problème d'identification de paramètres réside dans la nature hétérogène des paramètres à estimer et des données à caler. En phase d'exploration, les données sismiques et de puits sont peu nombreuses et peu précises du fait de leur nature interprétée. Par ailleurs, le géologue possède des données a priori sur la formation du bassin qui sont difficiles à formaliser et à quantifier.

L'approche proposée pour faire face à ce problème est celle de la *réduction de modèle*. L'idée consiste à définir pour chaque couche successivement considérée un modèle simplifié dit stationnaire au sens où les variations de la hauteur de sédiments déposés sont considérées indépendantes du temps et directement interpolées à partir des données sismiques donnant l'épaisseur de la couche déposée. Moyennant cette hypothèse, on montre alors, en substituant l'inconnue hauteur de sédiments par l'inconnue bathymétrie, que la variation en temps de la solution est trivialement calculée et que le modèle est bien posé dans les variables bathymétrie en fin de séquence et concentration lithologique moyenne de la couche [18], [20].

On obtient ainsi un modèle approché beaucoup moins coûteux que le modèle d'origine et intégrant directement les données sismiques d'épaisseurs des couches.

Dans un premier temps, ce modèle réduit est utilisé directement pour une première estimation des paramètres [20]. Du fait de son très faible coût il est possible avec ce type de modèle d'explorer un ensemble de solutions admissibles calant les données de puits (voir le paragraphe 5.2). Par la suite on envisage d'intégrer dans le processus d'inversion l'expertise du géologue de façon à sélectionner les bonnes solutions admissibles.

Dans un second temps, le modèle réduit est utilisé en tant qu'inverse approché pour le problème inverse de calage des épaisseurs de sédiments dans un algorithme de type quasi Newton ou encore comme préconditionnement de l'algorithme Newton GMRES [2], [19]. On montre en pratique que cette approche est beaucoup plus efficace que l'approximation BFGS et qu'elle évite le calcul coûteux de la matrice Jacobienne pleine et sa factorisation.

2 Préconditionneurs par blocs pour les écoulements de Darcy polyphasiques en modélisation de bassin et de réservoir [7], [23]

Les modèles d'écoulements en milieux poreux polyphasiques en simulation de réservoir ou de bassin conduisent après discrétisation en espace de type volume fini avec inconnues aux centres des mailles, discrétisation en temps de type Euler implicite puis linéarisation de type Newton, à résoudre des systèmes linéaires qui représentent l'essentiel du temps calcul des simulateurs.

Ces systèmes sont creux, de grande taille sur des grilles 3D et mal conditionnés. Ils nécessitent donc une résolution par un algorithme itératif avec un bon préconditionnement. Pour être efficace, un tel préconditionneur doit résoudre un grand nombre de difficultés :

- système couplant plusieurs inconnues par maille à dominante elliptique pour la pression et hyperbolique pour les saturations/compositions,
- système non symétrique,
- fortes hétérogénéités et anisotropies du milieux poreux,
- singularités géométriques (puits, failles),
- maillages non structurés,
- lois de fermetures locales complexes.

Le système d'équations est constitué par les $n_H + 1$ lois de conservation de chacun des constituants (l'eau et n_H constituants hydrocarbures) et la loi de Darcy généralisée pour la vitesse de filtration de chacune des trois phases eau, huile, gaz. Il est complété par les lois de fermeture locales traduisant la conservation du volume de pore, l'équilibre thermodynamique de chacun des constituants dans les trois phases, et définissant les pressions capillaires et les perméabilités relatives de chacune des phases.

On définit un choix de $n_H + 1$ variables primaires qui peut varier d'une maille à l'autre selon son état thermodynamique. Le choix le plus usuel est une pression de phase notée p , les $n_\alpha - 1$ saturations des phases présentes moins une, et $n_H - n_\alpha + 1$ fractions molaires des constituants dans la phase gaz ou huile. Après élimination des lois de fermeture locales linéarisées, on obtient ainsi un système linéaire creux dont les lignes correspondent aux équations de conservation linéarisées et les colonnes aux variables primaires.

Pour fixer les notations, on supposera que $n_H = 2$ et on considère deux représentations matricielles de la Jacobienne, en conservant, pas abus, la même notation dans les deux cas. La première est la représentation par bloc de variables

$$J = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} & J_{23} \\ J_{31} & J_{32} & J_{33} \end{pmatrix},$$

où le bloc J_{ij} représente l'équation de conservation i dérivée par rapport à la variable j ($j = 1$: pression, $j = 2, 3$: saturations/composition). La seconde est une représentation par bloc maille

$$J = (J_{\kappa, \kappa'})_{\kappa, \kappa' \in \mathcal{K}},$$

où les blocs $J_{\kappa, \kappa'}$ sont des matrices 3-3, \mathcal{K} désignant l'ensemble des mailles de la discrétisation volume fini.

Ces systèmes sont résolus à chaque itération de Newton par une méthode de Krylov (GMRES ou BiCGStab) préconditionnée à droite. Parmi les préconditionnements les plus classiques en simulation de réservoir, on compte les factorisations incomplètes ILU(k) opérant par bloc maille ou par point avec un ordonnancement des mailles respectant les colonnes du fait de la géométrie en galette des réservoirs. Dans le cas des maillages structurés, la nested factorization [AC83] qui opère récursivement selon les directions de l'espace est plus efficace que la factorisation ILU(0). Ces méthodes sont bien sûr parallélisées pour s'adapter aux architectures de type cluster.

Néanmoins, les simulations de réservoir et de bassin doivent faire face à l'apparition des maillages non structurés et à l'augmentation de la résolution spatiale et des hétérogénéités des propriétés du milieu poreux. Dans ce contexte, les méthodes classiques ne sont plus suffisantes pour résoudre efficacement les simulations les plus raides.

Partant de ce constat, notre contribution a consisté à étudier une classe de préconditionnements par blocs de variables issu des travaux de [Be82], [BV82], [Wa85], [KRW96] et à combiner ces approches aux méthodes multigrilles algébriques pour le préconditionnement de "l'équation en pression".

Ces préconditionneurs par blocs de variables distinguent dans le système d'équations la variable pression de type elliptique conduisant à un bloc pression raide qui nécessite un préconditionnement global, et les variables saturations/compositions de type hyperbolique dont les blocs diagonaux ne nécessitent qu'un préconditionnement local.

Les difficultés de cette approche portent sur trois points:

- la définition de l'équation en pression par combinaisons linéaires des $n_H + 1$ équations de conservations de chaque maille. Ces combinaisons linéaires sont choisies de façon à découpler au mieux la variable pression des autres variables et à obtenir un bloc pression le plus proche d'un opérateur elliptique discret.
- Choisir un bon préconditionnement du bloc pression résultant. Nous avons étudié plusieurs choix de méthodes multi-échelles adaptées aux problèmes elliptiques hétérogènes, anisotropes comme les méthodes Multigrilles Algébriques AMG, les factorisations multi-échelles MILU [BW99] et ARMS [SS02]. Nous avons retenu finalement les méthodes AMG (AMG1R5 [RS86] ou BoomerAMG ([HY02]) de la librairie parallèle HYPRE) qui offrent sur nos systèmes un meilleur compromis coût/efficacité et se parallélisent efficacement.
- recoupler les variables pression et saturations/compositions par une méthode de type Jacobi ou Gauss Seidel par blocs de variables, ou encore par une méthode Combinative introduite par [Be82], [BV82], [Wa85], [KRW96].

Ces travaux ont été menés en collaboration avec P. Bonneau, S. Lacroix, P. Quandalle, S. Requena de l'IFP, Y. Achdou de l'université Paris VII, R. Scheichl de l'université de Bath, Y. Vassilevski de l'Institut de Mathématiques Numériques de Moscou. Les articles [7], [23] issus de ces travaux portent spécifiquement sur la simulation de bassin alors que les articles [LVW01], [LVWW02] publiés dans le cadre de cette collaboration par S. Lacroix, Y. Vassilevski, M.F. Wheeler et J. Wheeler traitent spécifiquement de la simulation de réservoir.

Ils ont fait l'objet à l'IFP de la thèse de S. Lacroix, du stage postdoctoral de R. Scheichl et se poursuivent dans le cadre de la thèse en cours de P. Bonneau.

2.1 Modèles d'écoulements immiscible et Black Oil

On rappelle succinctement l'écriture du modèle black oil, le plus simple et le plus utilisé en simulation de réservoir.

2.1.1 Modèle immiscible

Pour simplifier la présentation, considérons tout d'abord un modèle immiscible à NP phases pour lequel il n'y a pas d'échange de matières entre les constituants alors confondus avec les phases. On note p la pression et on néglige pour simplifier les effets de capillarité. Les saturations définies comme les fractions volumiques des phases dans le volume de pore sont notées $S = (S_\alpha, \alpha = 1, \dots, NP)$.

Les propriétés statiques de la roche sont définies par le tenseur de perméabilité absolue K et la porosité ϕ .

Les propriétés dynamiques des fluides sont définies par les perméabilités relatives $k_{r,\alpha}(S)$ et les viscosités dynamiques $\mu_\alpha(p)$, et les lois d'état thermodynamique par les densités des phases $\rho_\alpha(p)$.

La conservation des NP constituants conjuguée aux lois de Darcy généralisées aux écoulements polyphasiques conduit au système d'équations suivant sur le domaine $\Omega \times (0, T)$

$$\begin{cases} \partial_t (\rho_\alpha(p) \phi S_\alpha) + \operatorname{div} \left(-\frac{\rho_\alpha(p) k_{r,\alpha}(S)}{\mu_\alpha(p)} K (\nabla p - \rho_\alpha \mathbf{g}) \right) = 0, \\ \sum_{\alpha} S_\alpha = 1, \end{cases} \quad (1)$$

avec des conditions aux limites aux parois de type flux nuls ou aquifère (pression p imposée et eau entrante si la phase eau est entrante), et des conditions aux limites pour les puits injecteurs et les puits producteurs.

2.1.2 Modèle black oil

Il s'agit d'un modèle triphasique avec échange de masses entre les phases huile (o) et gaz (g). Les échanges avec la phase eau ne sont pas considérés. Le modèle comporte trois constituants, l'eau (w) qui coïncide avec la phase eau (w), un constituant hydrocarbure lourd (h) et un léger (l). De plus la phase gaz n'est constituée que du constituant léger (l) alors que la phase

huile peut contenir à la fois le constituant lourd (h) qui lui est constitutif (ie sous forme huile aux conditions de stockage en surface) et le constituant léger (l) dissous (sous forme gaz aux conditions de stockage en surface).

D'après la loi de Gibbs, l'équilibre diphasique (o)-(g) à deux constituants (h)-(l) ne dépend que de la pression p (la température est supposée fixe). L'équilibre est caractérisé par les lois d'état de densités $\bar{\rho}_o(p)$ et $\bar{\rho}_g(p)$, de viscosités $\bar{\mu}_o(p)$ et $\bar{\mu}_g(p)$, et par la fraction massique $\bar{c}(p)$ du constituant léger (l) dans dans la phase huile (o). La notation barrée signifie que les grandeurs sont à l'équilibre données par les lois d'états fonction de la pression, la notation non barrée ne précise pas s'il y a équilibre ou non.

Pour définir ρ_o , ρ_g , et c , on introduit traditionnellement les facteurs de volumes b_o , b_g et r_s entre les conditions courantes de pression p et les conditions de pression de stockage ($p = p_s$), définis comme suit:

$$\begin{aligned}\bar{b}_o &= \frac{\text{volume du constituant lourd à } p_s \text{ de l'huile à } p}{\text{volume de la phase huile à } p} \\ \bar{r}_s &= \frac{\text{volume du constituant léger à } p_s \text{ de l'huile à } p}{\text{volume du constituant lourd à } p_s \text{ de l'huile à } p} \\ \bar{b}_g &= \frac{\text{volume du constituant léger à } p_s \text{ du gaz à } p}{\text{volume de la phase gaz à } p}\end{aligned}$$

De même, on notera

$$\bar{b}_w = \frac{\text{volume de l'eau à } p_s}{\text{volume de l'eau à } p}.$$

En notant $\rho_{s,l}$, $\rho_{s,h}$ et $\rho_{s,w}$ les densités à la pression de stockage p_s , on a les relations:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho_o = (\rho_{s,l} r_s + \rho_{s,h}) b_o, \\ \rho_g = \rho_{s,l} b_g, \\ \rho_w = \rho_{s,w} b_w, \\ c = \frac{\rho_{s,l} r_s}{\rho_{s,l} r_s + \rho_{s,h}}, \\ \rho_o c = \rho_{s,l} r_s b_o, \\ \rho_o (1 - c) = \rho_{s,h} b_o, \end{array} \right.$$

et la thermodynamique du système black oil est donné par les lois $\bar{r}_s(p)$, $\bar{b}_o(p)$, $\bar{b}_g(p)$, $\bar{b}_w(p)$, $\bar{\mu}_o(p)$, $\bar{\mu}_g(p)$, et $\bar{\mu}_w(p)$ dont les signes et variations sont les suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{r}_s(p) \geq 0, \quad \bar{r}'_s(p) > 0, \\ \bar{b}_o(p) > 0, \quad \bar{b}'_o(p) < 0, \\ \bar{b}_g(p) > 0, \quad \bar{b}'_g(p) > 0, \\ \bar{\mu}_o(p) > 0, \quad \bar{\mu}'_o(p) < 0, \\ \bar{\mu}_g(p) > 0, \quad \bar{\mu}'_g(p) > 0, \\ \bar{\mu}_w(p) > 0, \quad \bar{\mu}'_w(p) > 0. \end{array} \right.$$

Les changements de phases déterminent les passages entre l' état triphasique (w)-(o)-(g) à l'équilibre thermodynamique et l'état diphasique (w)-(o). Ils s'écrivent sous la forme des conditions d'unilatéralité suivantes

$$\begin{cases} S_g (\bar{r}_s(p) - r_s) = 0, \\ S_g \geq 0, \\ (\bar{r}_s(p) - r_s) \geq 0. \end{cases}$$

On parle d'huile sous saturée ($r_s < \bar{r}_s(p)$) pour l'état diphasique (w)-(o) et d'huile saturée ($r_s = \bar{r}_s(p)$) pour l' état triphasique (w)-(o)-(g).

En notant \bar{p}_b la fonction inverse de \bar{r}_s , on introduit la pression de bulle $p_b = \bar{p}_b(r_s)$ et l'apparition de la phase gaz s'effectue lorsque la pression passe en dessous de la pression de bulle ie $p < p_b$, alors que la disparition de la phase gaz a lieu lorsque le gaz disparaît ($S_g < 0$).

En introduisant les compressibilités $c_{b_o} \geq 0$ et $c_{\mu_o} \geq 0$ pour l'huile sous saturée, les lois d'état des huiles sous saturée et saturée s'écrivent sous la forme unifiée suivante

$$\begin{cases} p_b = \bar{p}_b(r_s), \\ \rho_o = (\rho_{s,l} r_s + \rho_{s,h}) b_o(p_b, p), \\ \mu_o(p_b, p) = \bar{\mu}_o(p_b) + c_{\mu_o}(p - p_b), \\ b_o(p_b, p) = \bar{b}_o(p_b) + c_{b_o}(p - p_b). \end{cases} \quad (2)$$

On en déduit les lois de conservations des constituants (w)-(h)-(l):

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \left(\rho_w^s \phi \bar{b}_w(p) S_w \right) + \operatorname{div} \left(-\rho_w^s \frac{\bar{b}_w(p) k_{r,w}(S)}{\bar{\mu}_w(p)} K(\nabla p - \rho_w \mathbf{g}) \right) = 0, \\ \partial_t \left(\rho_h^s \phi b_o(p_b, p) S_o \right) + \operatorname{div} \left(-\rho_h^s \frac{b_o(p_b, p) k_{r,o}(S)}{\mu_o(p_b, p)} K(\nabla p - \rho_o \mathbf{g}) \right) = 0, \\ \partial_t \left(\rho_l^s \phi \left[b_o(p_b, p) r_s S_o + \bar{b}_g(p) S_g \right] \right) + \operatorname{div} \left(-\rho_l^s \frac{b_o(p_b, p) r_s k_{r,o}(S)}{\mu_o(p_b, p)} K(\nabla p - \rho_o \mathbf{g}) \right) \\ \quad + \operatorname{div} \left(-\rho_l^s \frac{\bar{b}_g(p) k_{r,g}(S)}{\bar{\mu}_g(p)} K(\nabla p - \rho_g \mathbf{g}) \right) = 0, \\ S_w + S_o + S_g = 1, \\ S_g (\bar{r}_s(p) - r_s) = 0, \\ S_g \geq 0, \\ (\bar{r}_s(p) - r_s) \geq 0, \end{array} \right. \quad (3)$$

avec

$$\begin{cases} p_b = \bar{p}_b(r_s), \\ \rho_o = (\rho_{s,l} r_s + \rho_{s,h}) b_o(p_b, p), \\ \rho_g = \rho_{s,l} \bar{b}_g(p), \\ \rho_w = \rho_{s,w} \bar{b}_w(p), \\ \mu_o(p_b, p) = \bar{\mu}_o(p_b) + c_{\mu_o}(p - p_b), \\ b_o(p_b, p) = \bar{b}_o(p_b) + c_{b_o}(p - p_b). \end{cases} \quad (4)$$

Pour fermer le système, on considèrera le modèle triphasique simplifié suivant des perméabilités relatives:

$$\begin{cases} k_{r,w}(S) = S_w^{n_w}, \\ k_{r,o}(S) = \frac{S_w}{S_w + S_g} S_o^{n_{ow}} + \frac{S_g}{S_w + S_g} S_o^{n_{og}}, \\ k_{r,g}(S) = S_g^{n_g}, \end{cases} \quad (5)$$

avec $n_w, n_g \geq 1$, $n_{ow} > 1$, $n_{og} > 1$.

2.2 Discrétisation volume fini

On considère un maillage volume fini admissible du domaine Ω défini comme le triplet $(\mathcal{K}, \Sigma_{int}, \mathcal{P})$ vérifiant la définition suivante (voir [EGH00]).

Définition 2.1 (Maillage volume fini admissible) *Soit \mathcal{K} l'ensemble des volumes de contrôle, ouverts disjoints du domaine Ω , $\mathcal{P} = (x_\kappa)_{\kappa \in \mathcal{K}}$ une famille de points de Ω associés à chaque volume de contrôle tels que $x_\kappa \in \bar{\kappa}$, et Σ_{int} l'ensemble des arêtes intérieures σ du maillage telles qu'il existe $\kappa, \kappa' \in \mathcal{K}$, $\kappa \neq \kappa'$, avec $m(\bar{\kappa} \cap \bar{\kappa}') > 0$ et $\sigma = \bar{\kappa} \cap \bar{\kappa}'$ (notée par la suite $\kappa|\kappa'$), où m est la mesure de Lebesgue en dimension $d - 1$. Le triplet $(\mathcal{K}, \Sigma_{int}, \mathcal{P})$ définit un maillage admissible ssi les propriétés suivantes sont satisfaites :*

- (i) $\bigcup_{\kappa \in \mathcal{K}} \bar{\kappa} = \bar{\Omega}$,
- (ii) chaque arête intérieure $\sigma \in \Sigma_{int}$ est incluse dans un hyperplan de \mathbb{R}^d ,
- (iii) pour toute arête intérieure $\sigma = \kappa|\kappa'$, on a $x_\kappa \neq x_{\kappa'}$ et la droite joignant les points x_κ et $x_{\kappa'}$ est orthogonale à σ ,
- (iv) pour tout $\kappa \in \mathcal{K}$, il existe un sous ensemble noté Σ_κ de Σ_{int} tel que $\partial\kappa \setminus \partial\Omega = \bar{\kappa} \setminus (\kappa \cup \partial\Omega) = \bigcup_{\sigma \in \Sigma_\kappa} \bar{\sigma}$.

Pour les conditions limites de type Dirichlet, on notera $\Sigma_b = \{\sigma = \partial\kappa \cap \partial\Omega \mid \kappa \in \mathcal{K}, \text{mes}(\partial\kappa \cap \partial\Omega) \neq 0\}$ l'ensemble des arêtes de bord, et on supposera que pour chaque arête de bord $\sigma \in \Sigma_b = \partial\kappa \cap \partial\Omega$, il existe un point x_σ tel que x_σ, x_κ est perpendiculaire à l'arête σ au point x_σ .

De plus on notera

$|\kappa|$ (resp. $|\sigma|$, $|\partial\kappa \cap \partial\Omega|$) la mesure de Lebesgue en dimension d de la cellule κ (resp. la mesure de Lebesgue en dimension $(d - 1)$ de l'arête intérieure σ , et de l'arête de bord $\partial\kappa \cap \partial\Omega$),

\mathcal{K}_κ l'ensemble des cellules voisines de la cellule κ (à l'exclusion de κ),

K_κ la perméabilité absolue de la maille κ , considérée scalaire (i.e. tenseur isotrope) pour simplifier,

$d(\kappa, \kappa')$ désigne la distance entre les points x_κ et $x_{\kappa'}$,

$n_{\kappa|\kappa'}$ le vecteur unitaire normal à l'arête $\kappa|\kappa'$ et sortant de la cellule κ .

Soit $\sigma = \kappa\kappa'$ l'arête commune à deux mailles adjacentes κ et κ' , et x_σ l'intersection du segment $x_\kappa, x_{\kappa'}$ avec l'arête σ . On notera $d(\sigma, \kappa')$ (resp. $d(\sigma, \kappa)$) la distance entre les points x_σ et $x_{\kappa'}$ (resp. x_κ).

De même, soit $\sigma \in \Sigma_b = \partial\kappa \cap \partial\Omega$ et x_σ l'intersection du segment x_σ, x_κ avec l'arête σ . On notera $d(\sigma, \kappa)$ la distance entre les points x_σ et x_κ .

La discrétisation en temps est définie par la suite $t^n, n \in \mathbb{N}$ telle que $t^0 = 0$, et $\Delta t^{n+1} := t^{n+1} - t^n > 0$. L'indice $n, n \in \mathbb{N}$, signifiera implicitement que les variables sont considérées au temps t^n .

2.2.1 Discrétisation volume fini du modèle immiscible

Le schéma en temps est un schéma d'Euler implicite. On traitera de façon explicite les densités dans les termes de gravité, tous les autres termes sont traités implicitement. Le schéma en

espace effectue un décentrage amont par phase des termes situés devant la vitesse de phase de Darcy, y compris ceux ne dépendant que de la pression (densités et viscosités). Ceci est justifié dans le cas black oil (ou plus généralement compositionnel) car les densités et viscosités de la phase huile dépendent à la fois de la pression et de la fraction massique du constituant léger dans l'huile et doivent donc être décentrés. Pour deux mailles κ, κ' partageant l'arête $\sigma = \kappa\kappa'$, on note

$$\Delta\phi_{\kappa,\kappa'}^{\alpha,n+1} = \left(p_{\kappa}^{n+1} - \rho_{\alpha,\kappa,\kappa'}^n g z_{\kappa} - p_{\kappa'}^{n+1} + \rho_{\alpha,\kappa,\kappa'}^n g z_{\kappa'} \right).$$

On obtient

$$\left\{ \begin{aligned} & \phi_{\kappa} \left(\rho_{\alpha}(p_{\kappa}^{n+1}) S_{\alpha,\kappa}^{n+1} - \rho_{\alpha}(p_{\kappa}^n) S_{\alpha,\kappa}^n \right) \frac{|\kappa|}{\Delta t} + \sum_{\kappa' \in \mathcal{K}_{\kappa}} T_{\kappa,\kappa'} \frac{\rho_{\alpha}(p_{\kappa,\kappa',\alpha}^{n+1}) k_{r,\alpha}(S_{\kappa,\kappa',\alpha}^{n+1})}{\mu_{\alpha}(p_{\kappa,\kappa',\alpha}^{n+1})} \Delta\phi_{\kappa,\kappa'}^{\alpha,n+1} \\ & + \sum_{\mathcal{K}_{\text{prod}} \cap \{\kappa\}} \text{IP}_{\kappa} \frac{\rho_{\alpha}(p_{\kappa}^{n+1}) k_{r,\alpha}(S_{\kappa}^{n+1})}{\mu_{\alpha}(p_{\kappa}^{n+1})} \left(p_{\kappa}^{n+1} - \bar{p}_{\kappa}^n \right)^+ + \sum_{\mathcal{K}_{\text{inj}} \cap \{\kappa\}} Q_{\alpha,\kappa} \\ & + \sum_{\sigma_a \in \Sigma_a \cap \partial\kappa} T_{\sigma_a} \frac{\rho_{\alpha}(p_{\sigma_a,\alpha}^{n+1}) k_{r,\alpha}(S_{\sigma_a,\alpha}^{n+1})}{\mu_{\alpha}(p_{\sigma_a,\alpha}^{n+1})} \left(p_{\kappa}^{n+1} - \rho_{\alpha,\kappa}^n g z_{\kappa} - p_{\sigma_a} + \rho_{\alpha,\kappa}^n g z_{\sigma_a} \right) = 0, \\ & \sum_{\alpha} S_{\alpha,\kappa}^{n+1} = 1 \end{aligned} \right. \quad (6)$$

où

$$T_{\kappa,\kappa'} = \frac{|\kappa\kappa'|}{\frac{d(\sigma,\kappa)}{K_{\kappa}} + \frac{d(\sigma,\kappa')}{K_{\kappa'}}$$

est la transmissivité de l'arête $\kappa\kappa'$,

$$T_{\sigma_a} = \frac{|\sigma_a|}{d(\sigma_a, \kappa)} K_{\kappa}$$

la transmissivité de l'arête de bord σ_a , IP_{κ} est l'indice de productivité de la perforation de la maille puits producteur $\kappa \in \mathcal{K}_{\text{prod}}$ avec \bar{p}_{κ}^n sa pression prise explicite (la partie positive indique que le puits est fermé si il devient injecteur), $Q_{\alpha,\kappa}$ est le débit injecté dans la perforation $\kappa \in \mathcal{K}_{\text{inj}}$, et p_{σ_a} la pression de l'aquifère sur l'arête frontière en contact avec l'aquifère $\sigma_a \in \Sigma_a \subset \Sigma_b$. On a noté

$$S_{\sigma_a}^{n+1} = \begin{cases} S_{\text{eau}} = (1, 0, \dots, 0) & \text{si } \left(p_{\kappa}^{n+1} - \rho_{\alpha,\kappa}^n g z_{\kappa} - p_{\sigma_a} + \rho_{\alpha,\kappa}^n g z_{\sigma_a} \right) < 0, \\ S_k^{n+1} & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$p_{\sigma_a,\alpha}^{n+1} = \begin{cases} p_{\sigma_a} & \text{si } \left(p_{\kappa}^{n+1} - \rho_{\alpha,\kappa}^n g z_{\kappa} - p_{\sigma_a} + \rho_{\alpha,\kappa}^n g z_{\sigma_a} \right) < 0, \\ p_k^{n+1} & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$p_{\kappa,\kappa',\alpha}^{n+1} = \begin{cases} p_{\kappa}^{n+1} & \text{si } \Delta\phi_{\kappa,\kappa'}^{\alpha,n+1} > 0, \\ p_{\kappa'}^{n+1} & \text{sinon,} \end{cases}$$

$$S_{\kappa,\kappa',\alpha}^{n+1} = \begin{cases} S_{\kappa}^{n+1} & \text{si } \Delta\phi_{\kappa,\kappa'}^{\alpha,n+1} > 0, \\ S_{\kappa'}^{n+1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

2.2.2 Discrétisation volume fini du modèle black oil

Les principes de la discrétisation sont les mêmes que dans le cas immiscible, pour simplifier on n'écrira pas les termes de production, d'injection et d'aquifère qui sont similaires au cas immiscible.

$$\left\{ \begin{array}{l}
 \rho_w^s \phi_\kappa \left(\bar{b}_w(p_\kappa^{n+1}) S_{w,\kappa}^{n+1} - \bar{b}_w(p_\kappa^n) S_{w,\kappa}^n \right) \frac{|\kappa|}{\Delta t} \\
 + \sum_{\kappa' \in \mathcal{K}_\kappa} T_{\kappa,\kappa'} \rho_w^s \frac{\bar{b}_w(p_{\kappa,\kappa',w}^{n+1}) k r_w(S_{\kappa,\kappa',w}^{n+1})}{\bar{\mu}_w(p_{\kappa,\kappa',w}^{n+1})} \Delta \phi_{\kappa,\kappa'}^{w,n+1} = 0, \\
 \rho_h^s \phi_\kappa \left(b_o(p_{b,\kappa}^{n+1}, p_\kappa^{n+1}) S_{o,\kappa}^{n+1} - b_o(p_{b,\kappa}^n, p_\kappa^n) S_{o,\kappa}^n \right) \frac{|\kappa|}{\Delta t} \\
 + \sum_{\kappa' \in \mathcal{K}_\kappa} T_{\kappa,\kappa'} \rho_h^s \frac{b_o(p_{b,\kappa,\kappa',o}^{n+1}, p_{\kappa,\kappa',o}^{n+1}) k r_o(S_{\kappa,\kappa',o}^{n+1})}{\mu_o(p_{b,\kappa,\kappa',o}^{n+1}, p_{\kappa,\kappa',o}^{n+1})} \Delta \phi_{\kappa,\kappa'}^{o,n+1} = 0, \\
 \rho_l^s \phi_\kappa \left(b_o(p_{b,\kappa}^{n+1}, p_\kappa^{n+1}) r_{s,\kappa}^{n+1} S_{o,\kappa}^{n+1} - b_o(p_{b,\kappa}^n, p_\kappa^n) r_{s,\kappa}^n S_{o,\kappa}^n \right) \frac{|\kappa|}{\Delta t} \\
 + \rho_l^s \phi_\kappa \left(\bar{b}_g(p_\kappa^{n+1}) S_{g,\kappa}^{n+1} - \bar{b}_g(p_\kappa^n) S_{g,\kappa}^n \right) \frac{|\kappa|}{\Delta t} \\
 + \sum_{\kappa' \in \mathcal{K}_\kappa} T_{\kappa,\kappa'} \rho_l^s \frac{b_o(p_{b,\kappa,\kappa',o}^{n+1}, p_{\kappa,\kappa',o}^{n+1}) r_{s,\kappa,\kappa',o}^{n+1} k r_o(S_{\kappa,\kappa',o}^{n+1})}{\mu_o(p_{b,\kappa,\kappa',o}^{n+1}, p_{\kappa,\kappa',o}^{n+1})} \Delta \phi_{\kappa,\kappa'}^{o,n+1} \\
 + \sum_{\kappa' \in \mathcal{K}_\kappa} T_{\kappa,\kappa'} \rho_l^s \frac{\bar{b}_g(p_{\kappa,\kappa',g}^{n+1}) k r_g(S_{\kappa,\kappa',g}^{n+1})}{\bar{\mu}_g(p_{\kappa,\kappa',g}^{n+1})} \Delta \phi_{\kappa,\kappa'}^{g,n+1} = 0, \\
 S_{w,\kappa}^{n+1} + S_{o,\kappa}^{n+1} + S_{g,\kappa}^{n+1} = 1, \\
 S_{g,\kappa}^{n+1} (\bar{r}_s(p_\kappa^{n+1}) - r_{s,\kappa}^{n+1}) = 0, \\
 S_{g,\kappa}^{n+1} \geq 0, \\
 (\bar{r}_s(p_\kappa^{n+1}) - r_{s,\kappa}^{n+1}) \geq 0.
 \end{array} \right.$$

La résolution de ce système non linéaire s'effectue par un algorithme de Newton adapté à la contrainte unilatérale. On introduit un indice de phase $\mathcal{I} = \mathcal{I}_\kappa$, $\kappa \in \mathcal{K}$ où $\mathcal{I}_\kappa = 2$ en diphasique (w)-(o) ie avec $S_{g,\kappa} = 0$, et $\mathcal{I}_\kappa = 3$ en triphasique (w)-(o)-(g) ie $r_{s,\kappa} = \bar{r}_s(p_\kappa)$. Le pas de Newton s'effectue à indice de phase fixé selon les variables $(p, S_w, S_g)_\kappa$ si $\mathcal{I}_\kappa = 3$ et $(p, S_w, r_s)_\kappa$ si $\mathcal{I}_\kappa = 2$. Suite à la mise à jour des variables, les contraintes $S_{g,\kappa}^{n+1} \geq 0$ et $(\bar{r}_s(p_\kappa^{n+1}) - r_{s,\kappa}^{n+1}) \geq 0$ sont testées et conduisent à la mise à jour de l'indice de phase ie à la disparition ou à l'apparition de la phase gaz.

2.3 Solveurs par blocs de variables

Pour fixer les idées, on illustrera la démarche dans le cas de trois équations par maille, correspondant au modèle triphasique immiscible ou au modèle black oil avec comme inconnues primaires (p, S_w, S_g) dans les cas triphasiques ou (p, S_w, r_s) dans le cas diphasique sous saturé.

La classe de préconditionnements étudiée exploite la différence de nature des variables pression p et saturations/composition $c = (S_w, S_g)$ ou $c = (S_w, r_s)$ en procédant en trois étapes.

(i) On définit, par combinaisons linéaires des trois équations de chaque maille $\kappa \in \mathcal{K}$, une "équation de pression" pour le "mélange" des fluides dans le but de découpler au maximum

la variable p des variables c et de définir un bloc pression le plus proche d'un système de type elliptique discret.

Ce bloc pression est typiquement la somme de trois termes, un terme d'accumulation diagonal que l'on souhaite positif ou nul correspondant à une compressibilité positive du mélange, un terme de diffusion que l'on souhaite idéalement symétrique défini positif, et un terme de "convection" correspondant aux dérivées des lois d'états non linéaires en pression dans le terme de flux. Pour ce dernier terme, on souhaiterait grace au décentrage que sa diagonale soit positive et les termes hors diagonaux négatifs.

On notera

$$G J = A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix},$$

le système après l'opération de découplage qui revient à multiplier la Jacobienne J par la matrice

$$G = \begin{pmatrix} \ddots & 0 & 0 \\ 0 & G_{\kappa,\kappa} & 0 \\ 0 & 0 & \ddots \end{pmatrix}$$

dans la représentation bloc maille où les matrices $G_{\kappa,\kappa}$ sont carrées de dimension 3 inversibles.

(ii) Le bloc A_{11} est préconditionné par une méthode multigrille algébrique adaptée à la nature a priori de type convection diffusion hétérogène anisotrope de l'opérateur A_{11} .

(iii) Il faut ensuite définir une méthode de recouplage de la variable p et des variables c par un préconditionnement du système complet.

Plusieurs approches sont possibles. La méthode la plus simple consiste à construire globalement un préconditionnement de type Gauss Seidel ou Jacobi par blocs de variables. Dans ce cas, les préconditionnements C_{22} et C_{33} des blocs A_{22} et A_{33} sont choisis locaux du fait du caractère convectif dominant de ces opérateurs. En pratique il s'agira d'un préconditionnement ILU(0), Jacobi ou Gauss Seidel opérant par point ou par bloc maille.

Par exemple, on obtient les préconditionnements Gauss Seidel par blocs de variables C_{BGS1}^{-1} ou C_{BGS2}^{-1} ci-dessous selon que l'on résout en premier lieu la variable pression ou la variable saturation/composition indiquée 3:

$$C_{BGS1}^{-1} = \begin{pmatrix} C_{amg} & 0 & 0 \\ A_{2,1} & C_{2,2} & 0 \\ A_{3,1} & A_{3,2} & C_{3,3} \end{pmatrix}^{-1}$$

$$C_{BGS2}^{-1} = \begin{pmatrix} C_{amg} & A_{1,2} & A_{1,3} \\ 0 & C_{2,2} & A_{2,3} \\ 0 & 0 & C_{3,3} \end{pmatrix}^{-1}$$

Cette stratégie de recouplage peut s'avérer insuffisante si le couplage des variables p et c est fort malgré l'étape de découplage $A = GJ$.

On peut alors combiner un premier préconditionnement local du système complet comme ILU(0), introduisant un meilleur couplage entre les variables, avec l'un ou l'autre des préconditionneurs

précédents de façon multiplicative. On obtient par exemple

$$C_{Comb} = C_{ILU0}^{-1} + C_{BGS2}^{-1} \left(I - A C_{ILU0}^{-1} \right).$$

Une variante, dite ‘‘Constrained Pressure Residual’’ ou CPR introduite par Wallis [Wa85], consiste à ne mettre à jour que la pression après le premier préconditionnement ILU(0) du système global de sorte que

$$C_{CPR} = C_{ILU0}^{-1} + \begin{pmatrix} C_{amg}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \left(I - A C_{ILU0}^{-1} \right).$$

2.3.1 Choix du découplage G

L’opération de découplage est nécessaire pour définir un bloc pression A_{11} de type convection diffusion avec au minimum une diagonale strictement positive, pas de termes hors diagonaux positifs, et autant que possible une diagonale dominance, dans la limite des termes de convection liés aux non linéarités en pression des densités, viscosités et compositions. Le deuxième objectif est de découpler au mieux les variables pression p et saturations/composition c .

Le bloc pression A_{11} est défini par le choix des coefficients $G_{\kappa,\kappa}^1 = \left(G_{\kappa,\kappa}^{11}, G_{\kappa,\kappa}^{12}, G_{\kappa,\kappa}^{13} \right)$ de la matrice de découplage G . Dans les cas immiscibles et diphasique (o)-(w) black oil, il est clair que ces coefficients doivent être positifs strictement pour garantir une diagonale positive du bloc pression et des termes hors diagonaux négatifs. Ils doivent être de plus uniformément majorés et minorés indépendamment des variables primaires pour que le bloc pression corresponde à un opérateur de convection diffusion discret. Dans le cas triphasique black oil ou plus généralement compositionnel, ces conditions sur G ne sont néanmoins plus suffisantes.

De plus, il est essentiel de préserver au mieux dans A_{11} la symétrie des termes de diffusion des blocs J_{1j} , $j = 1, 2, 3$, ce qui s’obtient par des coefficients $G_{\kappa,\kappa}^1$ variants peu d’une maille à ses voisines. A contrario, cette symétrie est clairement détruite dans le cas du découplage $G_{\kappa,\kappa} = A_{\kappa,\kappa}^{-1}$ classiquement utilisé en simulation de réservoir. Un tel choix se traduit alors par une forte dégradation de la méthode AMG dans les cas hétérogènes du fait des fortes variations de $G_{\kappa,\kappa}^1$.

Soit

$$J_{\kappa,\kappa} = \begin{pmatrix} J_{\kappa,\kappa}^{1,1} & J_{\kappa,\kappa}^{1,2} & J_{\kappa,\kappa}^{1,3} \\ J_{\kappa,\kappa}^{2,1} & J_{\kappa,\kappa}^{2,2} & J_{\kappa,\kappa}^{2,3} \\ J_{\kappa,\kappa}^{3,1} & J_{\kappa,\kappa}^{3,2} & J_{\kappa,\kappa}^{3,3} \end{pmatrix}$$

et

$$M_{\kappa,\kappa} = \begin{pmatrix} M_{\kappa,\kappa}^{1,1} & M_{\kappa,\kappa}^{1,2} & M_{\kappa,\kappa}^{1,3} \\ M_{\kappa,\kappa}^{2,1} & M_{\kappa,\kappa}^{2,2} & M_{\kappa,\kappa}^{2,3} \\ M_{\kappa,\kappa}^{3,1} & M_{\kappa,\kappa}^{3,2} & M_{\kappa,\kappa}^{3,3} \end{pmatrix}$$

le bloc des termes d’accumulation de la Jacobienne pour la maille κ . Nous avons étudié trois choix classiques des coefficients $G_{\kappa,\kappa}^1$.

Conservation globale: le premier choix $G_{1,\text{sum}}^{\kappa,\kappa} = (1, 1, 1)$ est lié à la conservation globale, il vérifie tous les critères précédents mais n'a pas de bonnes propriétés de découplage des variables p et c pour les équations (A_{11}, A_{12}, A_{13}) .

Analysons en détail chaque terme du bloc A_{11} après découplage en distinguant les termes d'accumulation, de diffusion et de convection.

- Terme d'accumulation $A_{k,k}^{11,acc}$ du bloc pression:

$$\frac{\Delta t}{|\kappa| \phi_\kappa} A_{k,k}^{11,acc} = \sum_\alpha \frac{d\rho_{\alpha,\kappa}}{dp} S_{\alpha,\kappa}.$$

La compressibilité du bloc pression est donc assurée d'être positive ssi le mélange des phases a une compressibilité positive ce qui est en principe toujours le cas. En immiscible, chaque phase est toujours supposée compressible, en revanche dans le cas miscible les phases peuvent avoir des compressibilités négatives du fait de la variation de leur composition avec la pression.

- Termes $A_{k,k'}^{11,diff}$ de la partie diffusive du bloc pression: il s'écrivent (on n'écrit pas les CL)

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{k,k}^{11,diff} = \sum_{\kappa' \in \mathcal{K}_\kappa} T_{\kappa,\kappa'} \sum_\alpha \left(\frac{\rho_\alpha k_{r,\alpha}}{\mu_\alpha} \right)_{\kappa\kappa',\alpha}, \\ A_{k,k'}^{11,diff} = T_{\kappa,\kappa'} \sum_\alpha \left(\frac{\rho_\alpha k_{r,\alpha}}{\mu_\alpha} \right)_{\kappa\kappa',\alpha} \text{ pour } \kappa \neq \kappa', \end{array} \right.$$

et définissent donc une M matrice symétrique.

- Termes $A_{k,k'}^{11,conv}$ liés aux non linéarités en pression devant le terme de diffusion: du fait du décentrage, ces termes s'écrivent (on n'écrit pas les CL)

$$\left\{ \begin{array}{l} A_{k,k}^{11,conv} = \sum_{\kappa' \in \mathcal{K}_\kappa} T_{\kappa,\kappa'} \sum_\alpha \frac{d\rho_{\alpha,\kappa}}{\mu_{\alpha,\kappa}} k_{r,\alpha,\kappa} \left(\Delta\phi_{\kappa,\kappa'}^\alpha \right)^+, \\ -A_{k,k'}^{11,conv} = T_{\kappa,\kappa'} \sum_\alpha \frac{d\rho_{\alpha,\kappa'}}{\mu_{\alpha,\kappa'}} k_{r,\alpha,\kappa'} \left(\Delta\phi_{\kappa,\kappa'}^\alpha \right)^- \text{ pour } \kappa \neq \kappa', \end{array} \right.$$

et on est assuré qu'ils définissent une matrice de type "convection" (diagonale positive, termes non diagonaux négatifs) ssi la dérivée par rapport à la pression de $\left(\sum_\alpha \frac{\rho_\alpha}{\mu_\alpha} \right)$ est positive. Cette propriété est raisonnable et vérifiée dans notre exemple Black Oil ci dessous mais ne peut pas a priori être assurée dans le cas général. En revanche du fait des variations des flux aux arêtes de la maille κ , il n'y aura pas en général diagonale dominance de ces termes de convection.

Découplage impes: le second choix

$$G_{\kappa,\kappa}^{1,impes} = \left(1 \quad \frac{M_{\kappa,\kappa}^{3,3} M_{\kappa,\kappa}^{1,2} - M_{\kappa,\kappa}^{3,2} M_{\kappa,\kappa}^{1,3}}{M_{\kappa,\kappa}^{3,2} M_{\kappa,\kappa}^{2,3} - M_{\kappa,\kappa}^{2,2} M_{\kappa,\kappa}^{3,3}} \quad \frac{M_{\kappa,\kappa}^{2,2} M_{\kappa,\kappa}^{1,3} - M_{\kappa,\kappa}^{2,3} M_{\kappa,\kappa}^{1,2}}{M_{\kappa,\kappa}^{3,2} M_{\kappa,\kappa}^{2,3} - M_{\kappa,\kappa}^{2,2} M_{\kappa,\kappa}^{3,3}} \right)$$

impose l'annulation du couplage entre les variables p et c dans les termes d'accumulation. Une analyse similaire à la précédente montre, dans le cas immiscible et diphasique (w)-(o) black oil,

que $G_{\kappa,\kappa}^{1,\text{impes}}$ vérifie les critères de positivité et de borne et que A_{11} a les bonnes propriétés. Dans le cas triphasique black oil, l'analyse montre, sous des hypothèses supplémentaires raisonnables mais non générales, que $G_{\kappa,\kappa}^{1,\text{impes}}$ induit de bonnes propriétés sur le bloc A_{11} (diagonale positive et pas de termes hors diagonaux positifs) qui se sont avérées toujours vérifiées en pratique sur les cas tests black oil que nous avons traités.

Full decoupling: le troisième choix impose l'annulation du couplage local à la maille κ entre les variables p et c ie $A_{\kappa,\kappa}^{12} = A_{\kappa,\kappa}^{13} = 0$, ce qui définit $G_{\kappa,\kappa}^1$ à une constante multiplicative près choisie de façon à conserver au mieux la symétrie des termes de diffusion, d'où

$$G_{1,\text{full}}^{\kappa,\kappa} = \left(1 \quad \frac{J_{3,3}^{\kappa,\kappa} J_{1,2}^{\kappa,\kappa} - J_{3,2}^{\kappa,\kappa} J_{1,3}^{\kappa,\kappa}}{J_{3,2}^{\kappa,\kappa} J_{2,3}^{\kappa,\kappa} - J_{2,2}^{\kappa,\kappa} J_{3,3}^{\kappa,\kappa}} \quad \frac{J_{2,2}^{\kappa,\kappa} J_{1,3}^{\kappa,\kappa} - J_{2,3}^{\kappa,\kappa} J_{1,2}^{\kappa,\kappa}}{J_{3,2}^{\kappa,\kappa} J_{2,3}^{\kappa,\kappa} - J_{2,2}^{\kappa,\kappa} J_{3,3}^{\kappa,\kappa}} \right).$$

Dans les cas immiscible et diphasique black oil, l'analyse montre à nouveau que ce choix, sous des hypothèses raisonnables, vérifie les critères précédents et induit donc toujours de bonnes propriétés sur le bloc A_{11} tout en assurant un meilleur découplage que les deux choix précédents.

En revanche dans le cas triphasique il conduit à des termes diagonaux négatifs ce qui n'est bien sûr pas acceptable pour la méthode AMG. Dans ce cas, on peut simplement changer le signe de $G_{\kappa,\kappa}^{1,\text{full}}$. Une autre méthode préférée en pratique consiste à changer le scaling de $G_{\kappa,\kappa}^{1,\text{full}}$ comme suit

$$G_{1,\text{full}}^{\kappa,\kappa} = \left(|J_{\kappa,\kappa}^{11} + J_{\kappa,\kappa}^{12} + J_{\kappa,\kappa}^{13}| \quad 0 \quad 0 \right) A_{\kappa,\kappa}^{-1}.$$

On peut même opter simplement pour $G_{\kappa,\kappa}^{1,\text{full}} = (1, 0, 0) A_{\kappa,\kappa}^{-1}$ et n'effectuer le scaling des lignes par $|J_{\kappa,\kappa}^{11} + J_{\kappa,\kappa}^{12} + J_{\kappa,\kappa}^{13}|$ que lors de l'étape de préconditionnement AMG, c'est ce choix qui sera retenu in fine.

Ceci garantit que la diagonale du bloc A_{11} reste positive. Néanmoins, dans le cas triphasique black oil, on obtient en pratique des termes hors diagonaux positifs sur quelques lignes du bloc. Pour le cas test considéré ci-dessous ceci peut engendrer une non convergence de la méthode AMG pour le bloc pression pour quelques systèmes au cours de la simulation, alors que la méthode AMG converge pour le bloc pression défini par les deux autres découplages sur ces mêmes systèmes. En pratique, ce cas de figure ne s'est produit que dans le cas d'une divergence du Newton et donc d'un échec du pas de temps quelque soit le solveur linéaire utilisé. En condensant ces termes hors diagonaux positifs sur la diagonale du bloc pression pour le préconditionnement AMG, on constate une nette amélioration dans la plupart des cas testés. On a donc retenu cette solution en pratique.

Pour les autres lignes $G_{\kappa,\kappa}^2$ et $G_{\kappa,\kappa}^3$ on a retenu le full decoupling $G_{\kappa,\kappa}^{2,\text{full}} = (0, 1, 0) A_{\kappa,\kappa}^{-1}$ et $G_{\kappa,\kappa}^{3,\text{full}} = (0, 0, 1) A_{\kappa,\kappa}^{-1}$, ce choix permet un meilleur découplage, en particulier pour le préconditionnement C_{BGS2}^{-1} , et une meilleure mise à l'échelle.

Finalement, on a retenu principalement les trois découplages suivant:

$$G_{\kappa,\kappa}^{\text{sum}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_{\kappa,\kappa}^{-1}, \quad (7)$$

$$G_{\kappa,\kappa}^{\text{impes}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{M_{\kappa,\kappa}^{3,3} M_{\kappa,\kappa}^{1,2} - M_{\kappa,\kappa}^{3,2} M_{\kappa,\kappa}^{1,3}}{M_{\kappa,\kappa}^{3,2} M_{\kappa,\kappa}^{2,3} - M_{\kappa,\kappa}^{2,2} M_{\kappa,\kappa}^{3,3}} & \frac{M_{\kappa,\kappa}^{2,2} M_{\kappa,\kappa}^{1,3} - M_{\kappa,\kappa}^{2,3} M_{\kappa,\kappa}^{1,2}}{M_{\kappa,\kappa}^{3,2} M_{\kappa,\kappa}^{2,3} - M_{\kappa,\kappa}^{2,2} M_{\kappa,\kappa}^{3,3}} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A_{\kappa,\kappa}^{-1}, \quad (8)$$

$$G_{\kappa,\kappa}^{\text{full}} = A_{\kappa,\kappa}^{-1}, \quad (9)$$

2.3.2 Extension aux modèles de bassin

Dans le cas des modèles de bassin, on résout la compaction verticale des sédiments couplé à l'écoulement par la loi de Biot, ce qui rajoute la variable contrainte verticale σ au système précédent. En ordonnant les variables dans l'ordre $p, \sigma, S = S_o$ pour un écoulement diphasique huile-eau et en plaçant en deuxième position l'équation de compaction verticale, la Jacobienne s'écrit en représentation par blocs de variables

$$J = \begin{pmatrix} J_{1p} & J_{1\sigma} & J_{1S} \\ J_{2p} & J_{2\sigma} & 0 \\ J_{3p} & J_{3\sigma} & J_{3S} \end{pmatrix}.$$

Après découplage par G tel que

$$G_{\kappa\kappa} = \begin{pmatrix} G_{\kappa\kappa}^{1p} & 0 & G_{\kappa\kappa}^{1S} \\ 0 & 1 & 0 \\ G_{\kappa\kappa}^{3p} & 0 & G_{\kappa\kappa}^{3S} \end{pmatrix},$$

on obtient le système

$$A = GJ = \begin{pmatrix} A_{1p} & A_{1\sigma} & A_{1S} \\ J_{2p} & J_{2\sigma} & 0 \\ A_{3p} & A_{3\sigma} & A_{3S} \end{pmatrix},$$

et le préconditionnement Gauss Seidel par blocs de variables est étendu de la façon suivante, par exemple pour C_{BGS1}^{-1} :

$$C_{BGS1}^{-1} = \begin{pmatrix} C_{amg} & 0 & 0 \\ J_{2p} & J_{2\sigma} & 0 \\ A_{3p} & A_{3\sigma} & C_{3S} \end{pmatrix}^{-1},$$

sachant que le couplage $A_{1\sigma}$ est en pratique faible et que $J_{2\sigma}$ est une matrice triangulaire inférieure lorsque l'on ordonne les mailles en descendant les colonnes du fait de la nature 1D de la compaction. Comme précédemment, on définit les préconditionnements combinatifs C_{COMB}^{-1} et C_{CPR}^{-1} .

2.3.3 Parallélisation

La parallélisation du préconditionneur s'effectue en partitionnant le maillage en sous domaines et utilise une distribution des données, la communication et la synchronisation étant gérée par le protocole MPI "Message Passing Interface".

L'étape (i) de découplage est parallèle car locale aux mailles. Le préconditionnement (ii) du bloc pression utilise BoomerAMG ([HY02]) de la librairie HYPRE (Lawrence Livermore National Laboratories, CA) pour la version parallèle du multigrille algébrique. Pour l'étape (iii) de recouplage, on modifie le préconditionnement en optant pour les versions découplées par sous domaine du partitionnement pour les préconditionnement Gauss Seidel et ILU(0).

2.4 Cas test en simulation de réservoir pour un modèle black oil

2.4.1 Description du cas test

Domaine: $(0, 1000) \times (0, 1000) \times (0, 100)$ en m.

Pression de référence: $p_{\text{ref}} = 200 \cdot 10^5$ Pa.

Pression aquifère: $p_{\text{aqui}} = 200 \cdot 10^5$ Pa.

1 puits producteur vertical en $x = y = 500$ m perforé sur chaque maille dans $(L_z/2, L_z)$, pression de fond de puits en $L_z/2$ égal à $p_{\text{puits}} = 150 \cdot 10^5$ Pa.

4 puits injecteurs verticaux $(L_z/2, L_z)$ aux quatre coins du domaine avec débit massique d'injection d'eau égal à $Q_{w, \text{inj}} = 10^2$ Kg/jour.

Porosité: $\phi = 0.2$.

Perméabilité $K_x = K_y$ donné par un champ géostatistique log normal de moyenne sur le maillage d'environ 100 mD.

Anisotropie des perméabilité selon l'axe z: $K_z/K_x = 1/5$.

Thermodynamique Black Oil: définie dans la gamme de pression (1, 300) bars.

$$\begin{cases} \bar{r}_s(p) = 100 \frac{p}{p_{\text{ref}}}, \\ c_{\mu_o} = 0, \\ c_{b_o} = \frac{10^{-3}}{p_{\text{ref}}}, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rho_{s,w} \bar{b}_w(p) = 1000 \left(1 + 4.10^{-3} \frac{p-p_{\text{ref}}}{p_{\text{ref}}} \right) \text{ Kg}/m^3, \\ \rho_{s,h} \bar{b}_o(p) = 612 \left(1 - 0.2 \frac{p-p_{\text{ref}}}{p_{\text{ref}}} \right) \text{ Kg}/m^3, \\ \rho_{s,l} \bar{b}_g(p) = 600 \frac{p}{p_{\text{ref}}} \text{ Kg}/m^3, \end{cases}$$

$$\begin{cases} \bar{\mu}_w(p) = 1.10^{-4} \text{ Pa.s}, \\ \bar{\mu}_o(p) = \frac{1}{1350} \frac{1}{1+0.6 \frac{p-p_{\text{ref}}}{p_{\text{ref}}}} \text{ Pa.s}, \\ \bar{\mu}_g(p) = 2.310^{-5} \left(1 + 0.7 \frac{p-p_{\text{ref}}}{p_{\text{ref}}} \right) \text{ Pa.s}. \end{cases}$$

Noter que la densité de la phase huile ρ_o a une compressibilité positive dans la gamme (1, 300) bars.

Perméabilités relatives triphasiques données par (5) avec $n_w = 2$, $n_g = 1.8$, $n_{ow} = 2.5$, $n_{og} = 1.6$.

Etat initial du réservoir: équilibre hydrostatique stratifié avec un contact huile-eau à $L_z/4$ et un contact huile-gaz à $3 L_z/4$ pour une huile sous saturée de pression de bulle constante égale

à 175.10^5 Pa.

Durée de la simulation: 30 ans.

Maillages cartésiens uniformes $15 \times 15 \times 8$, $30 \times 30 \times 16$, et $60 \times 60 \times 32$.

Critère d'arrêt GMRES: 10^{-5} relatif en norme l^2 sur le système après découplage.

Critère d'arrêt Newton: 5.10^{-5} sur les ratios résidu global (somme algébrique) sur les masses des constituants.

Restart GMRES fixé à 60.

Pas de temps initial égal à 1 jour, pas de temps maximal égal à 1 an, taux d'accroissement du pas de temps égal à ρ en cas de convergence du Newton en au plus 35 itérations et division par 2 du pas de temps en cas de non convergence du Newton ou du solveur linéaire. Le taux d'accroissement ρ est fixé à 1 si l'incrément maximal de saturation du pas de temps est supérieur à 0.9 et à 1.2 sinon.

2.4.2 Comparaison des découplages (i) et des recouplages (iii)

SOLVEUR	BGS1 G^{sum}	BGS1 G^{impes}	BGS1 G^{full}
# NEWTON	96	96	96
# SOLVEUR	805	789	597
# Δt	58	58	58
# SOLVEUR/Newton	8.4	8.2	6.2
CPU (s)	9.75	9.5	8.3
SOLVEUR	BGS2 G^{sum}	BGS2 G^{impes}	BGS2 G^{full}
# NEWTON	96	96	96
# SOLVEUR	654	633	492
# Δt	58	58	58
# SOLVEUR/Newton	6.8	6.6	5.1
CPU (s)	9.0	8.7	7.9
SOLVEUR	COMB G^{sum}	COMB G^{impes}	COMB G^{full}
# NEWTON	96	96	96
# SOLVEUR	463	442	413
# Δt	58	58	58
# SOLVEUR/Newton	4.8	4.6	4.3
CPU (s)	11.5	11.3	11.1
SOLVEUR	CPR G^{sum}	CPR G^{impes}	CPR G^{full}
# NEWTON	96	96	96
# SOLVEUR	527	505	424
# Δt	58	58	58
# SOLVEUR/Newton	5.5	5.2	4.4
CPU (s)	11.3	10.9	10.3

Table 1: Comparaisons des différents préconditionneurs et découplages sur le maillage $15 \times 15 \times 8$.

De façon générale le préconditionneur BGS2 est toujours plus performant que BGS1. Ce résultat est en fait lié au choix de l'échelle pour la pression (Pa) et au full decoupling des deuxièmes et troisièmes lignes de la jacobienne dans la représentation par blocs de variables. Dans ce cas, le couplage des variables A_{cp} est en effet beaucoup plus faible que le couplage A_{pc} .

Dans le cas du préconditionneur BGS1, le full decoupling est en général le plus performant. C'est de plus toujours le cas pour les cas tests immiscibles non présentés ici.

En revanche, l'influence du découplage du bloc pression est moindre pour les préconditionnements BGS2, COMB, CPR. Ceci nous donne en pratique plus de souplesse dans le choix du découplage pour les cas plus difficiles où le full decoupling génère des blocs pression plus difficiles à résoudre par AMG (comme c'est le cas sur le maillage fin $60 \times 60 \times 32$ ou le maillage Voronoi ci-dessous).

Les préconditionnements COMB et CPR sont plus robustes que BGS et deviennent plus

performants dans les cas les plus raides. Par ailleurs, le préconditionnement CPR donne toujours un meilleur bilan itérations/coût par itération que la méthode COMB.

2.4.3 Comparaisons des préconditionneurs sur les maillages $30 \times 30 \times 16$ et $60 \times 60 \times 32$

SOLVEUR	BGS2 G^{sum}	BGS2 G^{full}	CPR G^{sum}	CPR G^{full}	ILU0 G^{full}
# NEWTON	131	134	147	132	154
# SOLVEUR	1121	1193	951	960	13502
# Δt	60	60	60	60	61
# SOLVEUR/Newton	8.6	8,9	6.5	7.3	88
CPU (s)	121	125	166	153	537

Table 2: Simulations sur le maillage $30 \times 30 \times 16$.

SOLVEUR	BGS2 G^{sum}	BGS2 G^{sum}	CPR G^{sum}	CPR G^{full}	ILU0 G^{full}
# NEWTON	296	314	293	312	326
# SOLVEUR	3338	4456	2286	3033	47076
# Δt	99	94	92	90	88
# SOLVEUR/Newton	11.	14,2	7.8	9,7	144
CPU (s)	4502	5071	3626	4800	23800

Table 3: Simulations sur le maillage $60 \times 60 \times 32$.

2.4.4 Cas test sur un maillage non structuré Voronoi

On considère un maillage non structuré du réservoir précédent constitué de mailles cylindriques selon z et à base Voronoi selon xy (voir la coupe xy figure 1). Le nombre de mailles est de 16×2465 .

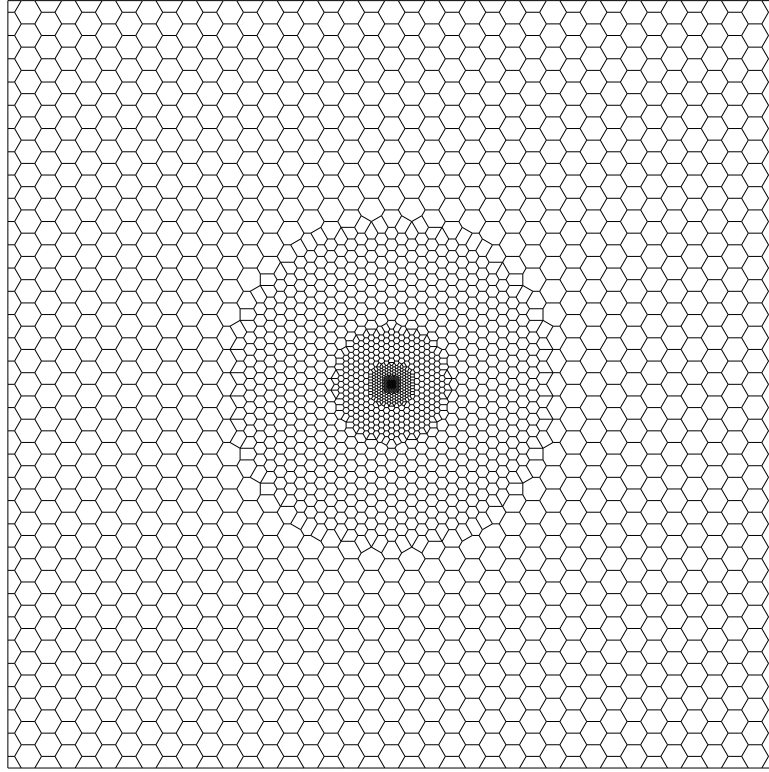


Figure 1: Coupe xy du maillage Voronoi xy du réservoir raffiné autour du puits producteur

SOLVEUR	BGS2 G^{sum}	BGS2 G^{full}	CPR G^{sum}	CPR G^{full}	ILU0 G^{full}
# NEWTON	503	365	341	306	438
# SOLVEUR	5621	4958	3181	3045	34475
# Δt	190	135	138	112	161
# SOLVEUR/Newton	11.2	13.6	9.3	9.9	79
CPU (s)	2213	1770	1767	1650	4847

Table 4: Simulations sur le maillage Voronoi.

En conclusion des cas tests réalisés en black oil et par ailleurs en immiscible, les préconditionnements par blocs de variables ou combinatifs couplé à une résolution du bloc pression par AMG sont clairement plus robustes et performants qu'un préconditionnement classique ILU(0), d'autant plus que le maillage est fin et que le champ de perméabilité absolue est hétérogène.

En ce qui concerne le choix du découplage parmi ceux étudiés ici, dans les cas immiscibles (non présentés ici) on retiendra toujours le FULL decoupling.

Dans les cas black oil, le FULL decoupling présente quelques problèmes de robustesse pour un petit nombre de systèmes linéaires au cours d'une simulation, liés aux mauvaises propriétés pour la méthode AMG de quelques blocs pression. Le découplage SUM ne présente pas ces problèmes sur le solveur linéaire mais peut engendrer un comportement plus instable de la convergence du Newton selon le cas test considéré. Le bilan n'est donc pas clair entre les deux

découplages FULL et SUM dans le cas black oil.

Le choix du préconditionnement par blocs se situe entre BGS2 et CPR et dépendra de la raideur du cas considéré, CPR étant toujours plus robuste en nombre d'itérations mais n'est pas toujours le plus performant dans les cas les moins couplés.

2.5 Travaux en cours et Perspectives

L'amélioration des performances des solveurs linéaires en simulation de réservoir et de bassin est essentielle pour la prochaine génération de simulateurs qui arrive sur un marché très concurrentiel. Nous explorons actuellement plusieurs pistes même si celle présentée ci-dessus est la plus prometteuse.

Dans le cadre de la thèse en cours de Pierre Bonneau co-encadrée par Yves Achdou, Philippe Quandalle et moi même, nous avons étudié et testé en collaboration avec Peter Bastian de l'université de Heidelberg [Ba99] les méthodes multigrilles algébriques par agglomération pour le système complet. Ces méthodes sont adaptées aux discrétisations volume fini et aux systèmes couplés du fait qu'elles utilisent un opérateur de prolongement constant par agglomérat. Les conclusions actuelles de ces travaux montrent qu'il est essentiel pour les systèmes couplés d'utiliser un lisseur ILU(0) pour obtenir de bonnes performances. Malgré cela, on montre, quel que soit le critère de voisin fort utilisé, qu'il est difficile d'obtenir des agglomérats adaptés à la fois aux inconnues pression d'une part et saturations/compositions d'autre part. Il résulte que la méthode par agglomération sur le système couplé n'est pas actuellement compétitive par rapport à une méthode par blocs de variables utilisant AMG uniquement sur la variable pression.

De ce fait, nous mettons actuellement l'accent sur l'amélioration en terme de robustesse et de temps calcul des méthodes AMG scalaires pour le bloc pression. Nos recherches portent sur les points suivants:

- améliorer la robustesse des méthodes multigrilles algébriques en présence de termes hors diagonaux positifs et de lignes non diagonalement dominantes,
- réduire le temps calcul des méthodes AMG par des stratégies de coarsening plus agressif et plus anisotrope adaptées à nos problèmes,
- inclure les termes de puits dans le cas des puits implicites.

En dehors des méthodes multigrilles, nous explorons deux autres pistes: tout d'abord les méthodes "adaptive filtering" en collaboration avec Frédéric Nataf de l'école Polytechnique et Carolina Diaz Goano de l'université d'Alberta. Ces méthodes ont pour but d'accélérer la convergence d'un préconditionneur classique comme ILU(0) en présence d'un plateau de convergence. Le principe est de construire une factorisation incomplète qui soit exacte sur un vecteur test pris égal au vecteur de Ritz dans la base de Krylov et à combiner multiplicativement cette factorisation avec la précédente.

La deuxième piste consiste à explorer les factorisations incomplètes par troncatures pour le système couplé en adaptant le critère de troncature à la nature des différents blocs de la jacobienne. En particulier les blocs saturations/compositions peuvent se contenter d'une factorisation

sans remplissage alors que le bloc pression exige une factorisation plus précise.

3 Une méthode de décomposition de domaine pour les écoulements monophasiques compressibles [26], [10], [9]

On considère un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ de frontière Γ et l'équation parabolique

$$\begin{cases} \partial_t p + \nabla \cdot u = f, & u = -K \nabla p \text{ dans } \Omega, \\ p = g \text{ sur } \Gamma, & p|_{t=0} = p_0, \end{cases} \quad (10)$$

où le tenseur K est symétrique défini positif, uniformément sur $\overline{\Omega}$. L'application au problème (10) des techniques de décomposition de domaine sans recouvrement permet de résoudre efficacement les hétérogénéités et les singularités géométriques (hétérogénéités de K , différentes échelles spatiales, failles ...) en adaptant la discrétisation en espace dans chaque sous domaine à ces caractéristiques.

La méthode proposée combine ces techniques de discrétisation spatiale avec celles de décomposition d'opérateur ou de splitting en temps de façon à découpler à chaque pas de temps les résolutions dans les sous domaines de celle du problème d'interface (voir [Lions89], [GLT89] pour une idée similaire combinant décomposition de domaine et d'opérateur).

La discrétisation en espace est de type éléments finis mixtes ou volume fini dans chaque sous domaine. Grosso modo, l'idée du splitting en temps consiste à fixer la pression à l'interface entre les sous domaines par sa valeur au pas de temps précédent (schéma d'ordre 1) ou mieux par une interpolation d'ordre deux des valeurs aux deux pas de temps précédents (schéma d'ordre 2). On peut ensuite résoudre indépendamment les problèmes dans les sous domaines et il reste à mettre à jour la pression d'interface au pas de temps courant en écrivant la continuité des flux à l'interface.

On obtient ainsi un algorithme complètement parallèle et la possibilité d'utiliser des pas de temps locaux dans les sous domaines de façon à traiter adaptativement les différentes échelles de temps du problème.

L'application principale visé à l'IFP est celle des écoulements de Darcy monophasiques compressibles qui interviennent dans le cadre des essais de puits lors de la phase de déplétion du réservoir. L'intérêt de la méthode combinant décomposition de domaine sans recouvrement et décomposition d'opérateur est de permettre d'adapter la discrétisation en espace et en temps aux échelles d'espace et de temps ainsi qu'aux hétérogénéités locales en distinguant en particulier le voisinage du puits et le domaine réservoir. Le caractère parallèle est aussi un atout important. Les inconvénients résident dans le caractère non conservatif de la méthode lié au découplage à l'interface entre les sous domaines. et dans la condition de convergence du schéma qui exige grosso modo en pratique de prendre des pas de temps du même ordre que le pas d'espace. Pour pallier à ces inconvénients il faut veiller à ce que l'interface entre les sous domaines soit situé dans une zone où la pression varie lentement en temps.

Ce travail a fait l'objet d'une partie de la thèse de Stéphanie Gaiffe encadré par Roland Glowinski et Isabelle Faille à l'IFP. Ma contribution a porté sur l'extension du schéma de projection à l'ordre 2 en temps à l'interface et sur l'analyse numérique du schéma de projection (stabilité et estimations d'erreurs).

On reprend dans la suite l'essentiel de la note aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences [10] qui présente le schéma de projection incrémental et énonce les résultats de stabilité et de convergence. On renvoie à [9] pour le détail des démonstrations ainsi qu'à la thèse de Stéphanie Gaiffe [Gai00] pour les applications aux écoulements de Darcy monophasiques compressibles pour le couplage puits/réservoir.

Notation: pour deux fonctions positives $A(v)$ et $B(v)$ la notation $A \lesssim B$ indique qu'il existe une constante C , indépendante des divers paramètres en jeu, et telle que pour tout v on ait $A(v) \leq CB(v)$.

3.1 Décomposition de domaine et approximation par EFM avec éléments joints

Soit une décomposition de Ω en N sous domaines disjoints $\Omega_i, i = 1, \dots, N$ tels que $\Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \forall i \neq j$ et $\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^N \bar{\Omega}_i$.

On note $\Gamma_i := \partial\Omega_i/\Gamma$ et $\Gamma_{i,j} := \partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j$. Pour $i, j \in I := \{i, j \text{ t.q } i \neq j \text{ et } \text{mes}_{d-1}\Gamma_{i,j} \neq 0\}$, on définit le squelette de la décomposition $\gamma := \bigcup_{i,j \in I} \Gamma_{i,j}$.

Soient les espaces $M_i := L^2(\Omega_i)$ et $V_i := H(\Omega_i; \text{div})$ munis des normes usuelles notées $\|q_i\|_{0,i}$ et $\|v_i\|_{V_i} := \left(\|v_i\|_{0,i}^2 + \|\nabla \cdot v_i\|_{0,i}^2 \right)^{1/2}$.

On définit les espaces produits $M := \bigoplus_{i=1}^N M_i = L^2(\Omega)$ et $V := \bigoplus_{i=1}^N V_i$, munis des normes hilbertiennes produits $\|q\|_0$ et $\|v\|_V$. Pour $r \geq 0$, on notera $\mathcal{H}^r(\Omega)$ l'espace produit $\bigoplus_{i=1}^N H^r(\Omega_i)$ muni de sa norme hilbertienne produit. Enfin, on définit la norme

$$\|\mu\|_{\frac{1}{2},\gamma} := \sup_{v \in V} \frac{\sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} (v \cdot n_i) \mu d\gamma}{\|v\|_V}$$

et on notera $H^{\frac{1}{2}}(\gamma)$ le sous espace de $L^2(\gamma)$ des fonctions μ telles que $\|\mu\|_{\frac{1}{2},\gamma} < \infty$.

La discrétisation en espace de (10) est de type éléments finis mixtes avec éléments joints (ou Mortar) aux interfaces $\Gamma_{i,j}$ entre sous domaines de façon à pouvoir traiter les maillages non-coïncidents en écrivant le raccord faible des flux aux interfaces $\Gamma_{i,j}$.

Nous reprenons l'analyse de cette discrétisation spatiale introduite dans [Glo88] dans le cas de maillages coïncidents et étendue dans [Yotov96] au cas non coïncident. Soit $\mathcal{T}_{i,h}$ un maillage quasi-uniforme de Ω_i et $V_{i,h} \subset V_i, M_{i,h} \subset M_i$ des espaces d'approximation EFM d'ordre $k+1$ (de type $\text{RT}_k, \text{BDF}_k$ ou BDFM_k) et tels que $\nabla \cdot V_{i,h} = M_{i,h}$.

On introduit les espaces produits $M_h := \bigoplus_{i=1}^N M_{i,h}$ et $V_h := \bigoplus_{i=1}^N V_{i,h}$ dont l'espace dual est noté V'_h muni de sa norme duale $\|\cdot\|_{V'_h}$. Le produit de dualité sera noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$ et l'espace M_h sera implicitement identifié à son dual M'_h .

Le choix de l'espace Mortar est celui décrit dans [Yotov96]. Soit $\mathcal{T}_{i,j,h}$, $i, j \in I$, un maillage quasi-uniforme de $\Gamma_{i,j}$ et $\Lambda_{i,j,h}$ un espace EF continu ou discontinu d'ordre $k + 2$ sur $\mathcal{T}_{i,j,h}$. L'espace Mortar sur le squelette γ est l'espace produit $\Lambda_h := \bigoplus_{i,j \in I} \Lambda_{i,j,h} \subset L^2(\gamma)$.

Pour écrire l'approximation variationnelle de (10), on définit les opérateurs $S_h, A_h : V_h \rightarrow V'_h$, $B_h^t : \Lambda_h \rightarrow V'_h$, $\text{div}_h : V_h \rightarrow M'_h$, $T_h^t : H^{1/2}(\Gamma) \rightarrow V'_h$ tels que pour tous $v_h = (v_{i,h})_{i=1,\dots,N}$, $w_h = (w_{i,h})_{i=1,\dots,N} \in V_h$, $q_h = (q_{i,h})_{i=1,\dots,N} \in M_h$, $\mu_h \in \Lambda_h$, $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$:

$$\begin{aligned} \langle S_h v_h, w_h \rangle &:= \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} K^{-1} v_{i,h} \cdot w_{i,h} dx, \\ \langle A_h v_h, w_h \rangle &:= \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (\nabla \cdot v_{i,h})(\nabla \cdot w_{i,h}) dx, \\ \langle \text{div}_h v_h, q_h \rangle &:= \sum_{i=1}^N \int_{\Omega_i} (\nabla \cdot v_{i,h}) q_{i,h} dx, \\ \langle B_h^t \mu_h, v_h \rangle &:= \sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} \mu_h (v_{i,h} \cdot n_i) d\gamma, \quad \langle T_h^t \varphi, v_h \rangle := \int_{\Gamma} \varphi (v_h \cdot n) d\sigma. \end{aligned} \tag{11}$$

On note par ailleurs i_{V_h} et i_{M_h} les injections de V_h dans V et de M_h dans M . Alors la formulation EFM avec éléments joints de (10) consiste à trouver le triplet $(p_h, u_h, p_{\gamma,h})$ de $M_h \times V_h \times \Lambda_h$ tel que

$$\begin{cases} \partial_t p_h + \text{div}_h u_h = i_{M_h}^t f, \\ S_h u_h = \text{div}_h^t p_h - B_h^t p_{\gamma,h} - T_h^t g, \\ B_h u_h = 0, \\ p_h|_{t=0} = p_{0,h}. \end{cases} \tag{12}$$

L'approximation en espace du problème stationnaire est étudiée dans [Yotov96] moyennant une hypothèse sur l'espace Mortar Λ_h . Celle-ci assure en particulier l'injectivité de l'opérateur B_h^t et la propriété $\{q_h, \text{t. q. } \langle \text{div}_h v_h, q_h \rangle = 0, \forall v_h \in W_h := \text{Ker } B_h\} = \{0\}$, qui entraîne l'existence et l'unicité de la solution. Nous renvoyons à [Yotov96] pour la démonstration, moyennant cette hypothèse, d'estimations d'erreur en u, p, p_{γ} optimales pour le problème stationnaire.

3.2 Une formulation en flux équivalente

Proposition 3.1 *Soient $\lambda_h := \partial_t p_{\gamma,h}$ et $g_0 := g(t=0)$; le problème (12) est équivalent à la formulation en flux suivante:*

$$\begin{cases} S_h \partial_t u_h + A_h u_h + B_h^t \lambda_h + T_h^t \partial_t g = \text{div}_h^t f, \\ B_h u_h = 0, \\ u_h|_{t=0} = u_h^0, \end{cases} \tag{13}$$

$$\text{où } \begin{cases} S_h u_h^0 = \text{div}_h^t p_{0,h} - B_h^t p_{\gamma,h}^0 - T_h^t g_0, \\ B_h u_h^0 = 0, \end{cases} \tag{14}$$

et à l'équation en pression découplée: $\partial_t p_h + \text{div}_h u_h = i_{M_h}^t f$, $p_h|_{t=0} = p_{0,h}$.

3.3 Discrétisation en temps par un schéma de projection

L'idée consiste à appliquer à la formulation (13) un schéma de projection introduit par Chorin (voir [Cho68]) pour les équation de Navier Stokes. Nous préférons ici sa version incrémentale connue pour être plus précise (voir [GQ98]).

Le schéma découple le système (13) en deux étapes: (i) avance en temps à λ_h fixé, (ii) projection du flux sur W_h et incrémentation de λ_h . Le flux initial u_h^0 est obtenu par (14) et on se donne $\lambda_{0,h} \in \Lambda_h$ une approximation de $\lambda|_{t=0}$ qui pourra être choisie nulle ou obtenue par la résolution d'un schéma couplé sur un pas de temps.

$$(i) \quad S_h \frac{\tilde{u}_h^{n+1} - u_h^n}{\Delta t} + A_h \tilde{u}_h^{n+1} + B_h^t \lambda_h^n + T_h^t \frac{g^{n+1} - g^n}{\Delta t} = \text{div}_h^t f^{n+1},$$

$$(ii) \quad \begin{cases} S_h \frac{u_h^{n+1} - \tilde{u}_h^{n+1}}{\Delta t} + B_h^t (\lambda_h^{n+1} - \lambda_h^n) = 0, \\ B_h u_h^{n+1} = 0, \end{cases} \quad (15)$$

Les pressions p_h^n et $p_{\gamma,h}^n$ s'obtiennent par intégration discrète:

$$\begin{cases} \frac{p_h^{n+1} - p_h^n}{\Delta t} + \text{div}_h \tilde{u}_h^{n+1} = i_{M_h}^t f^{n+1}, p_h^0 = p_{0,h}, \\ \frac{p_{\gamma,h}^{n+1} - p_{\gamma,h}^n}{\Delta t} = \lambda_h^{n+1}, p_{\gamma,h}^0 \text{ donné par (14)}. \end{cases} \quad (16)$$

Cette discrétisation en temps (15)-(16) admet comme précédemment une formulation mixte pression-flux équivalente.

$$(i) \quad \begin{cases} \frac{p_h^{n+1} - p_h^n}{\Delta t} + \text{div}_h \tilde{u}_h^{n+1} = i_{M_h}^t f^{n+1}, \\ S_h \tilde{u}_h^{n+1} = \text{div}_h^t p_h^{n+1} - B_h^t (2p_{\gamma,h}^n - p_{\gamma,h}^{n-1}) - T_h^t g^{n+1}, \end{cases} \quad (17)$$

$$(ii) \quad \begin{cases} S_h u_h^{n+1} = \text{div}_h^t p_h^{n+1} - B_h^t p_{\gamma,h}^{n+1} - T_h^t g^{n+1}, \\ B_h u_h^{n+1} = 0, \end{cases}$$

Avec $p_h^0 := p_{0,h}$ et $p_{\gamma,h}^{-1} := p_{\gamma,h}^0 - \Delta t \lambda_h^0$. On remarque que l'étape (i) de (17) correspond à une extrapolation d'ordre 2 en temps de la pression d'interface

$$p_{\gamma,h}^{n+1} \simeq 2p_{\gamma,h}^n - p_{\gamma,h}^{n-1}.$$

L'intérêt du schéma de projection réside dans la facilité de résolution des étapes (i) et (ii). L'étape d'avance en temps ou de prédiction (i) se résout séparément en parallèle sur les N sous domaines. L'étape de projection (ii) revient à inverser le problème d'interface associé à l'opérateur $Z_h := B_h S_h^{-1} B_h^t$, ce qui s'effectue efficacement par exemple par un gradient conjugué préconditionné par la diagonale.

3.3.1 Stabilité en temps de la méthode

Soit $Z_h := B_h S_h^{-1} B_h^t$ l'opérateur d'interface de l'étape de projection. Pour $\mu \in L^2(\gamma)$, on notera $\|\mu\|_{Z_h} := \langle Z_h \mu, \mu \rangle^{\frac{1}{2}}$ qui définit une semi-norme sur $L^2(\gamma)$ et une norme sur Λ_h .

On définit d'autre part

$$\|B_h^t \mu\|_{V'_h} := \sup_{v_h \in V_h} \frac{\sum_{i=1}^N \int_{\Gamma_i} (v_h \cdot n_i) \mu d\gamma}{\|v_h\|_V},$$

semi-norme sur $L^2(\gamma)$ (et norme sur Λ_h). En étendant l'analyse des schémas de projection pour les équations de Navier-Stokes incompressibles (voir [GQ98]) au contexte de la décomposition de domaine et des EFM, on peut démontrer le théorème suivant.

Théorème 3.1 *Soit $t_n := n\Delta t$, on suppose $\partial_t g \in L^2(0, t_m; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$, $\sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \|f^{n+1}\|_0^2 \lesssim 1$, alors les schémas (15)-(16) ou (17) sont inconditionnellement stables, au sens où pour tout $\Delta t \leq 1$ on a*

$$\left\{ \begin{array}{l} \|u_h^m\|_0^2 + \Delta t^2 \|\lambda_h^m\|_{Z_h}^2 + \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \|\nabla \cdot \tilde{u}_h^{n+1}\|_0^2 \\ \lesssim \|u_h^0\|_0^2 + \Delta t^2 \|\lambda_h^0\|_{Z_h}^2 + \Delta t \sum_{n=0}^{m-1} \|f^{n+1}\|_0^2 + \int_0^{t_m} \|\partial_t g(s)\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}^2 ds, \\ \|p_h^m\|_0^2 \lesssim \|p_{0,h}\|_0^2 + \sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \|\nabla \cdot \tilde{u}_h^{n+1}\|_0^2 + \Delta t \sum_{n=0}^{m-1} \|f^{n+1}\|_0^2, \\ \|B_h^t p_{\gamma,h}^m\|_{V'_h} \lesssim \|u_h^m\|_0 + \|p_h^m\|_0 + \|g^m\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)}, \end{array} \right. \quad (18)$$

avec des constantes indépendantes de h , Δt , N et ne dépendant que de t_m et de K .

3.3.2 Estimations d'erreur

On note $(u, p) \in C^0(0, t_m; H(\Omega; \text{div})) \times C^0(0, t_m; M)$ la solution faible de (10) sur l'intervalle de temps $[0, t_m]$. On supposera la pression p ainsi que sa dérivée $\partial_t p$ globalement dans $H^1(\Omega)$ de façon à définir la pression d'interface $p_\gamma := p|_\gamma$ et sa dérivée $\lambda := \partial_t p|_\gamma = \partial_t p_\gamma$ dans $H^{1/2}(\gamma)$. On note $t_n = n\Delta t$ et $u^n := u(t_n)$, $p^n := p(t_n)$, $\lambda^n := \lambda(t_n)$, $p_\gamma^n := p_\gamma(t_n)$.

La dépendance en h de la semi-norme $\|\cdot\|_{Z_h}$, donnée par l'estimation $\|\mu\|_{Z_h} \lesssim h^{-\frac{1}{2}} \|\mu\|_{L^2(\gamma)}$ $\forall \mu \in L^2(\gamma)$, est le principal facteur pénalisant pour la convergence de la méthode. On obtient le théorème suivant.

Théorème 3.2 *Soit $(u, p) \in C^0(0, t_m; H(\Omega; \text{div})) \times C^0(0, t_m; M)$, la solution faible de (10) telle que $p \in C^1(0, t_m; H^1(\Omega))$. Pour $1 \leq r \leq k+1$ et $u \in H^1(0, t_m; \mathcal{H}^r(\Omega)^d)$, $\partial_{t^2} u \in L^2(0, t_m; V')$, $\partial_t \lambda \in L^2(0, t_m; L^2(\gamma))$, $\partial_{t^2} g \in L^2(0, t_m; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma))$, $p \in W^{1,\infty}(0, t_m; \mathcal{H}^{r+1}(\Omega))$, $\partial_{t^2} p \in L^2(0, t_m; L^2(\Omega))$, $\sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \|\nabla \cdot u^{n+1}\|_{\mathcal{H}^r(\Omega)}^2 \lesssim 1$, on a pour tout $\Delta t \leq 1$*

$$\begin{aligned} & \|u^m - u_h^m\|_0 + \|p^m - p_h^m\|_0 + \|B_h^t (p_\gamma^m - p_{\gamma,h}^m)\|_{V'_h} \\ & + \left(\sum_{n=0}^{m-1} \Delta t \|\nabla \cdot (u^{n+1} - \tilde{u}_h^{n+1})\|_0^2 \right)^{\frac{1}{2}} \lesssim \Delta t (1 + h^{-\frac{1}{2}}) + h^r, \end{aligned} \quad (19)$$

avec une constante ne dépendant que de t_m , K et de N au plus en $N^{1/d}$. Pour obtenir ces estimations il suffit de choisir pour $p_{0,h}$ la projection orthogonale de p_0 sur M_h et $\lambda_h^0 = 0$.

3.4 Un exemple Numérique

On considère l'équation parabolique (10) posée sur le domaine $\Omega = (0, 2) \times (0, 1)$ pour $K = 1$ de solution exacte $p(x, y, t) = \left(x^2 y^3 + \cos\left(\frac{\pi}{2} xy\right)\right) \cos \frac{\pi t}{2}$. Le domaine Ω est décomposé en deux sous domaines $\Omega_1 = (0, 1) \times (0, 1)$ et $\Omega_2 = (1, 2) \times (0, 1)$.

Ce problème est discrétisé sur une grille cartésienne uniforme de pas h par des éléments finis mixtes RT_0 et une condensation de la matrice de masse (i.e. un schéma volume fini). La discrétisation en temps est uniforme de pas de temps Δt .

La figure 2 montre la convergence de l'erreur $p_h^n - p^n$ en norme $l^\infty(L^2(\Omega))$ pour les deux discrétisations en temps: le schéma de projection (17) et le schéma d'Euler implicite.

On déduit des résultats numériques de la figure 2 que l'erreur de discrétisation en temps se comporte comme $\min(\Delta t/h^{1/2}, \Delta t^2/h) + \Delta t$ pour le schéma de projection, soit une meilleure convergence que l'estimation d'erreur en $\Delta t/h^{1/2} + \Delta t$.

Ce résultat numérique suggère que l'erreur du schéma de projection est la superposition de l'erreur produite par le schéma d'Euler implicite et de celle résultant de la décomposition d'opérateur (i.e. la différence entre la solution du schéma d'Euler implicite et la solution du schéma de projection) d'ordre $\min(\Delta t/h^{1/2}, \Delta t^2/h)$.

Si tel est le cas, on obtient avec le schéma de projection une convergence d'ordre h en choisissant le pas de temps tel que $\Delta t = \mathcal{O}(h)$.

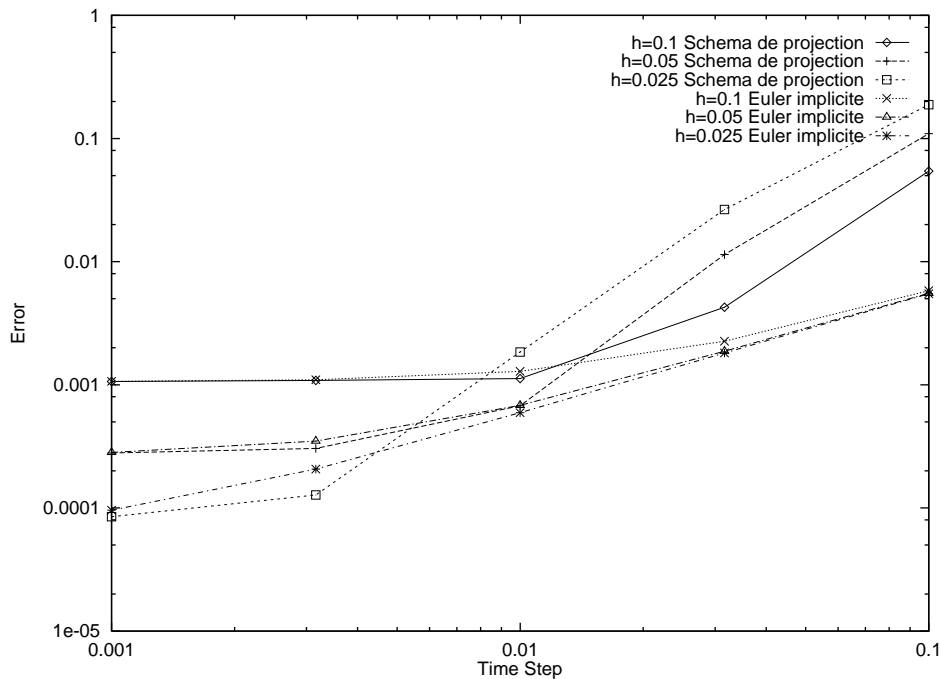


Figure 2: Convergence de l'erreur $p_h^n - p^n$ en norme $l^\infty(L^2(\Omega))$: schéma de projection et schéma d'Euler implicite pour $h = 0.1, 0.05, 0.025$.

4 Modélisation stratigraphique [4], [24], [21], [1], [5], [22], [3]

Un modèle stratigraphique décrit l'évolution de la surface topographique d'un bassin sédimentaire au cours du temps par sédimentation/érosion et le remplissage des couches successives en terme de faciès sédimentologique. Le faciès sédimentologique regroupe un ensemble de propriétés de la roche sédimentaire qui résultent de l'histoire de sa formation, au moment du dépôt et postérieure au dépôt. Les faciès sédimentologiques sont caractérisés par référence à l'environnement de dépôt du sédiment (continental, fluvial, côtier, marin profond, ...), à la composition du sédiment en lithologies de base (argile, sable, carbonate, ...) à l'origine de ces composants de base (origine biologique, dissolution chimique de roches non sédimentaires, ...) à leur porosité et à la granulométrie des grains qui le compose.

Un modèle stratigraphique constitue une réponse complexe aux différents facteurs régissant l'évolution du bassin sédimentaire connus aujourd'hui comme étant principalement

- ▷ l'accommodation, distance entre le socle du bassin et le niveau de la mer (résultante des mouvements tectoniques et de l'eustatisme ou variation du niveau de la mer), définissant l'espace disponible au remplissage des sédiments dans le bassin (voir figure 3),
- ▷ les apports en sédiments dans le bassin sous la forme de flux de sédiments aux frontières entrantes du bassin (apportés par les fleuves ou les points hauts) ou de termes source de production en milieu marin (production de carbonates par les coraux, production de sédiments pélagiques, ...),
- ▷ les facteurs climatiques (pluviométrie, courants, vents, ...).

L'interaction de ces différents facteurs est modélisée à travers les lois de transport gouvernant les phénomènes de sédimentation et d'érosion des terrains de surface.

L'IFP développe depuis une dizaine d'années le modèle DIONISOS [G97], [GJD98], [GJ99] de déposition/érosion des sédiments dans les bassins sédimentaires aux échelles géologiques des bassins (100 km en espace et 100 Ma en temps). Ce modèle est développé dans le cadre d'un consortium industriel regroupant des compagnies pétrolières. L'objectif, dans un contexte d'exploration pétrolière, est de construire un modèle quantitatif d'évolution sédimentologique du bassin dans le but

- ▷ de valider/invalidier les scénarios géologiques qualitatifs retraçant l'histoire du bassin en étude,
- ▷ d'intégrer (par inversion de paramètres et calage de données) les données sismiques, les données diagaphiques de puits et les données géologiques de terrain, dans un modèle explicatif et quantitatif, tridimensionnel en espace et d'évolution en temps, du bassin.

Ce modèle permet de mieux formaliser la connaissance du bassin et de mieux prédire la nature sédimentologique des roches en place et donc l'emplacement des réservoirs potentiels.

- ▷ D'alimenter les modèles de bassins en propriétés dynamiques pétrophysiques et géométriques. Les modèles de bassin simulent le craquage des hydrocarbures dans les roches mères, la migration des fluides dans le milieu poreux sédimentaire au cours de sa formation. Ils sont utilisés en exploration afin de déterminer l'emplacement potentiel des réservoirs, la qualité et la quantité des hydrocarbures en place, ainsi qu'en forage pour prédire le champ de surpression et donc les risques de forage.

Plus généralement, la sédimentologie est une science traditionnellement qualitative et descriptive. Le développement de la modélisation stratigraphique y est une tendance récente qui date d'une trentaine d'années seulement, et qui permet de mieux capitaliser et de formaliser la connaissance des lois régissant l'évolution des bassins sédimentaires.

Dans cette démarche de modélisation, le sédimentologue est confronté à l'hétérogénéité des échelles de temps (des cycles journaliers, annuels, aux cycles climatiques, eustatiques, tectoniques, et aux durées de simulation de plusieurs centaines de millions d'années) et à l'hétérogénéité des échelles d'espace (de l'échelle du grain aux échelles de la tectonique des plaques). Les modèles de transport des sédiments doivent donc pouvoir agréger sur des durées géologiques et des échelles kilométriques des phénomènes élémentaires prenant place à des échelles de temps et d'espace bien plus réduites afin de rendre compte de l'évolution géologique des surfaces topographiques.

Le sédimentologue doit de plus palier à la difficulté de valider ses modèles par l'expérimentation qui n'est possible que sur des maquettes (de type bacs à sable) et procéder par déduction sur les observations géologiques ou géophysiques au temps présent (elles même très partielles et difficilement accessibles) en remontant les temps géologiques.

Parmi les modèles stratigraphiques on distingue **les modèles statiques** et **les modèles dynamiques**. Les modèles statiques décrivent les principales propriétés des roches par des modèles géostatistiques calés aux données de puits, aux données sismiques et aux données géologiques de terrain. Contrairement aux modèles dynamiques, ils ne retracent pas l'évolution du bassin.

On distingue trois grands types de modèles dynamiques, les modèles géométriques, les modèles fluide et les modèles diffusifs (ou *dynamic slope models* en anglais).

Les modèles géométriques déterminent géométriquement le profil de dépôt d'équilibre aux grandes échelles en fonction de la création d'accommodation et des apports. Ces modèles sont très rapides et permettent de réaliser des simulations multiples pour l'analyse de sensibilité et l'inversion de paramètres, mais ils sont limités à un nombre réduit de phénomènes physiques et en particulier ne traitent pas les bassins vraiment tridimensionnels.

Les modèles fluides simulent à des petites échelles de temps et d'espace l'écoulement et le transport des sédiments en résolvant les équations de la mécanique des fluides couplées à des lois de transport des particules sédimentaires à l'échelle des grains. Ces modèles agissent

à trop petite échelle pour simuler dans des temps raisonnables l'accumulation des couches sur les périodes de temps géologiques visées ici, ils nécessitent en outre trop de données d'entrée à caler. Ces modèles sont plutôt répandus en ingénierie côtière pour prédire l'ensablement des ports où l'impact de la construction d'une jetée. Ils servent aussi à définir des lois de comportement plus macroscopiques qui relient par exemple les flux de sédiments transportés (par charriage-saltation ou par suspension) au débit et à la pente du cours d'eau. Ce type de modèle a été introduit par Harbaugh et a donné naissance au modèle SEDSIM [TH89].

Les modèles diffusifs introduits par Kenyon et Turcotte [KT85] reposent sur l'écriture de la loi de conservation de la masse des sédiments et la modélisation empirique de lois de transport des sédiments. Le modèle le plus simple (qui donne son nom à ce type de modèles) traduit que le flux de sédiments est proportionnel à la pente de la surface topographique avec un coefficient de proportionnalité fonction de l'environnement de dépôt, conduisant à l'équation parabolique suivante

$$\partial_t h + \operatorname{div}(k(b) \nabla b) = S, \quad (20)$$

posée sur le domaine bidimensionnel Ω représentant l'extension horizontale du bassin, où h est l'épaisseur des sédiments, S un terme source de production de sédiments (exemple des plates-formes carbonatées produites par la croissance des coraux), $b = a - h$ la bathymétrie (distance entre la surface des sédiments et le niveau marin), $a = H_m - H$ l'accommodation, H_m le niveau de la mer et H la position verticale du socle du bassin supposé ici soumis à des déformations tectoniques verticales. La figure 3 illustre ces différentes variables du modèle dans le cas d'un bassin bidimensionnel.

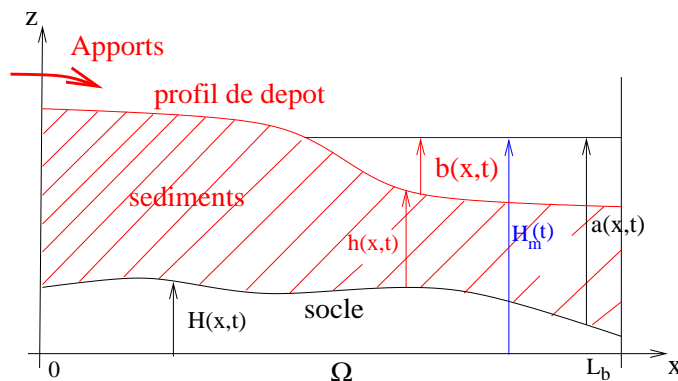


Figure 3: Représentation schématique d'un bassin sédimentaire bidimensionnel à l'instant t : épaisseur de sédiments $h(x, t)$, niveau marin $z = H_m(t)$, socle $z = H(x, t)$, profil de dépôt $z = h(x, t) + H(x, t)$, bathymétrie $b(x, t) = H_m(t) - H(x, t) - h(x, t)$, accommodation $a(x, t) = b(x, t) + h(x, t) = H_m(t) - H(x, t)$.

Ce modèle basique doit son succès à sa capacité à représenter aux grandes échelles d'espace et de temps les profils de dépôt en particulier de type cliniformes et les séquences de progradation et de rétrogradation des deltas sous l'effet des variations eustatiques du niveau de la mer, moyennant l'utilisation d'un coefficient de diffusion non linéaire du type

$$k(b) = \begin{cases} k_m & \text{si } b > 0 \\ k_c & \text{si } b < 0 \end{cases}, \quad (21)$$

distinguant la diffusion forte en milieu de dépôt continental (transport par les fleuves) et faible en milieu de dépôt marin (piégeage à l'embouchure des Deltas) (voir [JF91]).

Ce modèle parabolique de base a été depuis son introduction par Kenyon et Turcotte affiné par l'ajout de processus physiques agissant à des échelles plus fines afin de pouvoir par exemple représenter les effets détaillés sur la surface topographique d'un transport de sédiments chenalisé. Voici une liste non exhaustive des principaux processus introduits:

▷ en premier lieu le couplage à d'autres processus de transport de sédiments modélisés comme des flux supplémentaires dans la loi de conservation (20). Ces différents modèles agissent localement en espace et en temps en fonction du système de dépôt et du contexte climatique. Il s'agit principalement:

- de modèles de transport fluvial des sédiments. Le modèle diffusif de base modélise alors seulement la lente reptation gravitaire des sédiments alors que le transport fluvial est beaucoup plus intense et agit de façon anisotrope le long des lignes de plus grande pente du réseau hydrographique.

Ces modèles nécessitent le calcul du réseau hydrologique de surface et son couplage à la loi de conservation des sédiments par des lois de transport généralement du type

$$q_s = k_e q_e^\alpha S^\beta, \quad (22)$$

où q_s est le flux de sédiments (en m^2/s), S est la pente du terrain, q_e le débit d'eau adimensionné, et k_e , α , β des coefficients dépendants du système de dépôt (bassin versant, système chenalisé, plaine alluviale, plaine deltaïque, ...). On réfère à [KB94], [TS94], [G97], [TB98] pour les modèles de transport fluvial et à [GW00] pour une revue des méthodes de calcul du réseau hydrographique.

- d'un modèle de glissement de terrain selon un critère de stabilité des terrains,
- d'un modèle de transport dédié en milieu marin (vagues, courants) au niveau du littoral,
- d'un modèle de transport éolien,
- d'une prise en compte de l'écoulement d'eau en sous sol et de son effet sur le réseau hydrographique de surface ou sur la stabilité des terrains de surface,

- de la prise en compte de la disponibilité limitée en sédiments imposant un seuil sur le taux d'érosion des sédiments qui traduit le fait que les sédiments doivent être préalablement rendus meubles par l'attaque climatique avant de pouvoir être transportés par érosion marine, fluviale, éolienne ou gravitaire (voir [AH89], [How94], [G97] et le chapitre suivant).

▷ Une description plus fine des sédiments : prise en compte de la porosité et de la granulométrie, représentation des sédiments comme mélange de lithologies de base (voir [R92], [G97] et le chapitre suivant pour l'extension du modèle diffusif au cadre multi-lithologique).

▷ La modélisation des termes sources de production en milieu marin.

▷ La modélisation de la déformation mécanique du bassin (en particulier la compaction et la flexure).

Le modèle développé par l'IFP est de type diffusif, il comporte des lois de transport moyennées adaptées pour les grandes échelles de temps et d'espace des bassins d'exploration pétrolière, typiquement de l'ordre de 100 km en espace et 100 Ma en temps. Il prend en compte quatre principaux systèmes de dépôt et lois de transport correspondantes: un transport gravitaire continental et marin purement diffusif, un transport fluvial impliquant le calcul du flux d'eau, et un transport par les vagues en milieu côtier.

Dans un souci de simplification et compte tenu des grandes échelles considérées, les lois de transport sont toutes de type (22) pour des valeurs des exposants α et β fixées à 1 représentant un comportement moyen des systèmes de dépôt. Le flux q_s est donc proportionnel à la pente S pour chacun des trois termes, et aux flux d'eau q_e pour le terme de transport fluvial, moyennant des coefficients de diffusion du type (21) distinguant les milieux continental et marin, conduisant à l'expression suivante

$$q_s = \left(k_v(b) + k_e(b)q_e + k_g(b) \right) \nabla b \quad (23)$$

où k_g est le coefficient de diffusion gravitaire, k_v le coefficient de diffusion lié aux vagues, k_e le coefficient de diffusion fluvial.

La loi de conservation des sédiments s'écrit

$$\partial_t h + \text{div}(q_s) = S, \quad (24)$$

dans l'hypothèse d'un sédiment composé d'une seule lithologie et de porosité nulle.

Ce cadre est ensuite étendu pour prendre en compte le cas multi-lithologique où les sédiments sont décrits comme un mélange immiscible de lithologies de base (argile, sable par exemple) selon l'approche introduite par Rivenaes [R92], ainsi que la disponibilité limitée en sédiments sous la forme d'une contrainte sur le taux d'érosion.

Contributions: dans ce contexte, notre première contribution a consisté à formaliser sur le plan mathématique le modèle multi-lithologique introduit au niveau discret par Rivenaes [R92]

et Didier Granjeon [G97], et à proposer un modèle mathématique pour le modèle discret de couplage de la contrainte sur le taux d'érosion avec la loi de conservation des sédiments introduit par Didier Granjeon [G97]. Ce travail a fait l'objet des publications [4], [24] et sera détaillé dans le paragraphe suivant 4.1.

Cette formalisation nous a ensuite permis de concevoir un schéma numérique et des solveurs non linéaire et linéaire des systèmes discrets, satisfaisant les objectifs de stabilité, de conservativité, de robustesse et de performance, ils sont décrits au paragraphe 4.2 et font l'objet des publications [4], [24], [21], [1].

Enfin, nous avons prouvé l'existence et l'unicité de solution au modèle multi-lithologique et la convergence du schéma numérique vers cette solution, dans un cas simplifié où le calcul des concentrations des couches en lithologies de base découple de celui de la géométrie des couches successives. Ce travail sera décrit au paragraphe 4.4 et fait l'objet des publications [5], [22], [3].

L'ensemble de ces travaux a été mené en équipe en collaboration avec Robert Eymard de l'université Marne la Vallée, Thierry Gallouët de l'université d'Aix Marseille, Didier Granjeon de la division Géologie, Géochimie de l'IFP, Véronique Gervais, Quang Huy Tran et Sylvie Wolf de la division Technologie, Informatique et Mathématiques Appliquées de l'IFP. Il est constitué pour une large part du travail de thèse de Véronique Gervais coencadré par Thierry Gallouët et moi même.

4.1 Modèle multi-lithologique sous contrainte de taux d'érosion maximum [4], [24]

Le modèle cinématique du bassin exposé ici (voir figure 3) prend uniquement en compte les déformations et déplacements verticaux comme la compaction verticale des sédiments poreux ou les déplacements verticaux du socle du bassin sous l'effet de la tectonique.

Cette hypothèse simplifie la modélisation du couplage des déformations mécaniques avec les processus de sédimentation/érosion qui sont supposés s'effectuer verticalement en surface du bassin.

Les lois de transport considérées seront proportionnelles au gradient de la topographie (cf. (23)) et on n'abordera pas la description du flux d'eau qui fait l'objet de travaux en cours (voir 4.5).

Géométrie: soit \mathbb{R}^{d+1} l'espace euclidien du bassin avec $d = 1$ ou 2 . On définit l'*extension horizontale du bassin* par sa projection Ω sur un plan ($d = 2$) ou une ligne ($d = 1$) horizontal de référence. Ce dernier est muni d'un système de coordonnées cartésiennes et on notera implicitement x les coordonnées d'un de ses point. On construit un système de coordonnées de l'espace \mathbb{R}^{d+1} en rajoutant la coordonnée verticale et on notera (x, z) les coordonnées d'un point dans ce système de façon à distinguer la coordonnée verticale. Par ailleurs, on considèrera par la suite une séquence d'évolution temporelle du bassin sur l'intervalle $(0, T)$.

Le socle du bassin représente la surface de séparation entre le substrat, roche dure supposée non érodable, et les sédiments. Cette surface est paramétrée par sa cote verticale $z = H(x, t)$,

$(x, t) \in \Omega \times (0, T)$. Son déplacement au cours du temps modélise *la tectonique verticale*.

Le *niveau marin* est donné par sa côte verticale $z = H_m(t)$, $t \in (0, T)$ et *l'eustatisme* désigne les variations du niveau de la mer au cours du temps.

L'*accommodation* $a(x, t) = H_m(t) - H(x, t)$, $(x, t) \in \Omega \times (0, T)$, définit l'espace disponible au remplissage du bassin par les sédiments, il combine les effets de l'eustatisme et de la tectonique verticale.

L'*épaisseur de sédiments* au dessus du socle est notée $h(x, t)$, $(x, t) \in \Omega \times (0, T)$ et la *bathymétrie*, définie par $b(x, t) = H_m(t) - H(x, t) - h(x, t) = a(x, t) - h(x, t)$, représente l'épaisseur de la tranche d'eau entre le niveau marin et le *profil de dépôt* surface du bassin paramétrée par $z = h(x, t) + H(x, t)$, $(x, t) \in \Omega \times (0, T)$.

La présentation du modèle est complexifiée progressivement en considérant successivement

- 4.1.1 des sédiments constitués d'une seule lithologie de porosité nulle et un transport diffusif non linéaire,
- 4.1.2 le couplage du transport diffusif et de la disponibilité limitée en sédiments,
- 4.1.3 l'extension au cadre multi-lithologique pour lequel les sédiments sont décrits comme un mélange immiscible de L lithologies de base de porosité nulle,
- 4.1.4 la compaction des sédiments poreux.

4.1.1 Modèle diffusif mono-lithologique

La loi de conservation (20) s'obtient en écrivant la conservation de la masse des tranches de sédiments $(H, h + H)$. Ceux ci étant supposés de porosité nulle, leur densité linéique est constante et on écrit simplement la conservation de l'épaisseur de sédiments $h = \int_H^{h+H} dz$. Cette conservation s'écrit naturellement sur le domaine Ω car le dépôt et l'érosion s'effectuent verticalement.

Le flux q_s en m^2/s est linéique par unité de longueur projetée sur le plan horizontal. Il est proportionnel au gradient de la topographie moyennant un coefficient de diffusion non linéaire $k(b)$ fonction de la bathymétrie qui permet essentiellement de distinguer les environnements de dépôt marin et continental (cf. (21)).

Etant donnés k , g , b^0 , a , trouver h tel que

$$\begin{aligned} \partial_t h + \operatorname{div}(k(b) \nabla b) &= 0 && \text{sur } \Omega \times (0, T), \\ k(b) \nabla b \cdot n_x &= g && \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \\ b|_{t=0} &= b^0 && \text{sur } \Omega, \\ b &= a - h && \text{sur } \Omega \times (0, T), \end{aligned} \tag{25}$$

où les opérateurs ∇ et div sont définis sur le plan horizontal de référence \mathbb{R}^d , n_x est la normale sortante à la frontière $\partial\Omega$, la donnée g représente les apports de sédiments (en m^2/s)

aux frontières entrantes ($g < 0$) ou les flux sortants de sédiments aux frontières sortantes ($g \geq 0$), et la bathymétrie initiale b^0 est l’opposé du profil de dépôt initial dans le repère lié au niveau marin initial.

4.1.2 Disponibilité limitée en sédiments

Le modèle diffusif précédent suppose que les processus de sédimentation et d’érosion sont symétriques. Or, comme le souligne [AH89], la phase de production de sédiments meubles par l’attaque climatique et biologique précède leur transport par érosion gravitaire, éolienne, fluviale ou marine.

Ce taux de production de sédiments “transportables” doit être pris en compte car il devient le facteur prépondérant dans les environnements où l’attaque climatique est faible et où l’intensité du transport est forte.

Il est modélisé dans [AH89] par un taux de production $\partial_t s$ de sédiments meubles, en m/s, décroissant exponentiellement en fonction de la profondeur des sédiments $h - s$

$$\partial_t s = -E e^{-F(h-s)}, s|_{t=0} = h|_{t=0},$$

et par l’imposition d’une contrainte sur l’épaisseur des sédiments

$$h \geq s. \tag{26}$$

Alternativement, Didier Granjeon dans [G97] ou [GJ99] prescrit directement un taux maximum d’érosion

$$\partial_t h \geq -E, \tag{27}$$

où $-E \leq 0$ dépend du climat (dépendance en temps), de l’environnement (dépendance en bathymétrie), de la composition lithologique et de l’âge des sédiments depuis leur dernier dépôt.

Ces deux modèles permettent en particulier d’imposer la non érodabilité du socle en imposant au taux E de s’annuler pour $h \leq 0$.

Le couplage de la contrainte (26) ou (27) avec le transport diffusif est un point essentiel dans la mesure où les deux phénomènes peuvent être simultanément dominant dans un bassin avec typiquement un domaine en érosion sous contrainte en milieu continental où le transport est intense et un domaine en sédimentation ou érosion non contrainte en milieu marin où le transport est plus faible.

Néanmoins, à notre connaissance, cette question n’est explicitée dans aucun des travaux traitant du sujet comme [AH89] ou [TS94] même si des simulations numériques sont présentées.

Pour formaliser un modèle, nous sommes partis des travaux de Didier Granjeon [G97] qui réalise ce couplage directement au niveau du schéma discret, volume fini en espace et explicite en temps. Etant donnés les flux $k(b) \nabla b$ du modèle diffusif discrétisés aux arêtes du maillage, l’idée fondamentale consiste à tronquer les flux discrets aux arêtes sortantes en parcourant les cellules dans l’ordre des topographies décroissantes, de façon (i) à forcer la solution à vérifier la contrainte (26) ou (27) sur le taux d’érosion et (ii) à maximiser le flux tronqué dans la limite du flux diffusif.

Pour obtenir le modèle continu, nous introduisons une nouvelle inconnue λ , contrainte par l'inégalité

$$\lambda \leq 1 \quad (28)$$

et jouant le rôle d'un limiteur de flux conduisant à la nouvelle définition du flux de sédiments

$$q_s = \lambda k(b) \nabla b$$

et à l'équation de conservation sur h

$$\partial_t h + \operatorname{div}(\lambda k(b) \nabla b) = 0 \text{ sur } \Omega \times (0, T).$$

La fermeture du modèle est obtenue en écrivant les conditions de complémentarité sur les deux contraintes inégalité (28) et (27) ((27) retenue dans la suite préférentiellement à (26)) pour fixer les idées):

- (i) si $\lambda < 1$, alors la contrainte sur le taux d'érosion maximum est active i.e. $\partial_t h = -E$,
- (ii) si la contrainte sur le taux d'érosion maximum $\partial_t h > -E$ est inactive, alors $\lambda = 1$ i.e. le flux q_s est égal au flux diffusif $k(b) \nabla b$,

soit

$$\begin{cases} (1 - \lambda)(\partial_t h + E) = 0, \\ (1 - \lambda) \geq 0, \\ (\partial_t h + E) \geq 0, \end{cases} \text{ sur } \Omega \times (0, T),$$

que l'on notera sous forme condensée

$$\mathcal{U}(1 - \lambda, \partial_t h + E) = 0 \text{ sur } \Omega \times (0, T). \quad (29)$$

où \mathcal{U} est la fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} définie par $\mathcal{U}(A, B) = A + B - |A - B|$.

Les conditions aux limites sortantes du système (25) doivent aussi être le cas échéant tronquées de façon à satisfaire la contrainte (27).

Soit $\Sigma_- = \{(x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), g(x, t) < 0\}$ la frontière entrante et $\Sigma_+ = \{(x, t) \in \partial\Omega \times (0, T), g(x, t) \geq 0\}$ la frontière sortante. La condition aux limites sur Σ_+ s'exprime à nouveau sous la forme de conditions de complémentarité

$$\mathcal{U}(g - q_s \cdot n_x, \partial_t h + E) = 0 \text{ sur } \Sigma_+, \quad (30)$$

conduisant à passer d'une condition de Neumann à une condition de Dirichlet sur le taux d'érosion lorsque $q_s \cdot n_x < g$.

En résumé le modèle diffusif mono-lithologique avec disponibilité limitée en sédiments s'écrit sous la forme suivante

étant donnés k, g, a, b^0, E , trouver (h, λ) tels que

$$\begin{aligned}
 \partial_t h + \operatorname{div}(\lambda k(b) \nabla b) &= 0 && \text{sur } \Omega \times (0, T), \\
 \mathcal{U}(\partial_t h + E, 1 - \lambda) &= 0 && \text{sur } \Omega \times (0, T), \\
 \lambda k(b) \nabla b \cdot n_x &= g && \text{sur } \Sigma_-, \\
 \mathcal{U}(\partial_t h + E, g - \lambda k(b) \nabla b \cdot n_x) &= 0 && \text{sur } \Sigma_+, \\
 b|_{t=0} &= b^0 && \text{sur } \Omega, \\
 b &= a - h && \text{sur } \Omega \times (0, T),
 \end{aligned} \tag{31}$$

Il existe d'autres modèles traduisant la dissymétrie entre les processus de sédimentation et d'érosion par une dépendance du coefficient de diffusion en fonction du signe de $\partial_t h$ (cf par exemple Rivenaes [R92]) mais ces modèles "locaux" ne peuvent pas prendre en compte de façon satisfaisante des contraintes de type (26) ou (27).

Le modèle (31) s'avère original sur le plan mathématique et présente des difficultés non résolues actuellement. Les travaux récents de Robert Eymard et Thierry Gallouët résolvent le problème à h fixé: étant donné un champ $\varphi (= k(b)\nabla b)$ de classe C^1 , trouver λ tel que

$$\mathcal{U}(E - \operatorname{div}(\lambda \varphi), 1 - \lambda) = 0,$$

et montrent qu'il existe une unique solution faible satisfaisant $\lambda \geq 0$.

Gérard Gagneux et Guy Vallet analysent le problème couplé (31), ils exhibent des solutions particulières du problème d'évolution couplé et analysent un problème régularisé.

4.1.3 Extension au cadre multi-lithologique

Dans ce modèle les sédiments sont constitués d'un mélange immiscible de L lithologies de base caractérisées par leur granulométrie (sable, argile, carbonate, ...). Chaque lithologie, indiquée dans la suite par $i = 1, \dots, L$ est considérée dans cette section comme un matériau incompressible de densité constante et de porosité nulle (la compaction des sédiments poreux sera prise en compte dans la section suivante).

Le modèle multi-lithologique rend compte, en plus de la géométrie des couches, de leur composition en lithologies définie par les concentrations $c_i(x, z, t)$ en chaque point du bassin $\{(x, z) / x \in \Omega, z < (h + H)(x, t)\}$ et telles que

$$c_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^L c_i = 1.$$

De façon à se ramener au domaine fixe $\Omega \times (0, +\infty) \times (0, T)$, on introduit le changement de variable $\zeta = h + H - z$, le nouveau système de coordonnées (x, ζ, t) et les concentrations $u_i(x, \zeta, t) = c_i(x, z, t)$ dans ce nouveau système.

En l'absence de compaction, les concentrations satisfont l'équation de conservation

$$\partial_t u_i + \partial_t h \partial_\zeta u_i = 0 \text{ sur } \Omega \times (0, +\infty) \times (0, T)$$

qui traduit le fait que, dans le repère matériel lié au socle, les concentrations n'évoluent pas en temps sur les ouverts et ne sont modifiées qu'en surface par les processus de sédimentation et d'érosion.

L'évolution de la concentration u_i est donc déterminée par une condition aux limites entrante à la surface du bassin $z = (h + H)(x, t)$ en cas de sédimentation où $\partial_t h > 0$.

Cette condition entrante est définie par une nouvelle variable c_i^s définie sur $\Omega \times (0, T)$ représentant la concentration de surface telle que

$$c_i^s \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^L c_i^s = 1 \text{ sur } \Omega \times (0, T).$$

Finalement, pour tout $i = 1, \dots, L$, u_i vérifie l'équation hyperbolique linéaire suivante avec condition aux limites entrante

$$\begin{cases} \partial_t u_i + \partial_t h \partial_z u_i = 0 & \text{sur } \Omega \times (0, +\infty) \times (0, T), \\ u_i|_{z=0} = c_i^s, & \text{sur } \{(x, t) \in \Omega \times (0, T) / \partial_t h(x, t) > 0\}, \\ u_i|_{t=0} = u_i^0 & \text{sur } \Omega \times (0, +\infty), \end{cases} \quad (32)$$

où u_i^0 , $i = 1, \dots, L$ est la composition initiale du bassin telle que $u_i^0 \geq 0$ et $\sum_{i=1}^L u_i^0 = 1$.

Les concentrations de surface c_i^s , $i = 1, \dots, L$ qui définissent la composition des sédiments déposés au sommet du bassin en cas de sédimentation, représentent, en cas d'érosion $\partial_t h \leq 0$, la concentration des sédiments traversant la surface comme le montre la définition des flux lithologiques à la surface du bassin suivante.

Cette définition est celle introduite par Rivenaes [R92] qui attribue à chaque lithologie $i = 1, \dots, L$ un coefficient de diffusion $k_i(b)$ de façon à différencier l'efficacité du transport selon la nature essentiellement granulométrique des lithologies. Par ailleurs, de façon à modéliser l'effet du mélange des lithologies sur le transport, Rivenaes considère, en l'absence de toute expérimentation possible, le modèle le plus simple où le flux est proportionnel à la concentration de surface c_i^s . On obtient donc pour tout $i = 1, \dots, L$, le flux lithologique suivant en surface du bassin

$$q_{i,s} = \lambda c_i^s k_i(b) \nabla b. \quad (33)$$

Il reste à écrire, pour chaque lithologie $i = 1, \dots, L$, la conservation de la masse en lithologie i de la tranche $(H, h + H)$ ou encore de

$$h_i(x, t) = \int_{H(x,t)}^{(h+H)(x,t)} c_i(x, z, t) dz,$$

dans l'hypothèse de porosité nulle et de densité constante par lithologie. On obtient

$$\begin{cases} \partial_t h_i + \text{div} q_{i,s} = 0 & \text{sur } \Omega \times (0, T) \text{ pour } i = 1, \dots, L, \\ \sum_{i=1}^L c_i^s = 1 & \text{sur } \Omega \times (0, T), \end{cases} \quad (34)$$

auquel il faut rajouter les conditions de complémentarité (29).

En injectant l'équation de conservation (32), le taux d'accumulation $\partial_t h_i$ s'exprime formellement comme le produit de la concentration à la surface du bassin et du taux de sédimentation/érosion $u_i|_{\zeta=0}\partial_t h$ qui n'est autre que la trace en $\zeta = 0$ du flux de l'équation hyperbolique linéaire (32).

La condition aux limites sortante sur Σ_+ est toujours donnée par les conditions de complémentarité (30) avec la définition du flux total $q_s = \sum_{i=1}^L q_{i,s}$.

Les conditions aux limites entrantes sur Σ_- prescrivent les flux $q_{i,s} \cdot n_x = \mu_i^e g$ pour tout $i = 1, \dots, L$ où $\mu_{i,e}, i = 1, \dots, L$ sont les flux fractionnaires entrants donnés sur Σ_- tels que $\mu_i^e \geq 0$ et $\sum_{i=1}^L \mu_i^e = 1$.

La figure 4 présente schématiquement un exemple de bassin bidimensionnel en rajoutant les nouvelles variables et les nouvelles données du modèle multi-lithologique.

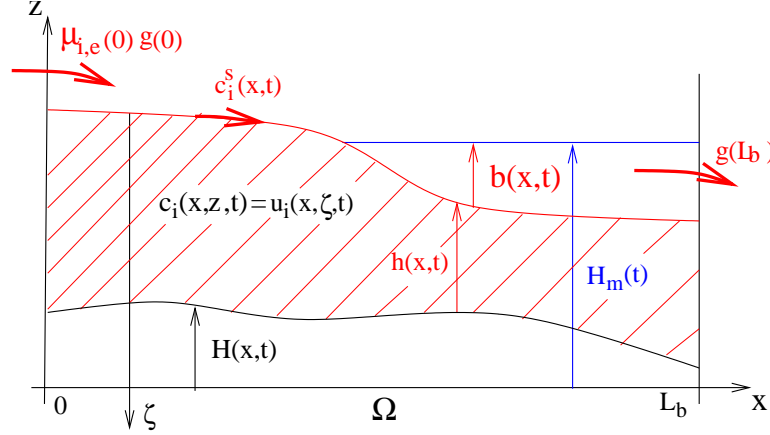


Figure 4: Représentation schématique d'un bassin sédimentaire bidimensionnel à l'instant t dans le cas multi-lithologique pour un flux entrant en $x = 0$ et un flux sortant en $x = L_b$

En résumé le modèle diffusif multi-lithologique sous contrainte de taux d'érosion maximum s'écrit sous la forme suivante.

Etant donnés

$$E, a, g, b^0, u_i^0, k_i, \mu_i^e, \text{ pour tout } i = 1, \dots, L$$

trouver

$$h, \lambda, u_i, c_i^s \text{ pour tout } i = 1, \dots, L$$

tels que

Equations de conservation sur $\Omega \times (0, T)$

$$\begin{aligned} u_i|_{\zeta=0} \partial_t h + \operatorname{div} \left(\lambda c_i^s k_i(b) \nabla b \right) &= 0 && \text{sur } \Omega \times (0, T), \\ \sum_{i=1}^L c_i^s &= 1 && \text{sur } \Omega \times (0, T), \\ \mathcal{U} \left(\partial_t h + E, 1 - \lambda \right) &= 0 && \text{sur } \Omega \times (0, T), \\ \lambda c_i^s k_i(b) \nabla b \cdot n_x &= \mu_i^e g && \text{sur } \Sigma_-, \\ \mathcal{U} \left(\partial_t h + E, g + \sum_{i=1}^L \lambda c_i^s k_i(b) \nabla b \cdot n_x \right) &= 0 && \text{sur } \Sigma_+, \\ b|_{t=0} &= b^0 && \text{sur } \Omega, \\ a &= b - h && \text{sur } \Omega \times (0, T), \end{aligned}$$

Equations de conservation sur $\Omega \times (0, +\infty) \times (0, T)$

$$\begin{aligned} \partial_t u_i + \partial_t h \partial_\zeta u_i &= 0 && \text{sur } \Omega \times (0, +\infty) \times (0, T), \\ u_i|_{\zeta=0} &= c_i^s && \text{sur } \{(x, t) \in \Omega \times (0, T) / \partial_t h(x, t) > 0\}, \\ u_i|_{t=0} &= u_i^0 && \text{sur } \Omega \times (0, +\infty). \end{aligned} \tag{35}$$

Le modèle multi-lithologique sans contrainte est original sur le plan mathématique dans l'expression du couplage des équations de conservation à la surface du bassin et celles à l'intérieur du bassin. Ce couplage s'effectue, d'une part, par la condition aux limites entrante c_i^s en mode sédimentation, et, d'autre part, par la trace $u_i|_{\zeta=0} \partial_t h$, du flux $u_i \partial_t h$, à la surface du bassin.

Nous étudierons ce système au paragraphe 4.4 dans le cas où la variable h découple des variables c_i^s et u_i lorsque les coefficients de diffusion k_i sont tous égaux. D'autre part on présentera des solutions analytiques "stationnaires" du système sans contrainte dans le cas $d = 1$ au paragraphe 4.1.

4.1.4 Compaction des sédiments poreux

Les lithologies sont considérées de densité constante et leur mélange est un milieu poreux de porosité $\phi(x, z, t)$ pour

$$(x, z, t) \in \{(x, z, t) \in \mathbb{R}^{d+2} / x \in \Omega, t \in (0, T), H(x, t) < z < (h + H)(x, t)\}.$$

Les déformations et les déplacements étant supposés uniquement verticaux, on définit le repère matériel par le nouveau système de coordonnées (x, z^m, t) tel que

$$z^m = \int_{H(x,t)}^z (1 - \phi(x, u, t)) du,$$

dont la transformation inverse

$$z = H(x, t) + \int_0^{z^m} \frac{1}{1 - \phi^m(x, u, t)} du,$$

où $\phi^m(x, z^m, t) = \phi(x, z, t)$, définit les trajectoires lagrangiennes à (x, z^m) fixé. Le cadre Eulérien est défini par le champ de vitesse $v_z(x, z, t)$ solution de l'équation

$$\begin{aligned}\partial_t(1 - \phi) + \partial_z\left((1 - \phi) v_z\right) &= 0, \\ v_z|_{z=H} &= \partial_t H.\end{aligned}$$

Soit $r(x, z, t) = r^m(x, z^m, t)$ un champ scalaire vérifiant l'équation de conservation dans le repère Eulérien

$$\partial_t\left((1 - \phi) r\right) + \partial_z\left((1 - \phi) r v_z\right) = 0,$$

alors de façon équivalente, il vérifie l'équation de conservation

$$\partial_t r^m = 0,$$

dans le repère Lagrangien.

On note

$$h^m(x, t) = \int_{H(x,t)}^{(h+H)(x,t)} (1 - \phi(x, u, t)) du,$$

l'épaisseur de sédiments dans le repère Lagrangien.

La composition du mélange est définie par les fractions lithologiques de *hauteurs solides*

$$c_i(x, z, t) = \frac{dz_i^m}{dz^m} \text{ avec } c_i \geq 0 \text{ et } \sum_{i=1}^L c_i = 1.$$

Chacune de ces concentrations vérifie la loi de conservation $\partial_t c_i^m = 0$ avec $c_i^m(x, z^m, t) = c_i(x, z, t)$ auquel s'ajoute comme précédemment la condition aux limites entrante $c_i^m|_{z^m=h^m} = c_i^s$ en cas de sédimentation $\partial_t h^m > 0$.

Le terme d'accumulation des lois de conservation de surface s'écrit

$$\partial_t \int_{H(x,t)}^{(h+H)(x,t)} (1 - \phi(x, u, t)) c_i(x, u, t) du = c_i^m|_{z^m=h^m} \partial_t h^m.$$

et la disponibilité limitée en sédiments sera imposée par exemple par la contrainte sur le taux d'érosion $\partial_t h^m \geq -E$. Tout compte fait, cela conduit au système multi-lithologique sous contrainte et avec compaction verticale suivant.

Etant donnés

$$\phi, E, a, g, b^0, c_i^{0,m}, k_i, \mu_{i,e}, \text{ pour tout } i = 1, \dots, L$$

trouver

$$h, \lambda, c_i^m, c_i^s \text{ pour tout } i = 1, \dots, L$$

tels que

Equations de conservation sur $\Omega \times (0, T)$

$$\begin{aligned} c_i^m|_{z^m=h^m} \partial_t h^m + \operatorname{div} \left(\lambda c_i^s k_i(b) \nabla b \right) &= 0 && \text{sur } \Omega \times (0, T), \\ \sum_{i=1}^L c_i^s &= 1 && \text{sur } \Omega \times (0, T), \\ \mathcal{U} \left(\partial_t h^m + E, 1 - \lambda \right) &= 0 && \text{sur } \Omega \times (0, T), \\ \lambda c_i^s k_i(b) \nabla b \cdot n_x &= \mu_i^e g && \text{sur } \Sigma_-, \\ \mathcal{U} \left(\partial_t h^m + E, g + \sum_{i=1}^L \lambda c_i^s k_i(b) \nabla b \cdot n_x \right) &= 0 && \text{sur } \Sigma_+, \\ b|_{t=0} &= b^0 && \text{sur } \Omega, \\ a &= b - h && \text{sur } \Omega \times (0, T), \end{aligned}$$

Equations de conservation sur $\Omega \times (0, +\infty) \times (0, T)$

$$\begin{aligned} \partial_t c_i^m &= 0 && \text{sur } \{x \in \Omega, z^m \in (0, h^m(x, t)), t \in (0, T)\}, \\ c_i^m|_{z^m=h^m} &= c_i^s && \text{sur } \{(x, t) \in \Omega \times (0, T) / \partial_t h^m(x, t) > 0\}, \\ c_i^m|_{t=0} &= c_i^{0,m} && \text{sur } \{x \in \Omega, z^m \in (0, h^{0,m}(x))\}, \end{aligned} \tag{36}$$

couplé avec l'équilibre mécanique et une loi rhéologique reliant la contrainte à la porosité (il faut dans ce cas prendre en compte le couplage avec la loi de Darcy monophasique eau), ou plus simplement, avec une loi porosité/profondeur du type $\phi(x, z, t) = \Phi(h(x, t) + H(x, t) - z)$ ou encore avec une loi obtenue à partir des lois porosité/profondeur Φ_i de chaque lithologie par la relation

$$\frac{1}{1 - \Phi(x, z, t)} = \sum_{i=1}^L \frac{c_i}{1 - \Phi_i(h(x, t) + H(x, t) - z)}.$$

Il est intéressant de constater que, dans le cas d'une loi porosité/profondeur Φ supposée continue, le taux de sédimentation/érosion $\partial_t h^m$ s'écrit

$$\partial_t h^m = (1 - \Phi(h)) \partial_t h,$$

conduisant, dans le cas du modèle diffusif mono-lithologique sans contrainte, à l'équation parabolique non linéaire

$$(1 - \Phi(h)) \partial_t h + \operatorname{div} \left(k(a - h) \nabla(a - h) \right) = 0. \tag{37}$$

L'épaisseur de sédiments h ne dépend donc, dans ce cas, que de la porosité au fond du bassin $\Phi(h)$ et nullement de la porosité de dépôt $\Phi(0)$.

Paléo-bathymétries: les paléo-bathymétries sont définies comme les bathymétries au moment du dépôt des sédiments dans le bassin à l'instant t . A l'instant présent, elles sont une des composantes du faciès sédimentologique.

Soient $\mathcal{B}(x, z, t)$ les paléo-bathymétries aux points (x, z) du bassin à l'instant t dans le repère Eulérien, et $\mathcal{B}^m(x, z^m, t)$ dans le repère Lagrangien. Alors $\mathcal{B}^m(x, z^m, t)$ est la solution du système hyperbolique avec condition aux limite entrante suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \mathcal{B}^m = 0 & \text{sur } \{x \in \Omega, z^m \in (0, h^m(x, t)), t \in (0, T)\}, \\ \mathcal{B}^m|_{z^m=h^m} = b, & \text{sur } \{(x, t) \in \Omega \times (0, T) / \partial_t h^m(x, t) > 0\}, \\ \mathcal{B}^m|_{t=0} = \mathcal{B}^{m,0} & \text{sur } \{x \in \Omega, z^m \in (0, h^{0,m}(x))\}. \end{array} \right. \quad (38)$$

Paléo-profil de dépôt: ce sont les surface $z = \mathcal{Z}(x, t', t)$ aux temps t' fixés définissant la géométrie des couches du bassin à l'instant t en tenant compte des érosions postérieures aux dépôts des sédiments, avec

$$\mathcal{Z}(x, t', t) = H(x, t) + \int_0^{\min_{0 \leq t' \leq t} h^m(x, t')} \frac{1}{1 - \phi^m(x, z^m, t)} dz^m.$$

4.1.5 Exemples de solutions

Progradation et rétrogradation d'un Delta

On considère un modèle de bassin bidimensionnel avec $\Omega = (0, L_b)$, $L_b = 200$ km, la topographie initiale $h^0(x) = 25e^{-8\frac{x}{L_b}} + 10$ m, le niveau marin $H_m(t) = 25 + 5 \cos(6t)$ m et sans tectonique $H(x, t) = 0$.

Les sédiments sont composés de deux lithologies de porosités nulles (l'argile d'indice 1 et le sable d'indice 2), de coefficients de diffusion $k_i(b)$ donnés par (21) avec $k_{1,c} = 10^5$ m²/an, $k_{1,m} = 10^4$ m²/an, $k_{2,c} = 5.10^4$ m²/an et $k_{2,m} = 10^3$ m²/an.

L'apport en sédiments est défini par le flux total entrant $g(0) = -2$ m²/an et les flux fractionnaires $\mu_1^e(0) = \mu_2^e(0) = 0.5$ en $x = 0$, et un flux total sortant nul en $x = L_b$. La composition initiale du bassin est donnée par $c_1^0(x, z) = c_2^0(x, z) = 0.5$ pour $z < h^0(x)$, $x \in \Omega$.

la figure 5 illustre l'effet des variations eustatiques et de la contrainte sur le taux d'érosion.

Phase de progradation: correspond à la baisse du niveau marin qui entraîne un abaissement du profil d'équilibre des fleuves induisant une érosion forte de la plaine côtière, un transport rapide des sédiments vers le littoral et une avance du rivage dont la pente présente une valeur élevée.

Phase de rétrogradation: correspond à la montée du niveau marin induisant une élévation du profil d'équilibre des fleuves qui se traduit par une sédimentation importante en domaine continental et un recul du rivage.

La contrainte sur le taux d'érosion vient clairement limiter le transport par érosion du domaine littoral dans la phase de progradation.

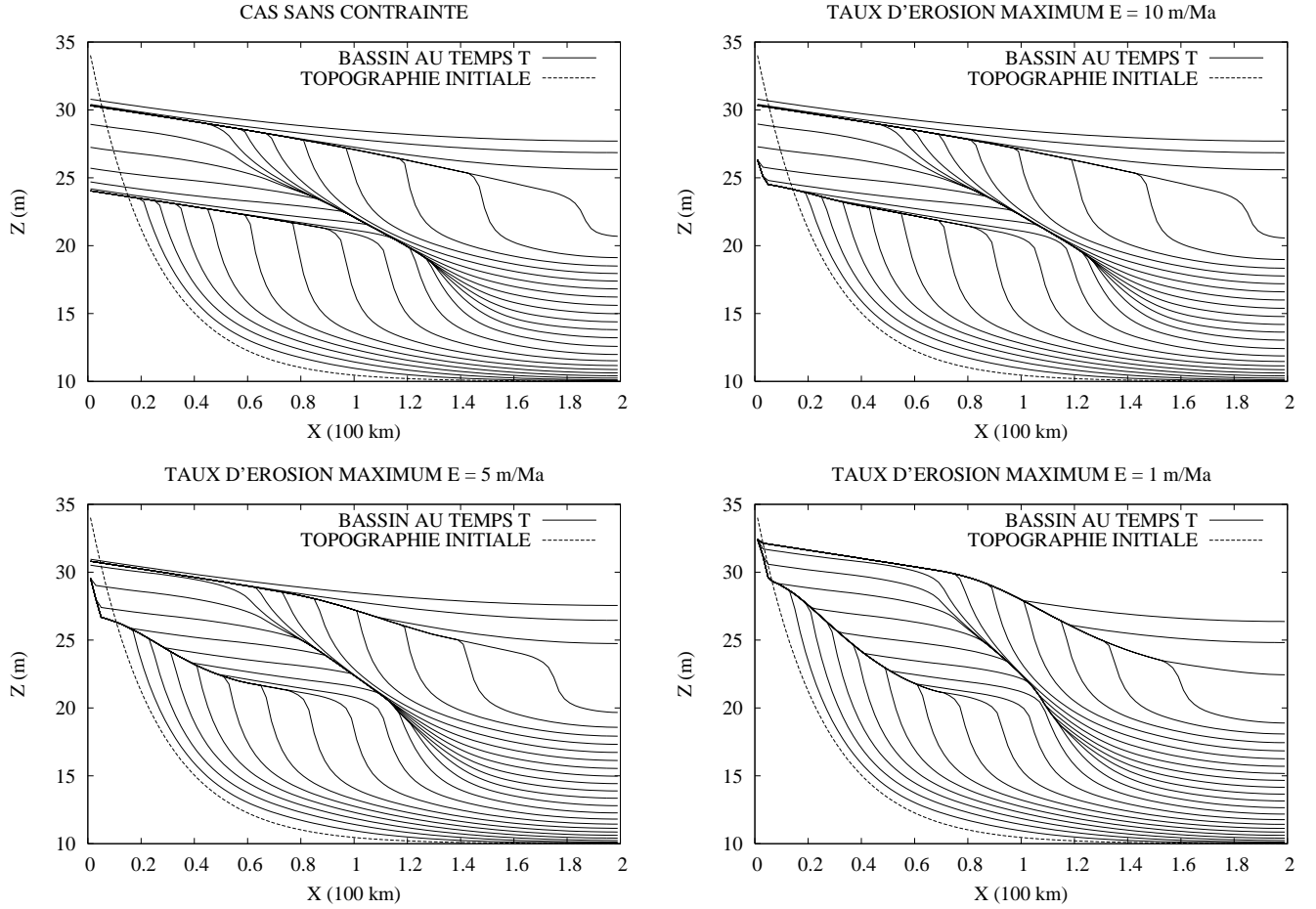


Figure 5: Paléo-profil de dépôt du bassin au temps $T = 1.6$ Ma pour différentes valeurs du taux maximum d'érosion $E = +\infty, 10, 5$ et 1 en m/Ma.

Solutions stationnaires du problème multi-lithologique sans contrainte On reprend à titre d'illustration quelques résultats de la thèse de Véronique Gervais sur les solutions stationnaires du modèle multi-lithologiques sans contrainte pour un bassin 2D ($d = 1$). Ces solutions sont obtenues pour

$$\begin{cases} \partial_{t^2} h = 0, \quad \partial_t g = 0, \quad a = 0, \\ \partial_t c_i^s = 0, \quad \partial_t \mu_i^e = 0, \quad \partial_z c_i^0 = 0 \text{ pour } i = 1, \dots, L, \end{cases}$$

et pour des coefficients de diffusion k_i constants. En sommant les équations de conservation (34) pour $i = 1, \dots, L$ on obtient l'équation

$$\partial_t h + \partial_x q_s = 0,$$

avec $q_s = -(\sum_{i=1}^L k_i c_i^s) \partial_x h$ d'où l'on déduit en dérivant cette équation en temps que

$$\partial_t h = -\frac{g(0) + g(L_b)}{L_b} \text{ et } q_s = (g(0) + g(L_b)) \frac{x}{L_b} - g(0).$$

Le taux d'érosion étant constant, le bassin est soit totalement en mode sédimentation si $g(0) + g(L_b) < 0$ soit totalement en mode érosion si $g(0) + g(L_b) \geq 0$.

Les concentrations de surfaces c_i^s vérifient le système d'équations aux dérivées ordinaires du premier ordre

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{k_i c_i^s}{\sum_{j=1}^L k_j c_j^s} \left(x - \frac{g(0)L_b}{g(0) + g(L_b)} \right) \right] = \begin{cases} c_i^s & \text{si } g(0) + g(L_b) < 0 \\ c_i^0 & \text{si } g(0) + g(L_b) \geq 0 \end{cases} ,$$

avec les conditions aux limites entrantes μ_i^e en $x = 0$ et/ou $x = L_b$, et le profil de dépôt est donnée à une constante près par l'intégrale

$$h(x, t) = -\frac{g(0) + g(L_b)}{L_b} t + \int_0^x \frac{(g(0) + g(L_b)) \frac{y}{L_b} - g(0)}{\sum_{i=1}^L k_i c_i^s(y)} dy + C.$$

A titre d'exemple, la figure 6 présente pour deux lithologies argile/sable, les profils de dépôt et les concentrations d'argile c_1^s avec $L_b = 200$ km, $g(0) = -2$ m²/an, $\mu_1^e(0) = \mu_2^e(0) = 0.5$, $g(L_b) = 0$, $k_2 = 10^4$ m²/an et différents ratios $\frac{k_1}{k_2}$. On constate clairement que la lithologie la plus diffusive (l'argile) tombe plus vite au bas du bassin. A la limite du ratio $\frac{k_1}{k_2}$ infini, les lithologies ne se mélangent plus, la totalité du sable se trouve à gauche de la côte $\mu_2^e(0)L_b$ et la totalité de l'argile à droite.

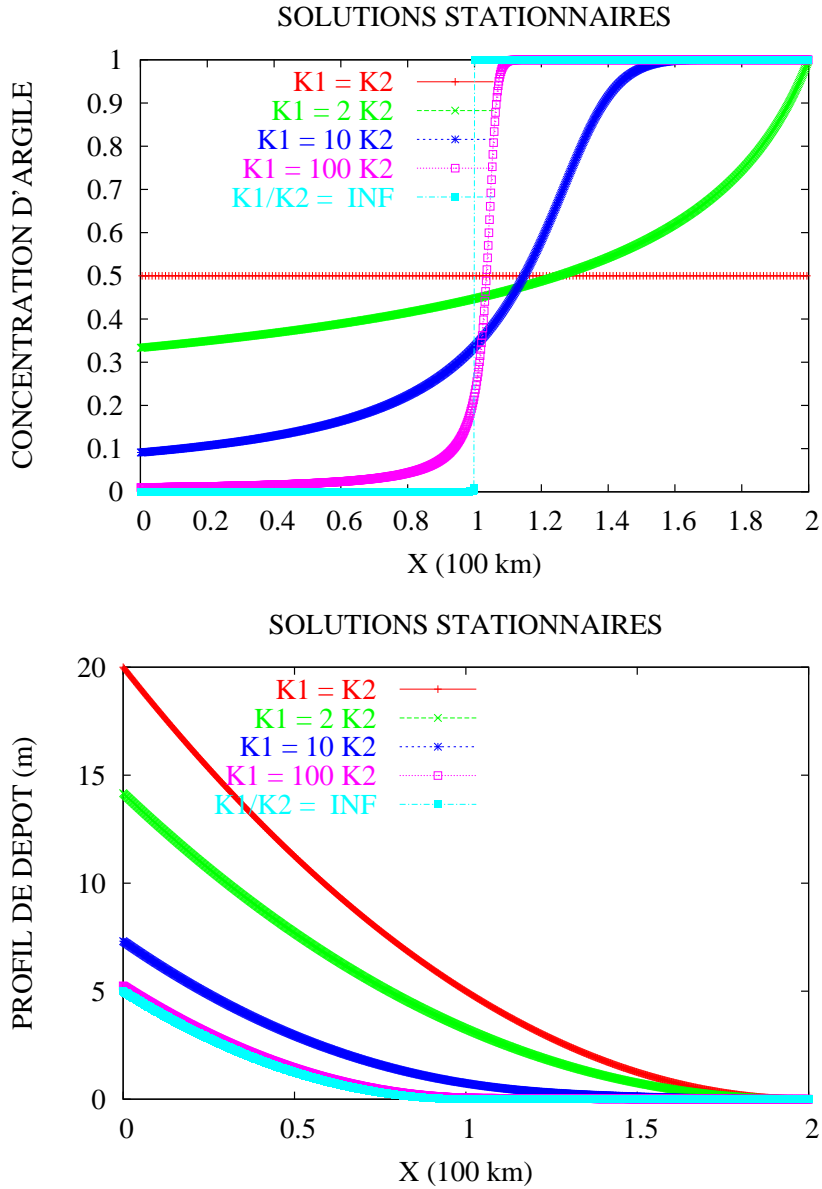


Figure 6: Exemple de solutions stationnaires: concentration d'argile $c_1^s(x)$ et profil de dépôt $h(x)$ pour $L_b = 200$ km, $g(0) = -2$ m²/an, $\mu_1^e(0) = \mu_2^e(0) = 0.5$, $g(L_b) = 0$, les rapports des coefficients de diffusions $\frac{k_1}{k_2} = 1, 2, 10, 100, +\infty$ et $k_2 = 10^4$ m²/an.

D'autres solutions stationnaires en concentration seront construites pour $a \neq 0$ dans le cadre du modèle stationnaire utilisé dans l'inversion de l'accommodation à partir des données en épaisseur sur la sismique.

4.2 Simulation numérique [4], [24], [21], [1]

Notre choix de discrétisation en espace s'est porté sur les schémas numériques de type volume fini. Ces schémas sont d'ordre peu élevé mais ils conduisent à des méthodes robustes, performantes, préservant les propriétés physiques de base comme la conservation des masses et le

respect des bornes physiques sur les fractions massiques ou volumiques, propriétés adaptées au contexte de développement d'un code industriel.

On considère un maillage volume fini admissible du domaine Ω défini comme le triplet $(\mathcal{K}, \Sigma_{int}, \mathcal{P})$ vérifiant la définition suivante.

Définition 4.1 (Maillage volume fini admissible) *Soit \mathcal{K} l'ensemble des volumes de contrôle, ouverts disjoints du domaine Ω , $\mathcal{P} = (x_\kappa)_{\kappa \in \mathcal{K}}$ une famille de points de Ω associés à chaque volume de contrôle tels que $x_\kappa \in \bar{\kappa}$, et Σ_{int} l'ensemble des arêtes intérieures σ du maillage telles qu'il existe $\kappa, \kappa' \in \mathcal{K}$, $\kappa \neq \kappa'$, avec $m(\bar{\kappa} \cap \bar{\kappa}') > 0$ et $\sigma = \bar{\kappa} \cap \bar{\kappa}'$ (notée par la suite $\kappa|\kappa'$), où m est la mesure de Lebesgue en dimension $d - 1$. Le triplet $(\mathcal{K}, \Sigma_{int}, \mathcal{P})$ définit un maillage admissible ssi les propriétés suivantes sont satisfaites :*

- (i) $\bigcup_{\kappa \in \mathcal{K}} \bar{\kappa} = \bar{\Omega}$,
- (ii) chaque arête intérieure $\sigma \in \Sigma_{int}$ est incluse dans un hyperplan de \mathbb{R}^d ,
- (iii) pour toute arête intérieure $\sigma = \kappa|\kappa'$, on a $x_\kappa \neq x_{\kappa'}$ et la droite joignant les points x_κ et $x_{\kappa'}$ est orthogonale à σ ,
- (iv) pour tout $\kappa \in \mathcal{K}$, il existe un sous ensemble noté Σ_κ de Σ_{int} tel que $\partial\kappa \setminus \partial\Omega = \bar{\kappa} \setminus (\kappa \cup \partial\Omega) = \bigcup_{\sigma \in \Sigma_\kappa} \bar{\sigma}$.

De plus on notera

$|\kappa|$ (resp. $|\sigma|$, $|\partial\kappa \cap \partial\Omega|$) la mesure de Lebesgue en dimension d de la cellule κ (resp. la mesure de Lebesgue en dimension $(d - 1)$ de l'arête intérieure σ , et de l'arête de bord $\partial\kappa \cap \partial\Omega$),
 \mathcal{K}_κ l'ensemble des cellules voisines de la cellule κ (à l'exclusion de κ),
 $d(\kappa, \kappa')$ désigne la distance entre les points x_κ et $x_{\kappa'}$,
 $n_{\kappa|\kappa'}$ le vecteur unitaire normal à l'arête $\kappa|\kappa'$ et sortant de la cellule κ .

La discrétisation en temps est définie par la suite $t^n, n \in \mathbb{N}$ telle que $t^0 = 0$, et $\Delta t^{n+1} := t^{n+1} - t^n > 0$. Par la suite, l'indice $n, n \in \mathbb{N}$, signifiera implicitement que les variables sont considérées au temps t^n .

On présente tout d'abord au paragraphe 4.2.1 le schéma numérique implicite couplé en temps avec décentrage en espace des concentrations de surface et du limiteur de flux, retenu pour ses propriétés de conservation des masses de sédiments, de respect des bornes physiques pour les concentrations et le limiteur de flux, et pour sa très bonne capture des transitions de régimes sous l'effet des variations d'accommodation entre les diffusions marine et continentale et les diffusions non contrainte et sous contrainte.

Le paragraphe suivant 4.2.2 décrit un schéma en temps découplant le calcul de l'épaisseur de sédiments et du limiteur de flux conduisant à une forte réduction du coût de résolution des systèmes non linéaires.

4.2.1 Schéma volume fini implicite pour le modèle diffusif multi-lithologique sous contrainte

On note

- h_κ^{n+1} (resp. λ_κ^{n+1} et $c_{i,\kappa}^{s,n+1}$, $i = 1, \dots, L$) l'approximation au temps t^{n+1} et dans la maille κ de l'épaisseur de sédiment h (resp. du limiteur de flux λ et des concentrations de surface c_i^s , $i = 1, \dots, L$),

- $c_{i,\kappa}^{n+1}$ la fonction de la variable $\xi = z - H(x_\kappa, t^{n+1})$ définie sur l'intervalle $[0, h_\kappa^{n+1}]$, qui approxime au temps t^{n+1} et dans la maille κ la concentration $c_i(x, H(x, t) + \xi, t)$ en tant que fonction de la variable ξ , dans le repère lié au socle,
- h_κ^0 , l'approximation de l'épaisseur de sédiments initiale h^0 dans la maille κ ,
- $c_{i,\kappa}^0 \geq 0$, une approximation constante par morceau de $c_i^0(x, H(x, t) + \cdot)$ dans la maille κ définie sur l'intervalle $[0, h_\kappa^0]$ et telle que $\sum_{i=1}^L c_{i,\kappa}^0 = 1$.
- $g_{\kappa,-}^{n+1} = \int_{\partial\kappa \times (t^n, t^{n+1}) \cap \Sigma_-} g \, d\sigma \, dt$, $g_{\kappa,+}^{n+1} = \int_{\partial\kappa \times (t^n, t^{n+1}) \cap \Sigma_+} g \, d\sigma \, dt$, $g_\kappa^{n+1} = g_{\kappa,-}^{n+1} + g_{\kappa,+}^{n+1}$,
- $\mu_{i,\kappa}^{e,n+1} = \frac{\int_{\partial\kappa \times (t^n, t^{n+1}) \cap \Sigma_-} \mu_{i,e} \, g \, d\sigma \, dt}{g_{\kappa,-}^{n+1}}$ pour tout κ tel que $g_{\kappa,-}^{n+1} < 0$ et 0 sinon.

La discrétisation volume fini des équations de conservation (34) s'obtient par intégration sur la maille κ et sur l'intervalle de temps (t^n, t^{n+1}) en tenant compte des conditions aux limites:

$$\begin{aligned} & \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\kappa} \partial_t h_i \, dx \, dt + \sum_{\kappa' \in \mathcal{K}_\kappa} \int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\kappa|\kappa'} \lambda \, c_i^s \, k_i(b) \, \nabla(b) \cdot n_{\kappa|\kappa'} \, d\sigma \, dt \\ & + \mu_{i,\kappa}^{e,n+1} \, g_{\kappa,-}^{n+1} + \int_{\partial\kappa \times (t^n, t^{n+1}) \cap \Sigma_+} \mu_i^s \, \lambda \left(\sum_{j=1}^L c_j^s \, k_j(b) \, \nabla(b) \cdot n_x \right) \, d\sigma \, dt = 0. \end{aligned}$$

où $\mu_i^s = \frac{k_i(b) \, c_i^s}{\sum_{j=1}^L k_j(b) \, c_j^s}$ est le flux fractionnaire. Le terme de flux à l'arête intérieure $\kappa|\kappa'$ est approché par

$$|\kappa|\kappa'| \, \lambda_{\kappa|\kappa'}^{n+1} \, c_{i,\kappa|\kappa'}^{s,n+1} \, \frac{\psi_i(b_\kappa^{n+1}) - \psi_i(b_{\kappa'}^{n+1})}{d(\kappa, \kappa')},$$

où $b_\kappa^{n+1} = h_\kappa^{n+1} - a(x_\kappa, t^{n+1})$, $\psi_i(b) = \int_0^b k_i(u) \, du$,

$$\lambda_{\kappa|\kappa'}^{n+1} = \begin{cases} \lambda_\kappa^{n+1} & \text{si } b_\kappa^{n+1} > b_{\kappa'}^{n+1}, \\ \lambda_{\kappa'}^{n+1} & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et } c_{i,\kappa|\kappa'}^{s,n+1} = \begin{cases} c_{i,\kappa}^{s,n+1} & \text{si } b_\kappa^{n+1} > b_{\kappa'}^{n+1}, \\ c_{i,\kappa'}^{s,n+1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette approximation est implicite en temps, elle utilise un décentrage selon le signe de la pente pour l'évaluation de λ et de c_i^s à l'arête et une approximation à deux points de $\nabla \psi_i(b) = k_i(b) \nabla b$ dans la direction normale à l'arête. Ces choix sont essentiels pour obtenir la stabilité du schéma et une bonne position de la ligne de côte définissant la transition entre la diffusion marine et diffusion continentale.

L'approximation du flux sortant utilise aussi un décentrage amont des concentrations de surface et du limiteur de sorte que

$$\lambda_\kappa^{n+1} \, \mu_{i,\kappa}^{s,n+1} \, g_{\kappa,+}^{n+1},$$

où $\mu_{i,\kappa}^{s,n+1} = \frac{k_i(b_\kappa^{n+1}) \, c_{i,\kappa}^{s,n+1}}{\sum_{j=1}^L k_j(b_\kappa^{n+1}) \, c_{j,\kappa}^{s,n+1}}$ est l'approximation du flux fractionnaire μ_i^s dans la maille κ au temps t^{n+1} .

L'approximation $|\kappa| \Delta h_{i,\kappa}^{n+1}$ du terme d'accumulation

$$\int_{t^n}^{t^{n+1}} \int_{\kappa} \partial_t h_i(x, t) \, dx \, dt =$$

$$\int_{\kappa} \left(\int_0^{h(x,t^{n+1})} c_i(x, \xi + H(x,t), t^{n+1}) d\xi - \int_0^{h(x,t^n)} c_i(x, \xi + H(x,t), t^n) d\xi \right) dx,$$

est définie par

$$|\kappa| \Delta h_{i,\kappa}^{n+1} = |\kappa| \left(\int_0^{h_{\kappa}^{n+1}} c_{i,\kappa}^{n+1}(\xi) d\xi - \int_0^{h_{\kappa}^n} c_{i,\kappa}^n(\xi) d\xi \right),$$

où $c_{i,\kappa}^{n+1}$ est la solution au temps t^{n+1} de l'équation hyperbolique linéaire

$$\begin{cases} \partial_t c_{i,\kappa}(\xi, t) = 0, & \text{pour tout } t^n < t < t^{n+1}, 0 < \xi < h_{\kappa}^n + (t - t^n) \frac{h_{\kappa}^{n+1} - h_{\kappa}^n}{\Delta t^{n+1}}, \\ c_{i,\kappa}(h_{\kappa}(t), t) = c_{i,\kappa}^{s,n+1} & \text{pour } h_{\kappa}^{n+1} > h_{\kappa}^n, \\ c_{i,\kappa}(\xi, t^n) = c_{i,\kappa}^n(\xi) & \text{pour tout } 0 < \xi < h_{\kappa}^n, \end{cases} \quad (39)$$

dont la solution est immédiate et conduit à la formule de mise à jour des concentrations pour chaque colonne κ ainsi qu'à l'expression du terme d'accumulation $\Delta h_{i,\kappa}^{n+1}$ données par (42) et (43).

La discrétisation des contraintes de complémentarité (29) est définie par

$$\mathcal{U} \left(h_{\kappa}^{n+1} - \mathcal{H}_{\kappa}^{n+1}, 1 - \lambda_{\kappa}^{n+1} \right) = 0,$$

où $\mathcal{H}_{\kappa}^{n+1}$ est la solution au temps t^{n+1} de l'équation $\partial_t \mathcal{H}_{\kappa}(t) = -E$, $\mathcal{H}_{\kappa}(t^n) = h_{\kappa}^n$ sur l'intervalle (t^n, t^{n+1}) :

Finalement on obtient le schéma numérique suivant:

Trouver h_{κ}^{n+1} , λ_{κ}^{n+1} , et $c_{i,\kappa}^{s,n+1}$, $c_{i,\kappa}^{n+1}$ pour tout $\kappa \in \mathcal{K}$, $n \geq 0$, $i = 1, \dots, L$ tels que pour tout $k \in \mathcal{K}$ et $i = 1, \dots, L$ on ait

Equations de conservation sur le maillage \mathcal{K} :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta h_{i,\kappa}^{n+1}}{\Delta t^{n+1}} |\kappa| + \sum_{\kappa' \in \mathcal{K}_{\kappa}} \lambda_{\kappa|\kappa'}^{n+1} c_{i,\kappa|\kappa'}^{s,n+1} |\kappa|\kappa' \frac{\psi_i(b_{\kappa}^{n+1}) - \psi_i(b_{\kappa'}^{n+1})}{d(\kappa, \kappa')} \\ + \mu_{i,\kappa}^{e,n+1} g_{\kappa,-}^{n+1} + \lambda_{\kappa}^{n+1} \mu_{i,\kappa}^{s,n+1} g_{\kappa,+}^{n+1} = 0, \end{aligned} \quad (40)$$

$$\sum_{i=1}^L c_{i,\kappa}^{s,n+1} = 1, \quad (41)$$

Equations de conservation de chaque colonne $\kappa \in \mathcal{K}$:

$$\text{si } h_{\kappa}^{n+1} \geq h_{\kappa}^n \text{ (sédimentation)} \quad \begin{cases} \Delta h_{i,\kappa}^{n+1} = c_{i,\kappa}^{s,n+1} (h_{\kappa}^{n+1} - h_{\kappa}^n), \\ c_{i,\kappa}^{n+1}(\xi) = c_{i,\kappa}^n(\xi) \text{ pour tout } \xi < h_{\kappa}^n, \\ c_{i,\kappa}^{n+1}(\xi) = c_{i,\kappa}^{s,n+1} \text{ pour tout } \xi \in (h_{\kappa}^n, h_{\kappa}^{n+1}), \end{cases} \quad (42)$$

$$\text{sinon (érosion)} \quad \begin{cases} \Delta h_{i,\kappa}^{n+1} = \int_{h_{\kappa}^n}^{h_{\kappa}^{n+1}} c_{i,\kappa}^n(\xi) d\xi, \\ c_{i,\kappa}^{n+1}(\xi) = c_{i,\kappa}^n(\xi) \text{ pour tout } 0 < \xi < h_{\kappa}^{n+1}, \end{cases} \quad (43)$$

Contraintes de complémentarité:

$$\mathcal{U}\left(h_{\kappa}^{n+1} - \mathcal{H}_{\kappa}^{n+1}, 1 - \lambda_{\kappa}^{n+1}\right) = 0. \quad (44)$$

A chaque pas de temps, on est ramené à résoudre un système non linéaire sur le maillage volume fini \mathcal{K} couplant les variables h_{κ}^{n+1} , λ_{κ}^{n+1} , et $c_{i,\kappa}^{s,n+1}$, $i = 1, \dots, L$, suivi d'une mise à jour, pour chaque colonne $\kappa \in \mathcal{K}$, des concentrations $c_{i,\kappa}^{n+1}$.

Propriétés du schéma: on montre (cf. [VG04]) par une méthode de point fixe de Brouwer que le schéma (40)-(44) admet au moins une solution vérifiant la positivité du limiteur de flux et le respect des bornes min 0 et max 1 des concentrations.

Les expériences numériques indiquent un taux de convergence du schéma en norme L^2 de l'ordre de 1 en temps et proche de 1 en espace pour le modèle mono-lithologique sous contrainte (cf. [VG04]). Pour le modèle multi-lithologique sans contrainte, on obtient un taux de convergence en espace proche de 1 sur les solutions stationnaires du paragraphe 4.1 (cf. [VG04]).

Passage à l'ordre 2 en en temps: on peut tenter de monter à l'ordre deux en temps en utilisant un schéma de Crank Nicholson pour l'approximation des flux en $k_i(b)\nabla(b)$. L'approximation des concentrations de surface et du limiteur de flux est inchangée dans l'équation (40) mais est alors naturellement considérée au temps $t^{n+1/2} = \frac{t^n + t^{n+1}}{2}$. Il faut ensuite interpoler les concentrations de surface sur l'intervalle (t^n, t^{n+1}) par une interpolation \mathbb{P}_1 discontinue de pente minimale de façon à garantir la conservation et la positivité et résoudre les équations hyperboliques de colonnes (39) avec cette nouvelle donnée entrante.

Le schéma de Crank Nicholson présente cependant des risques d'oscillation compte tenu de la faible régularité en temps des solutions du fait des transitions de régime (diffusion marine/continentale).

4.2.2 Schéma en temps découplant le calcul du limiteur de flux

Le calcul du limiteur de flux par une méthode de Newton adaptée aux contraintes unilatérales (voir paragraphe 4.3) est coûteux en nombre d'itérations de Newton nécessaires à la détermination des mailles sous contrainte. On propose donc une variante du schéma précédent découplant le calcul du limiteur de flux de celui des autres variables.

A bathymétrie b^{n+1} et concentrations de surface $c_i^{s,n+1}$, $i = 1, \dots, L$ connues, on peut calculer efficacement le limiteur de flux λ , solution du système

$$\mathcal{U}\left(A_{\kappa}, 1 - \lambda_{\kappa}\right) = 0 \text{ pour tout } \kappa \in \mathcal{K}$$

avec

$$A_{\kappa} = \frac{\mathcal{H}_{\kappa}^{n+1} - h_{\kappa}^n}{\Delta t^{n+1}} |\kappa| + \sum_{\kappa' \in \mathcal{K}_{\kappa}} \lambda_{\kappa|\kappa'} c_{i,\kappa|\kappa'}^{s,n+1} |\kappa|\kappa'| \frac{\psi_i(b_{\kappa}^{n+1}) - \psi_i(b_{\kappa'}^{n+1})}{d(\kappa, \kappa')} + \mu_{i,\kappa}^{e,n+1} g_{\kappa,-}^{n+1} + \lambda_{\kappa} \mu_{i,\kappa}^{s,n+1} g_{\kappa,+}^{n+1}.$$

Ce calcul s'effectue en $\#\mathcal{K} \log(\#\mathcal{K})$ opérations en triant les mailles dans un ordre topographiquement décroissant noté κ_l , $l = 1, \dots, \#\mathcal{K}$, où $\#\mathcal{K}$ désigne le nombre de mailles du maillage \mathcal{K} ,

par la formule

$$\lambda_{\kappa_l}^{n+1} = \min\left(1, \frac{\alpha_{\kappa_l}}{\beta_{\kappa_l}}\right) \text{ pour } l = 1, \dots, \#\mathcal{K},$$

avec

$$\begin{aligned} \alpha_{\kappa_l} &= (\mathcal{H}_{\kappa}^{n+1} - h_{\kappa}^n) |\kappa_l| - \sum_{i=1}^L \left(\sum_{\kappa' \in \mathcal{K}_{\kappa_l}, b_{\kappa_l}^{n+1} < b_{\kappa'}^{n+1}} \lambda_{\kappa'}^{n+1} c_{i, \kappa_l | \kappa'}^{s, n+1} |\kappa_l | \kappa'| \frac{\psi_i(b_{\kappa_l}^{n+1}) - \psi_i(b_{\kappa'}^{n+1})}{d(\kappa_l, \kappa')} + \mu_{i, \kappa'}^{e, n+1} g_{\kappa', -} \right), \\ \beta_{\kappa_l} &= \sum_{i=1}^L \sum_{\kappa' \in \mathcal{K}_{\kappa_l}, b_{\kappa_l}^{n+1} \geq b_{\kappa'}^{n+1}} c_{i, \kappa_l | \kappa'}^{s, n+1} |\kappa_l | \kappa'| \frac{\psi_i(b_{\kappa_l}^{n+1}) - \psi_i(b_{\kappa'}^{n+1})}{d(\kappa_l, \kappa')} + g_{\kappa_l, +}^{n+1}. \end{aligned} \quad (45)$$

Cette expression permet l'explicitation du limiteur de flux. En notant λ_{κ}^n , $\kappa \in \mathcal{K}$ le limiteur obtenu avec la bathymétrie et les concentrations de surface à l'instant n par la formule précédente, le schéma séquentiel implicite en λ s'obtient en remplaçant, dans le schéma (40)-(44), λ_{κ}^{n+1} par λ_{κ}^n et $\lambda_{\kappa | \kappa'}^{n+1}$ par

$$\lambda_{\kappa | \kappa'}^{n, n+1} = \begin{cases} \lambda_{\kappa}^n & \text{si } b_{\kappa}^{n+1} > b_{\kappa'}^{n+1}, \\ \lambda_{\kappa'}^n & \text{sinon.} \end{cases}$$

On obtient par ce schéma des gains importants en nombre d'itérations de Newton, d'autant plus que les pas de temps sont grands ou le maillage se raffine. Néanmoins, les solutions obtenues pour des pas de temps assez grands peuvent être "polluées" par des oscillations légères de la topographie dans la zone de transition entre la diffusion sous contrainte continentale et la diffusion non contrainte en milieu marin (voir [VG04] pour ces résultats). On présentera au paragraphe 4.3 des résultats numériques pour ce schéma sur deux cas tests réels en le comparant au schéma couplé.

4.3 Solveurs non linéaire et linéaire [1]

Le schéma implicite couplé (40)-(44) étant le plus satisfaisant sur le plan de la physique simulée, il est essentiel pour les performances du code de concevoir des solveurs non linéaire et linéaire efficace et robustes pour ce schéma.

On s'intéresse donc dans ce paragraphe à la résolution, à chaque pas de temps $n + 1$, du système non linéaire creux (40)-(41), posé sur le maillage \mathcal{K} et couplant les variables h_{κ}^{n+1} , λ_{κ}^{n+1} et $c_{i, \kappa}^{s, n+1}$, $i = 1, \dots, L$. Ce système est résolu par un algorithme de type Newton décrit ci après et on notera $h = (h_{\kappa})_{\kappa \in \mathcal{K}}$, $\lambda = (\lambda_{\kappa})_{\kappa \in \mathcal{K}}$, et $c^s = (c_i^s)_{i=1, \dots, L}$ où $c_i^s = (c_{i, \kappa}^s)_{\kappa \in \mathcal{K}}$, les solutions courantes.

4.3.1 Solveur non linéaire

Algorithme de Newton adapté aux contraintes de complémentarité

Notre traitement des contraintes de complémentarité est issu de [EGH00] où cette méthode est appliquée à l'équilibre thermodynamique huile gaz pour la résolution des écoulements en milieu poreux de type black oil.

Soit $\mathcal{I} = (i_{\kappa})_{\kappa \in \mathcal{K}} \in \{0, 1\}^{\#\mathcal{K}}$ l'indice d'activation des contraintes de complémentarité tel que $h_{\kappa} = \mathcal{H}_{\kappa}^{n+1}$ si $i_{\kappa} = 0$ et $\lambda_{\kappa} = 1$ si $i_{\kappa} = 1$. Ceci assure la nullité du produit $(1 - \lambda_{\kappa})(h_{\kappa} - \mathcal{H}_{\kappa}^{n+1})$ et revient donc à éliminer cette dernière équation.

La méthode de Newton consiste à calculer le pas de Newton δc^s , δy du système non linéaire (40)-(41) posé dans les variables c^s et $y = (y_\kappa)_{\kappa \in \mathcal{K}}$ où

$$y_\kappa = \begin{cases} h_\kappa & \text{si } i_\kappa = 1, \\ \lambda_\kappa & \text{si } i_\kappa = 0. \end{cases}$$

Après incrémentation des variables par le pas de Newton, on procède à une mise à jour de l'indice d'activation des contraintes de façon à satisfaire les contraintes d'inégalité $(1 - \lambda_\kappa) \geq 0$ et $h_\kappa \geq \mathcal{H}_\kappa^{n+1}$: si $i_\kappa = 1$ et $h_\kappa + \delta y_\kappa < \mathcal{H}_\kappa^{n+1}$ alors i_κ passe à 0, si $i_\kappa = 0$ et $\lambda_\kappa + \delta y_\kappa > 1$ alors i_κ passe à 1.

Il s'avère de plus essentiel pour la bonne convergence de l'algorithme, de projeter pour chaque $\kappa \in \mathcal{K}$ les variables $(c_{i,\kappa}^s)_{i=1,\dots,L}$ (resp. la variable λ_κ) sur le simplexe $\{s \in \mathbb{R}_+^L, \sum_{i=1}^L s_i = 1\}$ (resp. sur \mathbb{R}_+).

Gestion des singularités de la jacobienne survenant au cours des itérations de Newton

La jacobienne de l'algorithme de Newton précédent peut s'avérer singulière au cours des itérations de Newton lorsque les flux vus par une maille κ sont tous entrants alors que (i) la maille κ est vue en érosion non contrainte ou (ii) la maille κ est vue en érosion sous contrainte ($i_\kappa = 0$). Du fait du décentrage amont des concentrations et du limiteur de flux, cette configuration des variables au cours du Newton, exclue à convergence, entraîne la nullité des colonnes de la jacobienne correspondant aux variables $c_{i,\kappa}^s$, $i = 1, \dots, L$ dans le cas (i) ou à la variable λ_κ dans le cas (ii).

Dans ces cas de figure, on lève la singularité en imposant dans le cas (i) un pas de Newton nul des concentrations $\delta c_{i,\kappa}^s = 0$, $i = 1, \dots, L$ en conservant par ailleurs la somme des équations de conservation dans la maille κ , et dans le cas (ii) un pas de Newton nul pour les concentrations et égal à $\delta \lambda_\kappa = 1 - \lambda_\kappa$ pour la variable λ afin de forcer λ_κ à 1. Alternativement dans le cas (i) on peut aussi rajouter un terme diagonal par exemple unitaire dans la maille κ des blocs $J_{i,i}$, ce qui correspond au rajout d'un terme de masse en concentrations de surface dans ces mailles singulières.

Initialisations

Pour obtenir une bonne convergence de l'algorithme, il est important de mémoriser le signe du dépôt (sédimentation ou érosion) en initialisant la hauteur de sédiments h à l'ordre 1 en temps, soit

$$h_\kappa = h_\kappa^n + \frac{h_\kappa^n - h_\kappa^{n-1}}{\Delta t^n} \Delta t^{n+1}, \quad \kappa \in \mathcal{K}.$$

En ce qui concerne le limiteur de flux λ , deux initialisations donnent de bons résultats: soit une initialisation globale de λ à 1, i.e.

$$i_\kappa = 1 \text{ pour tout } \kappa \in \mathcal{K},$$

qui convient plutôt pour les grands pas de temps du fait de la capacité de l'algorithme à activer la contrainte sur le taux d'érosion efficacement, soit

$$i_\kappa = \begin{cases} 0 & \text{si } h_\kappa < \mathcal{H}_\kappa^{n+1} \text{ et } \lambda_\kappa = \lambda_\kappa^n, \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Lissage adaptatif des coefficients de diffusion

Pour des coefficients de diffusion discontinus (21), souvent utilisés à l'échelle des bassins, et pour de forts contrastes des coefficients des lithologies et des coefficients marin et continental, la convergence de l'algorithme de Newton se dégrade pour des petits pas d'espace et de grands pas de temps.

Pour y remédier on lisse les coefficients de diffusion de façon adaptative en fonction d'une mesure de la rupture de pente au niveau de littoral, de façon d'une part à obtenir une bonne convergence sans d'autre part trop lisser la topographie au niveau du littoral. On définit

$$\beta^n = \gamma \text{ diamètre}(\Omega) \max_{\kappa|\kappa' \in \Sigma_{int}, b_\kappa^n b_{\kappa'}^n < 0} \frac{|b_\kappa^n - b_{\kappa'}^n|}{d(\kappa, \kappa')}, \quad (46)$$

pour un paramètre γ à régler une fois pour toute, les coefficients de diffusion retenus sont du type

$$k_i^{n+1}(b) = \begin{cases} k_{i,m} & \text{si } b \leq -\beta^n, \\ \left(\frac{k_{i,c}}{k_{i,m}}\right)^{\frac{b}{2\beta^n}} (k_{i,c} k_{i,m})^{\frac{1}{2}} & \text{si } -\beta^n < b < \beta^n, \\ k_{i,c} & \text{si } b \geq \beta^n. \end{cases} \quad (47)$$

4.3.2 Solveurs linéaires itératifs préconditionnés

L'essentiel du coût du solveur non linéaire réside dans la résolution, à chaque itération de Newton, du système matriciel dont la matrice creuse est la jacobienne des équations (40)-(41) par rapport aux variables y, c^s , avec pour second membre l'opposé du résidu de ces équations.

En dimension $d = 2$, pour un nombre de lithologies $L \geq 2$ et des maillages de taille moyenne ou supérieure, la résolution du système linéaire par une méthode directe devient a priori plus coûteuse qu'un solveur itératif avec un préconditionnement adapté.

Le préconditionnement des systèmes matriciels issus de la discrétisation et de la linéarisation d'EDPs scalaires est relativement bien maîtrisé avec de nombreuses méthodes adaptées et disponibles en bibliothèques comme les factorisations incomplètes, les méthodes multigrilles géométriques ou algébriques et les méthodes de décomposition de domaine. En revanche, le cas des systèmes d'EDPs couplant plusieurs variables de nature différente est toujours un problème ouvert pour lequel on dispose d'aucun cadre général et de peu de solutions disponibles en dehors des préconditionnements généraux algébriques comme les factorisations incomplètes n'exploitant pas les propriétés mathématiques et physiques du système considéré, peu robustes pour les problèmes hétérogènes et non scalables.

L'objectif de ce paragraphe est de décrire la construction d'un préconditionnement de la jacobienne adapté aux caractéristiques physiques du système d'EDPs et mettant principalement l'accent sur le traitement du couplage entre les variables concentrations c^s et la variable y . On étudiera les performances des différentes variantes de ce préconditionnement (définition du découplage des variables, choix des préconditionnements de chaque bloc). L'efficacité de cette approche sera comparée à un préconditionnement par factorisation incomplète ILU0 sur le système complet et à un solveur direct creux. On renvoie à la thèse de Véronique Gervais

[VG04] pour une présentation plus détaillée et des résultats complémentaires.

Une étape préliminaire consiste à éliminer l'une des variables $\delta c_{i_e}^s$ du système par l'équation (41) différenciée, conduisant aux L variables primaires constituées par δy et les $L - 1$ concentrations δc_i^s pour $i \in I = \{1, \dots, L\} \setminus \{i_e\} = \{i_1, \dots, i_{L-1}\}$.

Le choix de la lithologie éliminée i_e a une incidence importante sur la performance du préconditionnement. En pratique il convient d'éliminer la lithologie i_e dont le coefficient de diffusion k_{i_e} est (en moyenne sur l'ensemble du bassin) le plus grand.

Par convention, on renumérote les lithologies de telle façon que $i_e = 1$. Soient $R_i = \left(R_{i,\kappa} \right)_{\kappa \in \mathcal{K}}$, les résidus non linéaires des lithologies $i = 1, \dots, L$ considérés comme fonctions des variables $y, c_j^s, j = 1, \dots, L$. Pour $i, j = 1, \dots, L$, on note $J_{i,j}$ la matrice creuse de dimension $\#\mathcal{K}$ telle que $[J_{i,j}]_{\kappa,\kappa'} = \frac{\partial R_{i,\kappa}}{\partial c_j^s}$, $\kappa, \kappa' \in \mathcal{K}$, ainsi que $J_{i,y}$ la matrice creuse de dimension $\#\mathcal{K}$ telle que $[J_{i,y}]_{\kappa,\kappa'} = \frac{\partial R_{i,\kappa}}{\partial y_{\kappa'}}$, $\kappa, \kappa' \in \mathcal{K}$.

En supposant pour simplifier les flux aux frontières sortantes nuls (ce qui est le cas de toutes les simulations dans les cas pratiques), on remarque que $J_{i,j} = 0$ pour tout $i \neq j$ et la Jacobienne s'écrit après élimination de $\delta c_{i_e=1}^s$ dans la représentation par blocs de variables suivante:

$$J = \begin{pmatrix} J_{1,y} & -J_{1,1} & \cdots & -J_{1,1} \\ J_{2,y} & J_{2,2} & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ J_{L,y} & 0 & 0 & J_{L,L} \end{pmatrix}. \quad (48)$$

- **Première étape:** par combinaison linéaire des équations des lithologies $i = 1, \dots, L$ de chaque maille, elle consiste à définir une bonne équation de "mélange" réduisant le couplage entre la variable y et les variables c_i^s .

Soit g_κ la matrice ligne de dimension L définissant cette combinaison linéaire pour les équations de la cellule κ . On retiendra essentiellement trois choix pour g_κ . Le choix le plus naturel est de sommer chaque équation de conservation, ce choix annule le couplage entre y et c_i^s dans le terme d'accumulation:

$$g_\kappa = \left(1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1 \right), \quad (49)$$

le second choix annule le couplage entre y et c_i^s dans le terme de flux (dans le cas où k_i est indépendant de la maille κ ie en dehors de la zone côtière):

$$g_\kappa = \left(1 \quad \frac{k_1(b_\kappa)}{k_2(b_\kappa)} \quad \cdots \quad \frac{k_1(b_\kappa)}{k_L(b_\kappa)} \right). \quad (50)$$

Le troisième choix est un compromis algébrique entre les deux précédents, il force l'annulation des interactions de la première équation de conservation de la maille κ avec les variables $c_{i,\kappa}^s$, $i = 2, \dots, L$ de la même maille κ :

$$g_\kappa = \left(1 \quad \frac{[J_{1,1}]_{\kappa,\kappa}}{[J_{2,2}]_{\kappa,\kappa}} \quad \cdots \quad \frac{[J_{1,1}]_{\kappa,\kappa}}{[J_{L,L}]_{\kappa,\kappa}} \right). \quad (51)$$

On notera

$$\tilde{J} = \begin{pmatrix} \tilde{J}_{1,y} & \tilde{J}_{1,2} & \cdots & \tilde{J}_{1,L} \\ J_{2,y} & J_{2,2} & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ J_{L,y} & 0 & 0 & J_{L,L} \end{pmatrix}. \quad (52)$$

la jacobienne après cette transformation qui est aussi conçue pour préserver le découplage des concentrations entre elles dans la Jacobienne.

On montre facilement que les coefficients de découplage g_κ sont strictement positifs, majorés et minorés indépendamment des valeurs des variables primaires. Ces propriétés sont essentielles pour définir un bon bloc $\tilde{J}_{1,y}$ pour la suite de la méthode.

- **deuxième étape:** suite à la transformation précédente du système, on applique un préconditionnement de type Gauss Seidel par blocs de variables

$$\begin{pmatrix} C_{1,y} & 0 & \cdots & 0 \\ J_{2,y} & J_{2,2} & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ J_{L,y} & 0 & 0 & J_{L,L} \end{pmatrix}^{-1}. \quad (53)$$

Les blocs $J_{p,p}$ pour $p \geq 2$ sont inversés exactement par une itération de Gauss Seidel en réordonnant les cellules dans l'ordre des topographies décroissantes pour lequel les blocs $J_{p,p}$, $p \geq 2$ sont triangulaires inférieurs.

Le choix du préconditionnement $C_{1,y}^{-1}$ du bloc $\tilde{J}_{1,y}$ concentrant la raideur du système est essentiel pour la performance de l'algorithme itératif. On utilisera soit l'inverse exact $\tilde{J}_{1,y}^{-1}$ résolu par un solveur direct creux (envisageable car le système est seulement mono ou bidimensionnel) soit une factorisation incomplète ILU(0), soit un vcycle du solveur AMG1R5 de Rüge et Stuben. Ce dernier préconditionnement ne peut être appliqué à la totalité du bloc $\tilde{J}_{1,y}$ dans la mesure où les équations des cellules sous contrainte de taux d'érosion maximal ne sont pas à diagonale dominante, ce qui se traduit dans les tests par une non convergence des Vcycles. On a donc choisit de préconditionner le bloc $\tilde{J}_{1,y}$ par une approche Bloc Gauss Seidel où les blocs correspondent aux variables h pour les cellules non contraintes ($i_\kappa = 1$) et λ pour les cellules sous contrainte ($i_\kappa = 0$). En notant dans la représentation par blocs

$$\tilde{J}_{1,y} = \begin{pmatrix} \tilde{J}_{h,h} & \tilde{J}_{h,\lambda} \\ \tilde{J}_{\lambda,h} & \tilde{J}_{\lambda,\lambda} \end{pmatrix}, \quad (54)$$

le préconditionnement s'écrit

$$C_{1,y}^{-1} = \begin{pmatrix} C_{h,h} & 0 \\ \tilde{J}_{\lambda,h} & \tilde{J}_{\lambda,\lambda} \end{pmatrix}^{-1}, \quad (55)$$

où $C_{h,h}^{-1}$ est une itératin de vcycle de AMG1R5 sur le bloc $\tilde{J}_{h,h}$ et où le bloc $\tilde{J}_{\lambda,\lambda}$ est inversé exactement par une itération de Gauss Seidel dans l'ordre topographique.

4.3.3 Résultats numériques

On reprend les résultats numériques de [1] sur deux cas tests tirés de cas réels et décrits ci-dessous. Dans les deux cas, la grille est cartésienne uniforme de pas Δx , et le pas de temps maximal est noté Δt . Le pas de temps est repris avec réduction d'un facteur deux en cas de non convergence du Newton au bout de 35 itérations, avec un critère de convergence fixé à 10^{-6} en norme l^2 des résidus rapportée à la norme initiale. En cas de convergence du Newton en moins de 35 itérations, le pas de temps est augmenté d'un facteur 1.2 dans la limite du pas de temps maximal Δt . Pour le schéma séquentiel implicite en λ , la simulation est initialisée avec un pas de temps égal à $\Delta t/10$ alors que le schéma implicite est initialisé au pas de temps maximal Δt .

Dans les tests suivants, les préconditionnements de type Gauss Seidel par Blocs du système \tilde{J} sont notés BGSLU pour $C_{1,y} = \tilde{J}_{1,y}^{-1}$, BGSILU pour $C_{1,y}$ donné par factorisation incomplète ILU(0) de $\tilde{J}_{1,y}$, et BGSAMG pour $C_{1,y}$ défini par (55).

Ces préconditionnements par blocs sont comparés entre eux ainsi qu'à un solveur creux multifrontal (noté DIRECT) et à un préconditionnement par factorisation incomplète ILU(0) du système \tilde{J} , noté ILU. On comparera aussi ces résultats à ceux du schéma séquentiel implicite en λ avec le solveur BGSAMG, noté BGSAMG-SI.

Le critère d'arrêt du solveur itératif est fixé à 10^{-6} pour le résidu relatif en norme l^2 . Des approches de type Inexact Newton ont été testées mais sans amélioration des solveurs les plus performants, ces résultats ne seront donc pas présentés.

Le solveur itératif est GMRES [SS86] avec un restart fixé à 100. Tous les tests ont été réalisés sur un PC Dell M60 1.3 MHz sous LINUX.

Cas test du bassin de Paris:

On reprend l'exemple du bassin de Paris issu de la thèse de Véronique Gervais [VG04]. Ce cas utilise des données réelles du bassin parisien. On dispose des cartes de subsidences, des variations eustatiques et des flux aux frontières du bassin. Il comporte deux lithologies (sable et argile) dont les coefficients de diffusion présentent des ratios marin/continental et sable/argile élevés. Le bassin est presque totalement en régime d'érosion sous contrainte au début de la simulation et la zone en régime purement diffusif s'élargit progressivement pour couvrir plus de la moitié du bassin en fin de simulation sous l'effet des variations du niveau marin et des déplacements tectoniques. Ce sont ces changements de régime et les forts contrastes des coefficients de diffusion qui peuvent induire un nombre d'itérations de Newton important, en particulier sur les maillages fins.

Domaine: $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y]$ avec $L_x = 500$ km et $L_y = 400$ km.

Durée de simulation: $t_f = 40$ Ma.

Nombre de lithologies: 2 (sable et argile).

Coefficients de diffusion: $k_{1,c} = 10^5$ m²/an, $k_{1,m} = 10^4$ m²/an, $k_{2,c} = 2.10^6$ m²/an, $k_{2,m} = 4.10^4$ m²/an.

Concentration initiale: $c_1^0 = c_2^0 = \frac{1}{2}$.

Taux d'érosion maximum: $E = 3$ m/Ma.

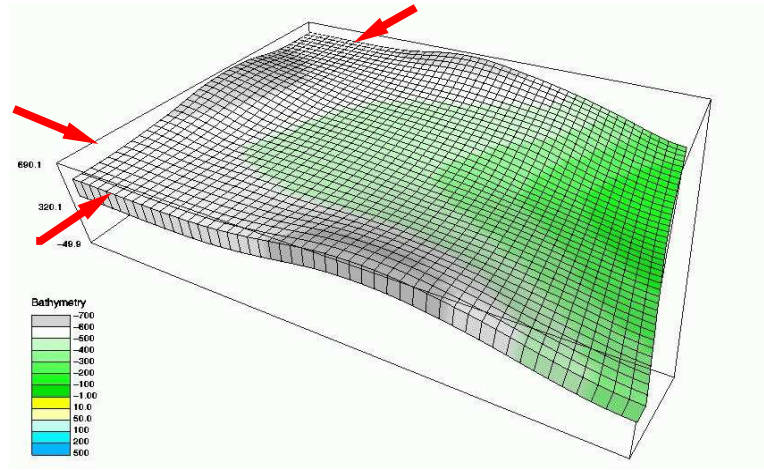


Figure 7: Topographie initiale du bassin de Paris et emplacement des apports.

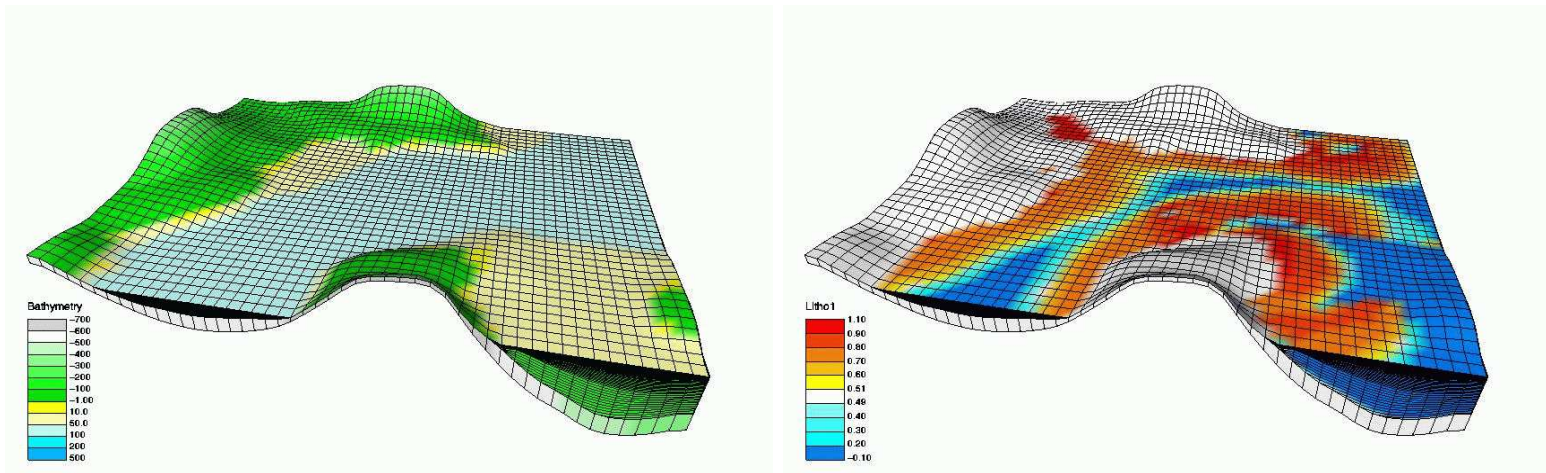


Figure 8: Topographie et concentration en sable finales du bassin

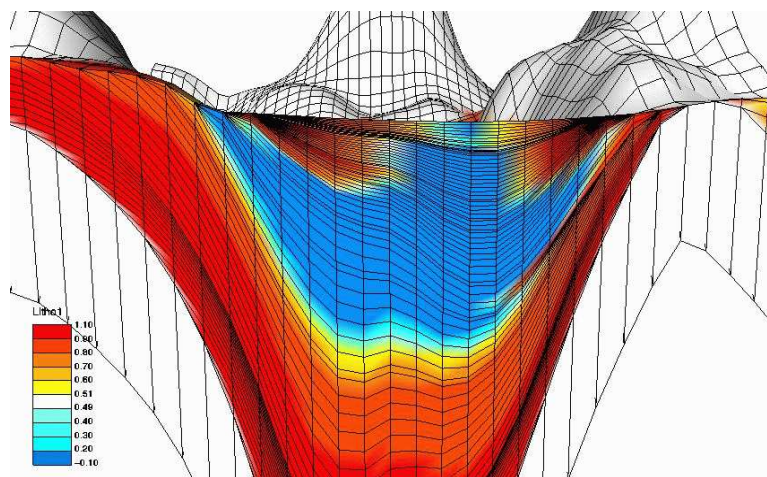


Figure 9: Coupe de la concentration en sable finale du bassin.

Cas test Rift avec flux d'eau:

On considère l'exemple d'un Rift où le transport de sédiments est essentiellement dû à l'écoulement hydrologique. Le couplage du modèle stratigraphique à l'écoulement hydrologique est brièvement décrit dans les travaux en cours au paragraphe 4.5. Il se traduit par des coefficients de diffusion du type

$$k_i(b^{n+1}) = k_i^g(b^{n+1}) + q_e(b^n)k_i^e(b^{n+1})$$

où le flux d'eau q_e est calculé en écrivant sa conservation le long des lignes de plus grande pente de la topographie connaissant l'intensité et l'emplacement des flux entrants correspondant à l'entrée des fleuves. Ce calcul est découplé de celui de la bathymétrie en prenant le flux d'eau explicite dans les équations de conservation des sédiments.

Ce cas test comprend 2 lithologies (sable et argile), sans variation eustatique ni subsidence. Les topographies initiales et finales ainsi que le flux d'eau et le limiteur de pente au temps final sont donnés figures 10, 11. Les coefficients de diffusion gravitaires sont quasi nuls conduisant à des sauts jusqu'à 9 ordres de magnitude des coefficients k_i . Une des caractéristiques de ce cas test est le fort couplage entre la contrainte sur le taux d'érosion et les cartes de flux d'eau comme l'illustre la figure 11.

Domaine: $\Omega = [0, L_x] \times [0, L_y]$ avec $L_x = 180$ km et $L_y = 180$ km.

Durée de simulation: $t_f = 3$ Ma.

Nombre de lithologies: 2 (sable et argile).

Coefficients de diffusion fluviaux: $k_{1,c}^e = k_{2,c}^e = 7570$ m²/an, $k_{1,m}^e = 4425$ m²/an, $k_{2,m}^e = 44250$ m²/an.

Coefficients de diffusion gravitaires: $k_i^g(b) = 10^{-8} k_i^e(b)$.

Flux d'eau et flux entrants de sédiments: 5 sources situées à l'entrée des vallées avec une intensité du flux d'eau q_e de 1 à 20 en entrée.

Concentration initiale: $c_1^0 = c_2^0 = \frac{1}{2}$.

Taux d'érosion maximum: $E = 100$ m/Ma.

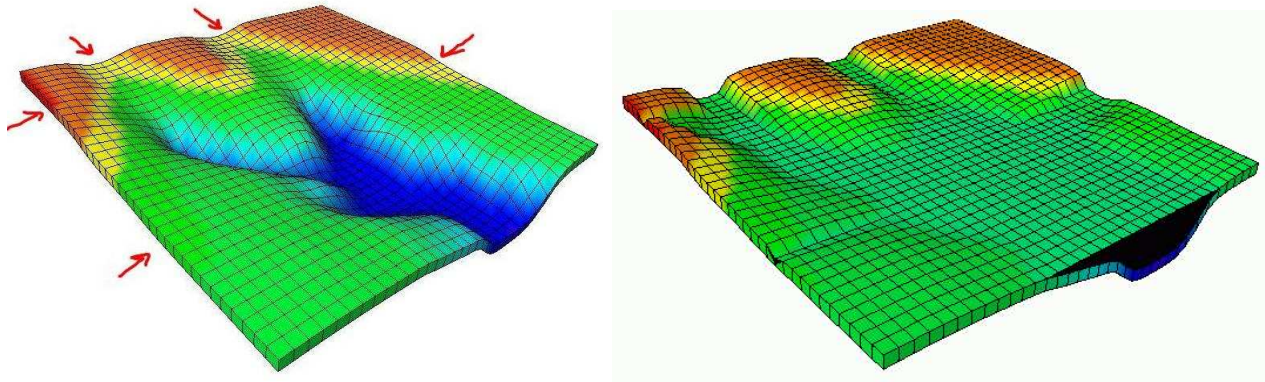


Figure 10: Topographie initiale avec emplacement des apports (gauche) et topographie finale (droite) du bassin Rift.

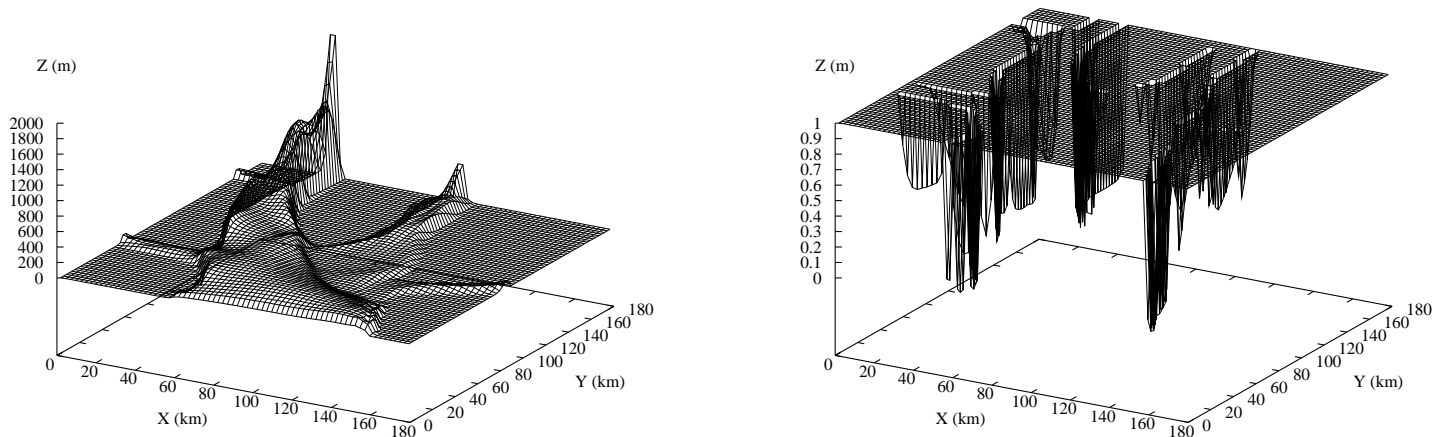


Figure 11: Cartes finales du flux d'eau (gauche, en pourcents) et du limiteur de flux λ (droite)

Algorithme de Newton

Le tableau 5 présente pour le cas du bassin de Paris, les schémas implicite et séquentiel implicite en λ , les performances de l'algorithme de Newton pour différentes valeurs du pas d'espace Δx et du paramètre de lissage β pris fixe sur la durée de la simulation.

le manque de robustesse de l'algorithme de Newton par rapport au pas du maillage, est du aux fortes non linéarités induites, pour le schéma implicite, par les transitions de régimes sédimentation/érosion, érosion contrainte/érosion non contrainte, diffusion marine/continentale.

Le lissage du coefficient de diffusion améliore nettement cette robustesse (le cas ne passe pas avec $\beta = 0$ sur les maillages les plus fins). Le lissage adaptatif (46) permet un réglage automatique de ce paramètre donnant un bon compromis entre la performance du Newton et un profil physiquement admissible à la transition diffusion marine/continentale.

Les résultats du tableau 5 pour le schéma séquentiel implicite en λ sont nettement meilleurs, ce qui confirme le rôle prédominant de la transition de régime érosion contrainte/érosion non contrainte dans le manque de robustesse du Newton pour le schéma implicite.

Néanmoins, le schéma séquentiel implicite en λ manque de précision dans la zone de transition entre l'érosion continentale sous contrainte et l'érosion marine non contrainte. Ce manque de précision est du au produit $\lambda^n k_i (b^{n+1})$ évalué avec λ et k_i pris à des pas de temps différents. Ceci se traduit par des oscillations de la topographie sur la ligne de côte qui décroissent lorsque le pas de temps diminue. Pour y remédier, on peut penser à utiliser l'accommodation au pas de temps t^{n+2} pour le calcul du limiteur de flux λ^{n+1} de façon à compenser le retard d'un pas de temps. Mais cette solution induit une mauvaise convergence du Newton. On pourrait aussi prendre λ et k_i explicites, mais du fait des sauts importants des coefficients $k_i(b)$, cette solution ne capte la ligne de côte avec précision que pour des très petits pas de temps.

Schéma	δx (km)	$\beta= 5$ m	$\beta= 10$ m	$\beta= 20$ m
Implicite	10	2410/5.9	2150/5.3	2030/5.1
	5	3860/9.1	3320/8.1	3040/7.6
	2.5	8640/17.6	7360/16.1	5910/13.9
Séquentiel implicite en λ	10	1467/3.6	1346/3.3	1308/3.2
	5	1532/3.75	1423/3.5	1386/3.4
	2.5	1595/3.9	1487/3.6	1447/3.5

Table 5: Nombre total d’itérations de Newton et nombre moyen d’itérations de Newton par pas de temps pour différentes valeurs du paramètre de lissage (pris fixe) β et les schémas implicite et séquentiel implicite en λ . Le solveur utilisé est BGSAMG avec $e = 2$ et le découplage de Gauss. Bassin de Paris avec $\Delta t = 0.1$ Ma.

Choix du découplage, de la lithologie e , et du préconditionneur du bloc $J_{i,i}$

Le tableau 4.3 montre l’importance, pour les performances du préconditionneur par bloc BGSLU, du choix du découplage parmi les trois méthodes présentées, ainsi que l’influence de la lithologie e éliminée du système linéaire. On conclut que le découplage de Gauss est le plus performant et que la lithologie à éliminer est celle la plus diffusive.

Le tableau 4.3 montre qu’il est essentiel de résoudre de façon précise les blocs concentrations $J_{i,i}$, $i = 2, \dots, L$, et d’utiliser une méthode Gauss Seidel par blocs plutôt que Jacobi par blocs, afin d’obtenir une bonne convergence de l’algorithme GMRES préconditionné.

Ces conclusions restent valables sur l’ensemble des cas testés de sorte que les tests à suivre se feront avec le découplage de Gauss, le préconditionnement Gauss Seidel par blocs, et l’élimination de la lithologie e la plus diffusive (toujours définie en pratique car les coefficients k_i^m , $i = 1, \dots, L$, et k_i^c , $i = 1, \dots, L$ sont ordonnés de façon identique).

Découpl. 49 $e = 2$	Découpl. 50 $e = 2$	Découpl. 51 $e = 2$	Découpl. 51 $e = 1$
21.9 it.	18.8 it.	9.3 it.	17.6 it.
177 s	160 s	111 s	154 s

Table 6: Influence du découplage g_κ et du choix de e sur le nombre d’itérations de GMRES et sur le temps de simulation pour le préconditionnement BGSLU. Bassin Rift avec $\Delta x = 2.5$ km, $\Delta t = 0.03$ Ma, $\beta = 10$ m.

Jacobi point	Gauss Seidel point	Jacobi par blocs	Gauss Seidel par blocs
84 it.	53 it.	19.5 it.	9.3 it.
571 s	383 s	156 s	111 s

Table 7: Nombre d’itérations de GMRES et temps de simulation pour le préconditionneur BGSLU avec $e = 2$, le découplage de Gauss, $C_{1,y}^{-1} = \tilde{J}_{1,y}^{-1}$, et différents choix du préconditionnement des autres blocs. Bassin Rift avec $\Delta x = 2.5$ km, $\Delta t = 0.03$ My, $\beta = 10$ m.

Comparaison et scalabilité des préconditionneurs

Les tableaux 8, 9, et les figures 12, 13 comparent l'efficacité et la scalabilité de différents solveurs pour les cas tests des bassins de Paris et Rift. On conclut qu'un très bon préconditionnement du bloc $\tilde{J}_{1,y}$ est essentiel. Ce bloc concentre la raideur du système et son conditionnement est très élevé du fait de sa nature parabolique et des sauts des coefficients de diffusion. Le préconditionnement par factorisation incomplète ILU(0) n'est pas du tout robuste que ce soit sur le système complet ou restreint au bloc $\tilde{J}_{1,y}$. Pour le cas test du bassin de Paris, il est même bien pire qu'un solveur direct sur la grille la plus fine.

En terme de nombre d'itérations du solveur GMRES, le préconditionnement BGSLU est le plus efficace et le plus robuste. Néanmoins, le préconditionnement BGSAMG est clairement plus performant en temps CPU surtout sur les grilles fines.

Le préconditionnement BGSAMG est encore meilleur pour le schéma séquentiel implicite en λ du fait que, dans ce cas, le solveur AMG s'applique à l'ensemble du bloc $\tilde{J}_{1,y} = \tilde{J}_{1,h}$.

Le tableau 10 montre la très bonne robustesse des préconditionneurs BGSLU et BGSAMG vis à vis du rapport des coefficients de diffusion des lithologies et du rapport des coefficients marin/continental. Ces résultats confirment le fait que le préconditionneur BGSAMG est dans l'essentiel des cas le plus performant.

Δx (km)	Direct	ILU	BGSILU	BGSLU	BGSAMG	BGSAMG-SI
10	132	31/124	42/139	11.6/83	15.4/62	12/52
5	1133	66/1700	83/2250	13.5/790	20/530	12.6/259
2.5	18450	142/51800	199/85020	16/9110	27/5925	13.2/1226

Table 8: Nombre d'itérations de solveur GMRES par itération de Newton et temps total de simulation en secondes pour les différents solveurs. Cas test du bassin de Paris avec $\beta = 20$ m, et $\Delta t = 0.1$ Ma.

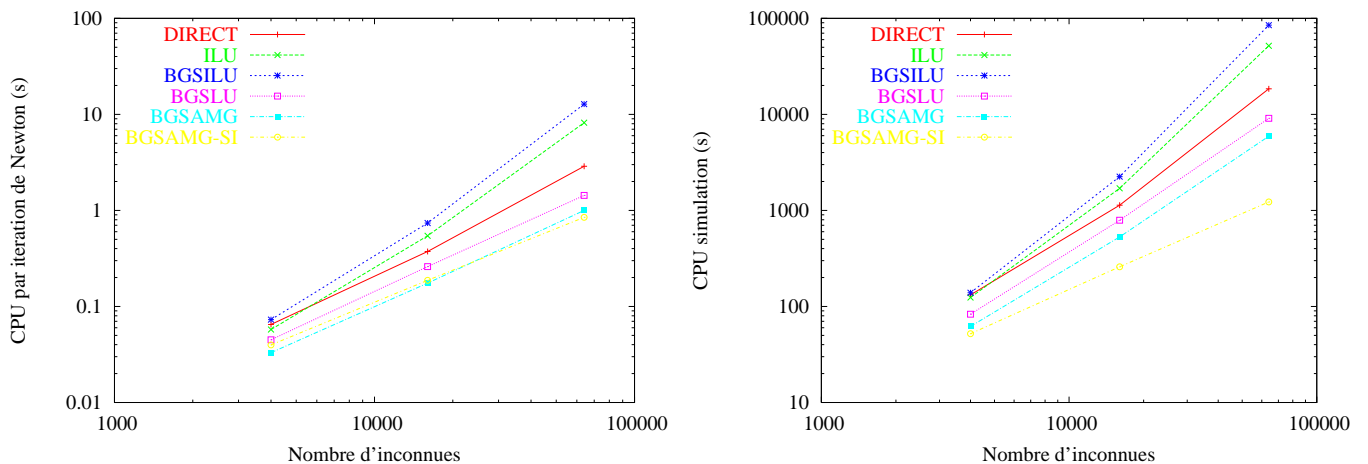


Figure 12: Temps CPU par itération de Newton (gauche) et temps CPU total (droite) pour chaque préconditionneur, pour le solveur direct creux et pour le schéma séquentiel implicite en λ avec solveur BGSAMG, en fonction du nombre d'inconnues du système. Cas test du bassin de Paris avec $\beta = 20$ m, et $\Delta t = 0.1$ Ma.

Δx (km)	Direct	ILU	BGSILU	BGSLU	BGSAMG	BGSAMG-SI
5	25	28/23	32/20.5	9.1/14	12.3/14.4	11/12
2.5	190	55/230	57/237	9.3/111	14.2/98	12/65
1.25	5405	105/3840	103/3630	9.23/1770	16.8/750	12.5/415

Table 9: Nombre d'itérations de solveur GMRES par itération de Newton et temps total de simulation en secondes pour les différents solveurs. Cas test du bassin Rift avec $\beta = 10$ m, et $\Delta t = 0.03$ Ma.

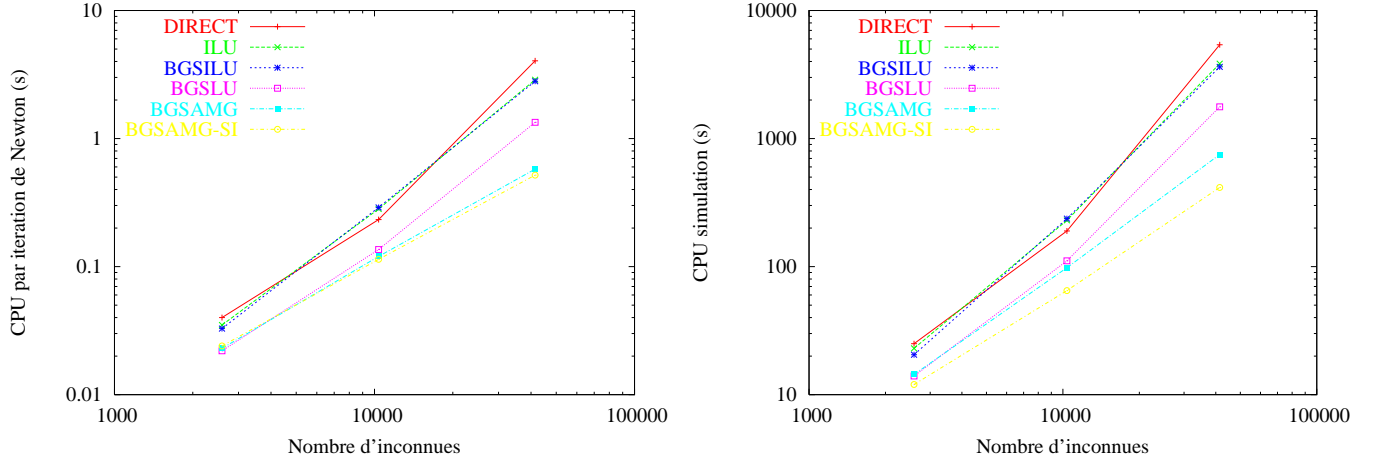


Figure 13: Temps CPU par itération de Newton (gauche) et temps CPU total (droite) pour chaque préconditionneur, pour le solveur direct creux, et pour le schéma séquentiel implicite en λ avec solveur BGSAMG, en fonction du nombre d'inconnues du système. Cas test du bassin Rift avec $\beta = 10$ m, et $\Delta t = 0.03$ Ma.

$r_{2,1}$	BGSLU	BGSAMG	$r_{m,c}$	BGSLU	BGSAMG
100	12.5/157	20.4/151	100	12.6/403	20.4/337
10	9.2/112	14.2/100	10	10.9/179	15.9/130
1	1/49	8.8/53	1	9.3/108	14.4/95
0.1	9.5/81	11.6/67	0.1	9.0/85	12.4/74
0.01	12.8/87	13.8/69	0.01	10.8/88	13.3/77

Table 10: Nombre d'itérations de solveur GMRES par itération de Newton et temps total de simulation en secondes pour les préconditionnements BGSLU et BGSAMG avec les valeurs suivantes des coefficients de diffusion: gauche: $k_{1,c}^e = 7570$ m²/an, $k_{1,m}^e = 4425$ m²/an, et $k_{2,c}^e = r_{2,1} k_{1,c}^e$, $k_{2,m}^e = r_{2,1} k_{1,m}^e$, et droite: $k_{1,c}^e = 7570$ m²/an, $k_{2,c}^e = 75700$ m²/an, et $k_{1,m}^e = r_{m,c} k_{1,c}^e$, $k_{2,m}^e = r_{m,c} k_{2,c}^e$. Cas test du bassin Rift avec $\Delta x = 2.5$ km, $\Delta t = 0.03$ Ma, et $\beta = 10$ m.

4.4 Analyse mathématique et numérique du modèle multi-lithologique [5], [22], [3]

On considère une version simplifiée du problème multi-lithologique (35) sans contrainte sur le taux d'érosion obtenue pour des coefficients de diffusion des lithologies $k_i(b)$, $i = 1, \dots, L$, tous égaux et fixés à un pour simplifier. Cette hypothèse signifie, d'un point de vue physique, que les lithologies ont les mêmes propriétés de transport. La composition à l'intérieur du bassin est alors déterminée par les sédiments initialement présents dans le bassin et par les apports de sédiments aux frontières. Enfin, par souci de simplicité, les déplacements du socle du bassin, les variations du niveau de la mer et les termes sources sont pris nuls.

Pour ce modèle simplifié, on voit en sommant les équations de conservation des lithologies pour $i = 1, \dots, L$ que la variable h satisfait l'équation parabolique

$$\begin{cases} \partial_t h - \Delta h = 0 & \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+^*, \\ -\nabla h \cdot n_x = g & \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+^*, \\ h|_{t=0} = h^0 & \text{sur } \Omega, \end{cases} \quad (56)$$

tandis que les variables concentrations (c_i^s, u_i) vérifient pour chaque lithologie $i = 1, \dots, L$ le système couplé linéaire dans les variables (c_i^s, u_i) :

$$\begin{cases} u_i|_{\xi=0} \partial_t h + \operatorname{div}(-c_i^s \nabla h) = 0 & \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+^*, \\ c_i^s|_{\Sigma^+} = \tilde{c}_i & \text{sur } \Sigma^-, \\ \partial_t u_i + \partial_t h \partial_\xi u_i = 0 & \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \\ u_i|_{\xi=0} = c_i^s & \text{sur } \mathcal{D}^+, \\ u_i|_{t=0} = u_i^0 & \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+^*, \end{cases} \quad (57)$$

où

$$\mathcal{D}^+ = \{(x, t) \in \Omega \times \mathbb{R}_+^* \mid \partial_t h(x, t) > 0\},$$

et

$$\Sigma^- = \{(x, t) \in \partial\Omega \times \mathbb{R}_+^* \mid g(x, t) < 0\}.$$

Les équations (57) couplent pour chaque lithologie i une équation linéaire du premier ordre pour la concentration de surface c_i^s avec une équation d'advection linéaire pour la concentration c_i qui admet c_i^s comme condition limite entrante à la surface du bassin en cas de sédimentation.

Afin de prouver la convergence du schéma volume fini implicite (40)-(44), nous avons défini une formulation faible pour le problème couplé (57) (définition 4.2), pour laquelle nous avons montré l'existence d'une unique solution, résultat énoncé dans le Théorème 4.1.

Le résultat de convergence du schéma est énoncé dans le Théorème 4.2. Il nous donne ainsi l'existence d'une solution faible pour le problème couplé. La preuve de l'unicité de cette solution faible utilise la linéarité du système (57) par rapport aux variables concentrations ainsi que le problème adjoint, pour lequel on montre l'existence d'une solution faible en utilisant également la convergence d'un schéma numérique. La principale difficulté réside alors dans la preuve d'un lemme d'intégration par parties de solutions non régulières des équations d'advection directes et adjointes pour lequel on utilise la méthode des caractéristiques et les travaux de [Bar70].

Si l'on considère le système couplé constitué par l'équation parabolique pour h et une des équations linéaires du premier ordre pour une variable c_i^s , on peut voir que ce modèle présente les mêmes termes de flux que le modèle d'écoulement de Darcy diphasique. La démonstration

de la convergence du schéma utilise cette similarité en reprenant les résultats de [EGH00] où est démontrée la convergence du schéma volume fini pour l'écoulement de Darcy diphasique.

Ces résultats ont été publiés dans [5],[22] pour la convergence du schéma numérique (40)-(44) vers une solution faible, et dans [3], [22] pour l'unicité de cette solution. On se contente donc de les énoncer dans ce paragraphe en renvoyant aux articles pour les démonstrations.

On effectue les hypothèses suivantes :

Hypothèse 4.1

- (i) Ω est un ouvert borné de \mathbb{R}^d , de classe C^∞ ,
- (ii) $h^0 \in C^2(\bar{\Omega})$,
- (iii) $g \in C^1(\partial\Omega \times \mathbb{R}_+) \cap L^2(\partial\Omega \times \mathbb{R}_+)$,
- (iv) g et h^0 sont choisis selon les hypothèses du Théorème 5.3 de [LSU68] (p. 320) de telle sorte que l'unique solution h de (56) soit dans $C^2(\bar{\Omega} \times [0, T])$ pour tout $T > 0$,
- (v) $\tilde{c}_i \in L^\infty(\Sigma^-)$ avec $\tilde{c}_i \geq 0$ pour $i = 1, \dots, L$ et $\sum_{i=1}^L \tilde{c}_i = 1$,
- (vi) $u_i^0 \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_+^*)$ avec $u_i^0 \geq 0$ pour $i = 1, \dots, L$ et $\sum_{i=1}^L u_i^0 = 1$,
- (vii) Pour tout $T > 0$, les frontières $\partial\Sigma_T^+$ et $\partial\Sigma_T^-$ des ensembles $\Sigma_T^+ = \{(x, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \mid g(x, t) > 0\}$ et $\Sigma_T^- = \{(x, t) \in \partial\Omega \times (0, T) \mid g(x, t) < 0\}$ sont l'union d'un nombre fini de variétés C^1 de dimension au plus $d - 1$,
- (viii) Pour tout $T > 0$, les frontières $\partial\mathcal{D}_T^+$ et $\partial\mathcal{D}_T^-$ des ensembles $\mathcal{D}_T^+ = \{(x, t) \in \Omega \times (0, T) \mid \partial_t h(x, t) > 0\}$, et $\mathcal{D}_T^- = \{(x, t) \in \Omega \times (0, T) \mid \partial_t h(x, t) < 0\}$ sont l'union d'un nombre fini de variétés C^1 de dimension au plus d .

On note $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ l'espace des fonctions à valeurs réelles

$$\{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \text{Supp}(\varphi) \text{ borné dans } \mathbb{R}^n\}.$$

Pour avoir une formulation mathématique rigoureuse du problème (57), nous définissons les solutions au sens faible suivant pour chaque lithologie $i = 1, \dots, L$.

Définition 4.2 *Supposons l'Hypothèse 4.1 vérifiée, et soit h la solution du problème (56). Alors $(u_i, c_i^s) \in L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*) \times L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_+^*)$ est une solution faible de (57) si :*

- (i) Pour tout $\varphi \in \mathcal{A} = \{v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{d+2}) \mid v(\cdot, 0, \cdot) = 0 \text{ sur } \Omega \times \mathbb{R}_+^* \setminus \mathcal{D}^+\}$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}_+} [\partial_t \varphi(x, \xi, t) + \partial_t h(x, t) \partial_\xi \varphi(x, \xi, t)] u_i(x, \xi, t) dt d\xi dx \\ & + \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}_+} u_i^0(x, \xi) \varphi(x, \xi, 0) d\xi dx + \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}_+} \partial_t h(x, t) c_i^s(x, t) \varphi(x, 0, t) dt dx = 0, \end{aligned} \quad (58)$$

- (ii) Pour tout $\psi \in \mathcal{A}_0 = \{v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{d+2}) \mid v(\cdot, 0, \cdot) = 0 \text{ sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+^* \setminus \Sigma^-\}$

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathbb{R}_+} [\partial_t \psi(x, \xi, t) + \partial_t h(x, t) \partial_\xi \psi(x, \xi, t)] u_i(x, \xi, t) dt d\xi dx \\ & - \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}_+} u_i^0(x, \xi) \psi(x, \xi, 0) d\xi dx + \int_{\mathbb{R}_+} \left(\int_{\Omega} c_i^s(x, t) \nabla h(x, t) \cdot \nabla \psi(x, 0, t) dx \right. \\ & \left. + \int_{\partial\Omega} \tilde{c}_i(x, t) g(x, t) \psi(x, 0, t) d\gamma(x) \right) dt = 0. \end{aligned} \quad (59)$$

Le théorème suivant est démontré dans [3].

Théorème 4.1 *Supposons l'Hypothèse 4.1 vérifiée. Alors, pour tout $i = 1, \dots, L$, le problème (57) admet au moins une solution faible (u_i, c_i^s) au sens de la Définition 4.2 satisfaisant $\sum_{i=1}^L u_i = 1$, $u_i \geq 0$, et $\sum_{i=1}^L c_i^s = 1$, $c_i^s \geq 0$. De plus, pour tout $i = 1, \dots, L$, la solution faible u_i est unique.*

Remarque 4.1 *L'existence et l'unicité sont encore vraies si on considère le modèle de compaction (37) donné par une porosité fonction de la profondeur $\Phi(h - z)$ et un coefficient de diffusion non linéaire $k_i = k(h)$ pour tout $i = 1, \dots, L$. Dans ce cas h représente la solution d'une équation parabolique non linéaire de la forme*

$$(1 - \Phi(h)) \partial_t h + \Delta \Psi(h) = 0$$

avec $\Phi \in [0, \gamma]$ régulière, $\gamma \in [0, 1)$ et $\Psi(h)$ strictement décroissante, régulière et à dérivée bornée.

Soit $(\mathcal{K}, \Sigma, \mathcal{P})$ un maillage admissible de Ω au sens de la Définition 4.1. On note $\delta\mathcal{K}$ la taille de ce maillage définie par $\delta\mathcal{K} = \sup \{diam(\kappa), \kappa \in \mathcal{K}\}$ et $reg(\mathcal{K})$ le facteur géométrique défini par $reg(\mathcal{K}) = \max_{\substack{\sigma \in \Sigma_{int} \\ \sigma = \kappa | \kappa'}} \frac{\delta\mathcal{K}}{d(\kappa, \kappa')}$.

La discrétisation en temps est pour simplifier supposée uniforme de pas de temps $\Delta t > 0$ avec $t^n = n\Delta t$. L'exposant $n \in \mathbb{N}$ désigne les variables prises au temps t^n .

On considère la discrétisation du système d'équations obtenue par le schéma implicite volume fini (40)-(44). Dans le cas particulier que l'on considère dans ce paragraphe, on montre, pour tout $n \geq 0$, l'existence de solutions $(h_\kappa^n)_{\kappa \in \mathcal{K}}$, $(c_{i,\kappa}^{s,n+1})_{\kappa \in \mathcal{K}}$, $(c_{i,\kappa}^n)_{\kappa \in \mathcal{K}}$ et $(u_{i,\kappa}^n)_{\kappa \in \mathcal{K}}$, $i = 1, \dots, L$. Ces solutions sont uniques sauf pour la concentration de surface $c_{i,\kappa}^{s,n+1}$ qui est arbitraire telle que $\sum_{j=1}^L c_{j,\kappa}^{s,n+1} = 1$ sur certains points dégénérés $(\kappa, n+1)$ où $h_\kappa^{n+1} = h_\kappa^n = h_{\kappa'}^{n+1}$ pour tout $\kappa' \in \mathcal{K}_\kappa$, pour lesquels elle est choisie positive.

Considérant le système de coordonnées $\xi = h_\kappa^n - z$, la fonction $u_{i,\kappa}^n$ est définie pour tout $\kappa \in \mathcal{K}$, $n \geq 0$ et $i = 1, \dots, L$ par

$$u_{i,\kappa}^n(\xi) = c_{i,\kappa}^n(h_\kappa^n - \xi) \text{ pour tout } \xi \in \mathbb{R}_+^*. \quad (60)$$

Pour tout maillage admissible $(\mathcal{K}, \Sigma_{int}, \mathcal{P})$ de Ω , tout pas de temps $\Delta t > 0$ et $i = 1, \dots, L$, soit $h_{\mathcal{K}, \Delta t}$ la fonction définie sur $\Omega \times \mathbb{R}_+^*$, $c_{i,\mathcal{K}, \Delta t}^s$ une fonction définie sur $\Omega \times \mathbb{R}_+^*$, et $u_{i,\mathcal{K}, \Delta t}$ la fonction définie sur $\Omega \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ par

$$\begin{cases} h_{\mathcal{K}, \Delta t}(x, t) = h_\kappa^{n+1}, \\ u_{i,\mathcal{K}, \Delta t}(x, \xi, t) = u_{i,\kappa}^{n+1}(\xi), \\ c_{i,\mathcal{K}, \Delta t}^s(x, t) = c_{i,\kappa}^{s,n+1}, \end{cases} \quad (61)$$

pour tout $x \in \kappa$, $\kappa \in \mathcal{K}$, $t \in (t^n, t^{n+1}]$, $\xi \in \mathbb{R}_+^*$, $n \geq 0$.

Le théorème suivant est démontré dans [5].

Théorème 4.2 *Supposons l'Hypothèse 4.1 vérifiée. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, soit $(\mathcal{K}_m, \Sigma_{int}^m, \mathcal{P}_m)$ un maillage admissible de Ω au sens de la Définition 4.1 et $\Delta t_m > 0$. Supposons de plus qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\text{reg}(\mathcal{K}_m) \leq \alpha$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, et que $\Delta t_m \rightarrow 0$, $\frac{\delta \mathcal{K}_m}{\sqrt{\Delta t_m}} \rightarrow 0$ quand $m \rightarrow \infty$.*

Pour tout $m \in \mathbb{N}$ et $i = 1, \dots, L$, soit $h_{\mathcal{K}_m, \Delta t_m}$, $u_{i, \mathcal{K}_m, \Delta t_m}$, les fonctions définies par (61) et $c_{i, \mathcal{K}_m, \Delta t_m}^s$ une fonction définie par (61).

Alors la suite $(h_{\mathcal{K}_m, \Delta t_m})_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers la solution h du problème (56) dans $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ pour tout $T > 0$, et il existe une sous-suite de $(\mathcal{K}_m, \Delta t_m)_{m \in \mathbb{N}}$, toujours notée $(\mathcal{K}_m, \Delta t_m)_{m \in \mathbb{N}}$, telle que pour tout $i \in \{1, \dots, L\}$, la sous-suite $(c_{i, \mathcal{K}_m, \Delta t_m}^s)_{m \in \mathbb{N}}$ (resp. $(u_{i, \mathcal{K}_m, \Delta t_m})_{m \in \mathbb{N}}$) converge vers une fonction c_i^s dans $L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_+^)$ (resp. u_i dans $L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*)$) pour la topologie faible- \star . De plus, pour tout $i \in \{1, \dots, L\}$, la limite (u_i, c_i^s) est une solution faible du problème (57) au sens de la Définition 4.2.*

On peut noter que les résultats énoncés dans le Théorème 4.2 sont encore valables si seuls les points (i) à (vi) de l'Hypothèse 4.1 sont vérifiés. Enfin, on déduit de ce théorème et du Théorème 4.1 le résultat suivant, qui établit la convergence de la suite complète des approximations de la concentration dans le bassin vers la solution faible.

Théorème 4.3 *Supposons l'Hypothèse 4.1 vérifiée. Pour tout $m \in \mathbb{N}$, soit $(\mathcal{K}_m, \Sigma_{int}^m, \mathcal{P}_m)$ un maillage admissible de Ω au sens de la Définition 4.1 et $\Delta t_m > 0$. Supposons de plus qu'il existe $\alpha > 0$ tel que $\text{reg}(\mathcal{K}_m) \leq \alpha$ pour tout $m \in \mathbb{N}$, et que $\Delta t_m \rightarrow 0$, $\frac{\delta \mathcal{K}_m}{\sqrt{\Delta t_m}} \rightarrow 0$ quand $m \rightarrow \infty$.*

Pour tout $m \in \mathbb{N}$ et $i = 1, \dots, L$, soit $h_{\mathcal{K}_m, \Delta t_m}$ et $u_{i, \mathcal{K}_m, \Delta t_m}$ les solutions définies par (61).

Alors la suite $(h_{\mathcal{K}_m, \Delta t_m})_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers la solution h du problème (56) dans $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$ pour tout $T > 0$, et la suite $(u_{i, \mathcal{K}_m, \Delta t_m})_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers la solution faible u_i de (57) dans $L^\infty(\Omega \times \mathbb{R}_+^ \times \mathbb{R}_+^*)$ pour la topologie faible- \star .*

4.5 Travaux en cours et Perspectives

Modélisation du transport fluvial des sédiments (flux d'eau)

Le modèle couplant l'écoulement d'eau avec le transport des sédiments a été introduit dans [G97] et [GJ99] à partir de la loi de Chezy pour l'écoulement hydraulique et la loi de Meyer-Peter et Müller pour le transport de sédiments.

La loi de Chezy s'obtient à partir du modèle de St-Venant en supposant que le régime d'écoulement d'eau à la surface du bassin est aux échelles considérées stationnaire et uniforme donc régi par la conservation du flux d'eau et l'équilibre des forces gravitaires et de frottement au lit du fleuve. Soit h^e la hauteur d'eau en m et u^e en m/s la vitesse d'écoulement, on a

$$\begin{cases} \text{div}(h^e u^e) = 0, \\ C_f |u^e| u^e = g h^e \nabla b, \end{cases}$$

D'autre part on considère la loi semi-empirique de transport des sédiments de Meyer-Peter et Müller

$$q_f = C \left((|\tau| - \tau_c)^+ \right)^{3/2} \frac{\tau}{|\tau|}$$

où q_f est le flux de sédiments par unité de largeur en m^2/s , $\tau = \rho^e C_f |u^e| u^e$ est la contrainte de cisaillement au lit du chenal en régime turbulent et τ_c la contrainte de cisaillement critique.

En pratique τ_c est négligeable de sorte que l'on obtient tout compte fait

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left(q^e \frac{\nabla b}{|\nabla b|}\right) = 0, \\ q_f = k q^e \nabla b, \end{cases}$$

en notant $q_e = h^e |u^e|$ le flux d'eau par unité de largeur en m^2/s et où k est un coefficient indépendant des variables q^e et b .

L'évolution de la topographie est alors donnée par la loi de conservation de la masse de sédiments

$$\partial_t h + \operatorname{div}\left(k q^e \nabla b\right) = 0,$$

A flux d'eau donné, on reconnaît bien le modèle mono-lithologique diffusif 25.

On s'intéresse maintenant au système couplant le calcul stationnaire du flux d'eau compte tenu d'un flux d'eau donné aux frontières entrantes du domaine, avec l'évolution de la topographie par sédimentation érosion suivant la loi de transport $q_f = k q^e \nabla b$.

Le modèle décrit précédemment est généralisé dans [G97], [GJ99] en superposant le mode de transport des sédiments purement gravitaire avec le transport par flux d'eau et en introduisant des coefficients k dépendants de la lithologie pour l'extension au cadre multi-lithologique.

Le coefficient de diffusion k_i du modèle diffusif est donc la somme de deux termes: le coefficient de diffusion gravitaire k_i^g et le coefficient k_i^e de diffusion lié à l'écoulement d'eau. Ce dernier est proportionnel au module du flux d'eau q^e normalisé par rapport à un flux de référence moyen. Au final on obtient

$$k_i(b) = k_i^g(b) + q^e k_i^e(b).$$

Le modèle de flux d'eau s'écrit trouver q^e sur $\Omega \times (0, T)$ tel que

$$\begin{cases} \operatorname{div}\left(q^e \frac{\nabla b}{|\nabla b|}\right) = 0 & \text{sur } \Omega \times (0, T), \\ q^e \frac{\nabla b}{|\nabla b|} \cdot \mathbf{n} = \varphi^e & \text{sur } \Sigma_-, \end{cases}$$

où $\varphi^e \leq 0$ est la condition de flux d'eau entrant. La normalisation du flux d'eau par rapport à un climat de référence est obtenue en normalisant la donnée φ^e par rapport à un débit type des rivières ou des fleuves.

Sur le plan numérique, le flux d'eau est discrétisé par un schéma volume fini avec décentrage amont et le couplage avec les lois de conservation des lithologies est explicite en temps. Des travaux sont en cours sur le modèle pour étudier et améliorer le comportement physique et numérique du couplage. En particulier, on est amené à stabiliser numériquement ce couplage en rajoutant un terme de diffusion en $-\epsilon \Delta \left(\frac{q^e}{|\nabla b|}\right)$ dans l'équation de conservation du flux d'eau.

Termes source de carbonatation

La moitié des réservoirs pétroliers en exploration sont de type carbonatés, il est donc essentiel d'inclure dans le modèle numérique le couplage avec un terme source de production de sédiments carbonatés modélisant la croissance des coraux tel que défini par Didier Granjeon dans [GJ99].

En première approximation ce terme source comporte une non linéarité du type $S(b)$ sachant que la production est nulle hors de l'eau ($b < 0$) et au delà d'une certaine tranche d'eau liée à la luminosité ($b > b_{\text{limite}} > 0$). Conformément à la physique, ce modèle est instable avec un point répulseur pour $b = b_{\text{limite}}$ et un point attracteur pour $b = 0$. Dans un deuxième temps, il faudra aussi tenir compte de l'énergie des vagues générée par la houle selon la direction des vents dominants.

5 Inversion de modèles stratigraphiques [18], [20], [19], [2]

En exploration pétrolière la modélisation stratigraphique est utilisée à l'échelle des bassins sédimentaires de façon à intégrer les données sismiques, diagraphiques et géologiques dans un modèle quantitatif tridimensionnel d'évolution du bassin. L'objectif est de valider une interprétation géologique, d'estimer la position des réservoirs potentiels, ou de quantifier les propriétés pétrophysiques des roches.

Aucun des paramètres du modèle n'est directement mesurable. Il s'agit des flux de sédiments aux frontières du bassin (flux fractionnaires entrants $\mu_i^e(x, t)$ pour chaque lithologie $i = 1, \dots, L$ et flux total $g(x, t)$), de l'accommodation $a(x, t)$, et des coefficients de diffusion $k_{i,m}(t)$, $k_{i,c}(t)$ pour chaque lithologie $i = 1, \dots, L$. Les coefficients de diffusion sont très difficiles à évaluer du fait de leur forte dépendance à l'échelle considérée et au contexte climatique. L'emplacement des flux entrants de sédiments aux frontières peut être dans certains cas grossièrement estimé par le géologue mais reste à valider. La répartition aux frontières des flux totaux est difficile à estimer et la composition en lithologies de ces apports l'est plus encore. Enfin l'accommodation n'est pas connue car la sismique n'image le bassin qu'au temps présent. Elle peut seulement être interpolée en temps et en espace entre les puits si l'on dispose de marqueurs temps aux puits obtenus par corrélation des signaux diagraphiques.

La prédictivité du modèle va donc dépendre essentiellement de la procédure de calage de l'ensemble de ces paramètres aux données. Pour cela, on dispose de données brutes sismiques et diagraphiques ainsi que de données géologiques de terrain et bibliographiques.

Les données sismiques (figure 14) sont supposées migrées en profondeur à l'aide d'un modèle de vitesse avec une précision verticale (axe z) d'une trentaine de mètres. Cette sismique ne capte pas les variations hautes fréquences comme par exemple les phases de progradation-rétrogradation liées aux composantes hautes fréquence de la courbe eustatique. Les diagraphies (figure 14) sont des enregistrements aux puits (0 à 30 puits pour un bassin d'exploration) de natures diverses (électrique, rayons gamma, ...) avec une résolution verticale du signal d'environ 30 cm.

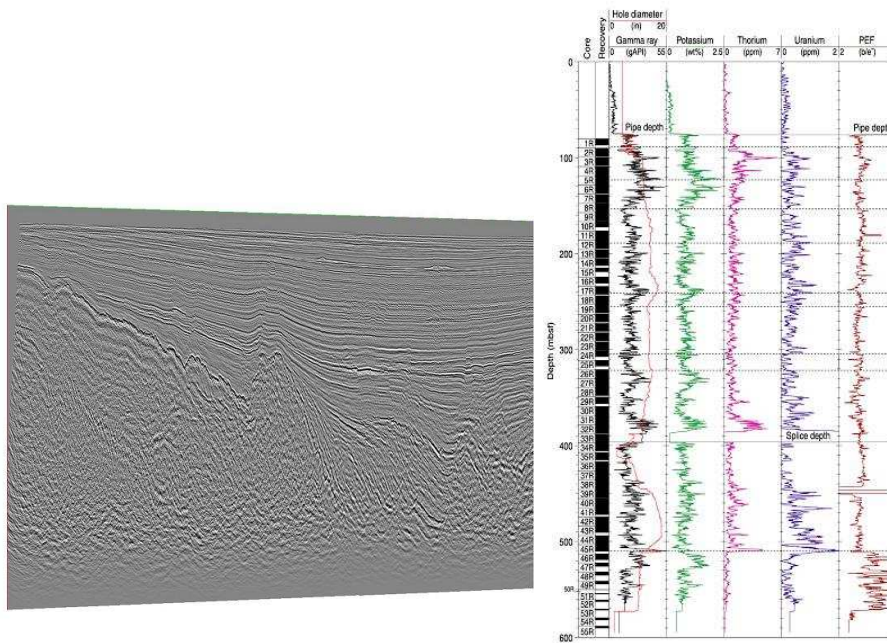


Figure 14: Image sismique d'une section 2D d'un bassin sédimentaire et enregistrements dia-graphiques d'un puits

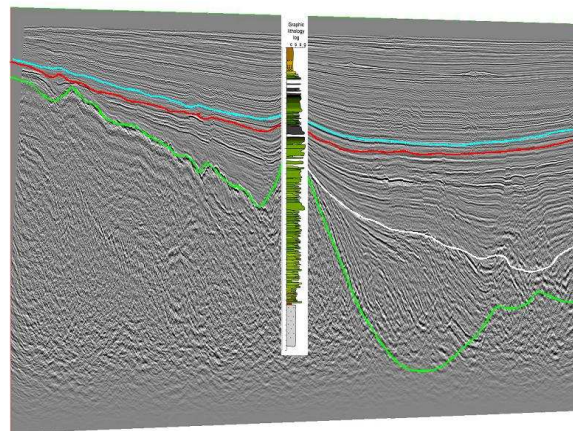


Figure 15: Pointé d'horizons géologiques sur l'image sismique et interprétation en faciès lithologique des enregistrements dia-graphiques d'un puits

Ces données brutes sont ensuite interprétées, comme le montre la figure 15, en données utilisables par le sédimentologue:

- pointé sur la sismique *d'horizons géologiques* correspondants aux surfaces de dépôt vues sur le bassin à l'âge actuel,
- interprétation des enregistrements dia-graphiques en terme de *faciès sédimentologique* (logs lithologiques) dont la résolution verticale dépend du faciès en place.

Des recherches en cours visent aussi à terme à exploiter l'information de texture des images sismiques par classification en terme de faciès sismiques à relier aux faciès sédimentologiques.

Les faciès sédimentologiques fournissent des *plages paléo-bathymétriques* et des *plages de concentrations en lithologies* des sédiments en place (voir tableau 5 pour les plages bathymétriques des faciès ordonnés par bathymétries croissantes).

Faciès sédimentologique	Plage paléo-bathymétrique (m)
<i>Continental</i>	[-10000,0]
<i>Plaine côtière</i>	[-5,5]
<i>Shoreface (limite d'action des vagues)</i>	[0,70]
<i>Plateau continental</i>	[5,300]
<i>Talus continental</i>	[150,2000]
<i>Plaine abyssale</i>	[800,11000]

Table 11: Exemple de plages paléo-bathymétriques typiques des faciès sédimentologiques ordonnés par bathymétries croissantes

Les données étant disponibles uniquement au temps présent alors que les paramètres du modèle dépendent du temps, il est essentiel de modéliser le comportement en temps de ces paramètres. Pour cela, on tire naturellement parti de la structure du bassin en couches géologiques. On supposera que la variation en temps des paramètres est constante ou affine pour chaque *séquence stratigraphique* définie par deux horizons géologiques successifs du pointé sismique. On modélise ainsi les effets sur l'accommodation, les flux et les coefficients de diffusion des variations en temps basse fréquence du climat, de la tectonique et de l'eustatisme. Seuls ces effets basses fréquences sont visibles sur les données sismiques dont on dispose. Les données de puits, d'une résolution supérieure à la sismique, détectent des variations eustatiques plus fines qui pourront être rajoutées à l'accommodation dans une phase ultérieure du calage de données.

Par la suite, on considèrera une seule séquence stratigraphique sur l'intervalle de temps noté $[0, T]$. Sur la séquence $[0, T]$, les coefficients de diffusion sont considérés constants ainsi que les apports aux frontières du bassin. L'accommodation est supposée varier linéairement en temps par séquence et continûment entre séquences. Ainsi il suffira d'inverser pour chaque séquence l'accommodation en fin de séquence notée A^T définie sur Ω , le flux total g sur $\partial\Omega$, les flux fractionnaires μ_i^c , $i = 1, \dots, L$ sur $\partial\Omega_- = \{x \in \partial\Omega, g(x) < 0\}$, et les coefficients de diffusion $k_{i,m}$ et $k_{i,c}$, $i = 1, \dots, L$.

Comme le montre le tableau précédent, les données paléo-bathymétriques et de concentrations interprétées aux puits sont peu contraintes et ponctuelles spatialement (à l'exception de la zone côtière qui pourra faire l'objet d'un traitement particulier si l'on dispose d'une ligne de côte complète).

En revanche la carte des épaisseurs de sédiments mesurées sur la sismique entre les deux horizons géologiques de la couche est une donnée relativement mieux contrainte et cohérente spatialement. On notera cette donnée Δh^d supposée définie sur le domaine Ω . En cas d'érosion de la couche postérieurement à son dépôt, on supposera que le géologue est capable de fournir les épaisseurs négatives de la zone érodée. La détermination de ces épaisseurs érodées est un

problème difficile qui fait l’objet de travaux en cours.

Une des difficultés du problème d’inversion des paramètres par calage des données réside dans son caractère couplé non linéaire (toutes les sorties du modèle, bathymétries, concentrations, épaisseurs de sédiments, à caler dépendent de façon non linéaire de tous les paramètres) et dans la nature hétérogène des données et des paramètres.

Le modèle étant a priori lisse, l’approche classique consiste à définir une fonction coût (par exemple par maximum de vraisemblance en modélisant la distribution de probabilité sur le bruit des mesures), à introduire des a priori sous la forme de termes de régularisation ou de paramétrisation des paramètres spatiaux (flux, accommodation) et à résoudre un problème de minimisation sous contraintes (contraintes bornes ou linéaires sur les paramètres, contraintes non linéaires pour les plages bathymétriques ou de concentrations aux puits).

Cette approche qui couple tous les paramètres et toutes les données est très coûteuse en temps calcul, elle nécessite le développement du code adjoint difficile à maintenir dans le contexte d’un outil logiciel commercial. Surtout, elle manque de robustesse du fait des mauvais conditionnements induits par l’hétérogénéité des variables, de la présence de minima locaux et de la difficulté d’affecter des poids aux différents termes de la fonction coût (on connaît mal le bruit de mesure, on ne connaît pas les corrélations du bruit de mesures sur les différentes données et encore moins le bruit lié au modèle).

On a donc choisi une approche différente qui consiste à procéder pas à pas en découplant dans une première étape les paramètres. Ce découplage est obtenu non pas en figeant certains paramètres mais en effectuant des hypothèses simplificatrices sur le modèle conduisant à utiliser une gamme de modèles du plus simple au plus complet.

Cette méthodologie par *réduction de modèle* permet d’obtenir une procédure d’inversion plus robuste et plus rapide mais aussi plus interactive car facilement compréhensible par l’utilisateur.

Elle permet aussi de rendre la modélisation stratigraphique accessible aux interpréteurs sur stations sismiques dans le but de l’utiliser comme outil d’aide à l’interprétation sismique.

Ceci nous a conduit à introduire un modèle stratigraphique dit stationnaire au sens où les solutions calculées sont indépendantes du temps pour chaque séquence considérée. Il est décrit aux paragraphes 5.1 dans le cas mono-lithologique et 5.3 dans le cas multi-lithologique. Ce modèle repose sur une interpolation en temps de la carte d’épaisseur Δh^d constituant la donnée la mieux contrainte:

$$h(x, t) = \Delta h^d(x) \frac{t}{T} \text{ sur la séquence } [0, T], \quad (62)$$

ce qui suppose une vitesse de sédimentation ou d’érosion constante sur chaque verticale de la couche.

En substituant ces épaisseurs dans le système d’équations du modèle multi-lithologique (sans contrainte sur le taux d’érosion), il est alors possible de résoudre ce système dans les variables indépendantes b et c_i^s , $i = 1, \dots, L$. Sous certaines hypothèses, on montre alors que les concentrations de surface c_i^s sont indépendantes du temps et que la dépendance en temps de la bathymétrie b est triviale. Le nouveau modèle simplifié respecte par définition les épaisseurs de la séquence Δh^d et permet de calculer une bathymétrie en fin de séquence $b^T(x) = b(x, T)$ et les concentrations moyennes de la couche de sédiments $c_i(x)$, $i = 1, \dots, L$, en résolvant un

système d'EDPs indépendant du temps posé sur le domaine Ω .

L'accommodation étant une sortie du modèle direct stationnaire, on est donc ramené avec ce nouveau modèle à caler les données aux puits en inversant les flux totaux g , les flux fractionnaires entrants μ_i^e , $i = 1, \dots, L$, et les coefficients de diffusion.

Dans le cas mono-lithologique, en décomposant les flux g dans une base de fonctions, on montre dans le paragraphe 5.2 que ce problème se ramène à un ensemble de contraintes linéaires sur les coefficients dans cette base et sur les coefficients de diffusion moyens mono-lithologiques k_m et k_c . Le domaine des paramètres admissibles est donc un polyèdre convexe que l'on peut explorer de façon interactive. Cette première étape permet à l'utilisateur de placer ses flux g sur le bord du domaine, d'obtenir un premier réglage des coefficients de diffusion et si nécessaire de compléter ses données.

L'étape précédente conduit à définir une paramétrisation réduite des flux totaux g et fixe un bon ordre de grandeur des coefficients de diffusion. Il reste à ajuster ces derniers paramètres et à inverser les flux fractionnaires entrants par calage sur le modèle multi-lithologique stationnaire de l'ensemble des données en bathymétries et concentrations aux puits.

Le principal intérêt du modèle stationnaire réside dans le calage direct des épaisseurs et dans sa rapidité de calcul. En revanche l'hypothèse de vitesse de sédimentation/érosion constante le long des verticales de la couche rend mal compte des phases de progradation, rétrogradation dans la zone du front (avancée ou recul de la ligne de côte). Pour y remédier on présente au paragraphe 5.4 des algorithmes de calage des épaisseurs Δh^d par inversion de l'accommodation en fin de séquence A^T pour le modèle multi-lithologique instationnaire. Ces algorithmes utilisent le modèle stationnaire comme modèle inverse approché dans trois approches:

- (i) Une méthode de Quasi Newton utilisant le modèle stationnaire tangent comme approximation de la Jacobienne inverse
- (ii) Une méthode Inexact Newton utilisant le modèle stationnaire tangent comme préconditionnement de l'algorithme itératif GMRES.
- (iii) Un algorithme Dogleg (région de confiance) combinant la direction de Newton approchée obtenue par Inexact Newton et la direction du gradient obtenue par état adjoint.

Cette procédure permet d'obtenir un modèle de vitesse plus physique qui peut ensuite être utilisé par le modèle stationnaire avec une discrétisation en temps plus fine.

Ces travaux ont fait l'objet d'un article soumis à la revue *Inverse Problems* [2], d'un *Proceedings* au congrès *ECMOR 2004* [20] et de deux brevets d'invention, le premier pour l'utilisation du modèle stationnaire en inversion stratigraphique [18] et le second sur l'inversion de l'accommodation par l'algorithme Newton GMRES préconditionné par le modèle stationnaire tangent [19].

Ils ont été menés en collaboration avec Marie Christine Cacas, Emily Albouy et Jean Marie Laigle de la direction Géologie Géo chimie de l'IFP, Delphine Sinoquet et Gabriela Dobranszky de la direction Technologie, Informatique Scientifique et Mathématiques Appliquées. Ils constituent une large part du travail de thèse de Gabriela Dobranszky coencadré par Jacques Blum de l'Université de Nice et par moi même à l'IFP.

5.1 Modèle stationnaire mono-lithologique [18], [20]

Le modèle stationnaire mono-lithologique s'obtient en substituant l'épaisseur de sédiments donnée par (62) dans le système (25). Le modèle se résout alors dans la variable b dont l'ensemble des solutions s'écrit sous la forme

$$\psi(b(x, t)) = \phi(x) + \alpha(t), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T),$$

où

$$\psi(b) := \begin{cases} k_m b & \text{si } b > 0, \\ k_c b & \text{si } b \leq 0, \end{cases} \quad (63)$$

et ϕ est une solution de l'équation posée sur le domaine Ω

$$\begin{cases} -\Delta\phi = \frac{\Delta h^d}{T} & \text{sur } \Omega \\ \nabla\phi \cdot n_x = g & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases}$$

définie à une constante près sous l'hypothèse de compatibilité

$$\int_{\Omega} \frac{\Delta h^d}{T} dx + \int_{\partial\Omega} g d\sigma = 0,$$

traduisant physiquement le fait que le volume de sédiments de la couche doit être apporté par les flux aux frontières.

On en déduit l'accommodation $a(x, t) = b(x, t) + \frac{t}{T} \Delta h^d(x)$. Ce modèle ne garantit pas la continuité de l'accommodation d'une couche à l'autre, en particulier, il rend mal compte de la transition entre deux couches. On ne retiendra donc que la bathymétrie b^T et l'accommodation A^T en fin de séquence définies de façon unique moyennant l'imposition d'une bathymétrie de contrôle en fin de séquence $\int_{\omega_p} b^T(x) dx = b_p$ typiquement donnée par un puits de faciès côtier.

En résumé le modèle stationnaire mono-lithologique fournit l'accommodation A^T et la bathymétrie b^T en fin de séquence solutions du problème

<p>Etant donnés Δh^d, k, g, b_p, tels que $\int_{\Omega} \frac{\Delta h^d}{T} dx + \int_{\partial\Omega} g d\sigma = 0$ trouver b^T et A^T tels que</p> $\begin{aligned} -\Delta\phi &= \frac{\Delta h^d}{T} && \text{sur } \Omega, \\ \nabla\phi \cdot n_x &= g && \text{sur } \partial\Omega, \\ b^T &= \psi^{-1}(\phi) && \text{sur } \Omega, \end{aligned} \quad (64)$ $\frac{1}{ \omega_p } \int_{\omega_p} b^T(x) dx = b_p$ $A^T = b^T + \Delta h^d \quad \text{sur } \Omega.$

Extension par θ -schéma: le modèle stationnaire peut s'interpréter comme la discrétisation en temps par un schéma d'Euler implicite à un pas de temps du modèle instationnaire. Une

généralisation naturelle s'obtient donc en considérant la discrétisation en temps à un pas de temps par θ -schéma

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\Delta\psi\left(\theta b^T + (1-\theta)b^0\right) = \frac{\Delta h^d}{T} & \text{sur } \Omega, \\ \nabla\psi\left(\theta b^T + (1-\theta)b^0\right) \cdot n_x = g & \text{sur } \partial\Omega, \\ A^T = b^T + \Delta h^d & \text{sur } \Omega, \\ \frac{1}{|\omega_p|} \int_{\omega_p} b^T(x) dx = b_p, & \end{array} \right. \quad (65)$$

avec $\theta \in [\frac{1}{2}, 1]$. On présentera des comparaisons numériques entre ce modèle stationnaire et le modèle instationnaire dans le cas multi-lithologique au paragraphe 5.3.3.

5.1.1 Exemple du bassin de BAS: rôle des paramètres k_m , k_c et b_p

La figure 16 illustre l'influence des coefficients de diffusion k_m , k_c et de la bathymétrie de contrôle b_p dans le cas d'une séquence du bassin de BAS. Le flux entrant à gauche du bassin est déterminé par le volume de sédiments de la couche et le flux sortant à droite est nul. On voit que la bathymétrie de contrôle règle la position de la ligne de côte et que les coefficients de diffusion détermine la courbure du profil de dépôt en zone continentale et en zone marine.

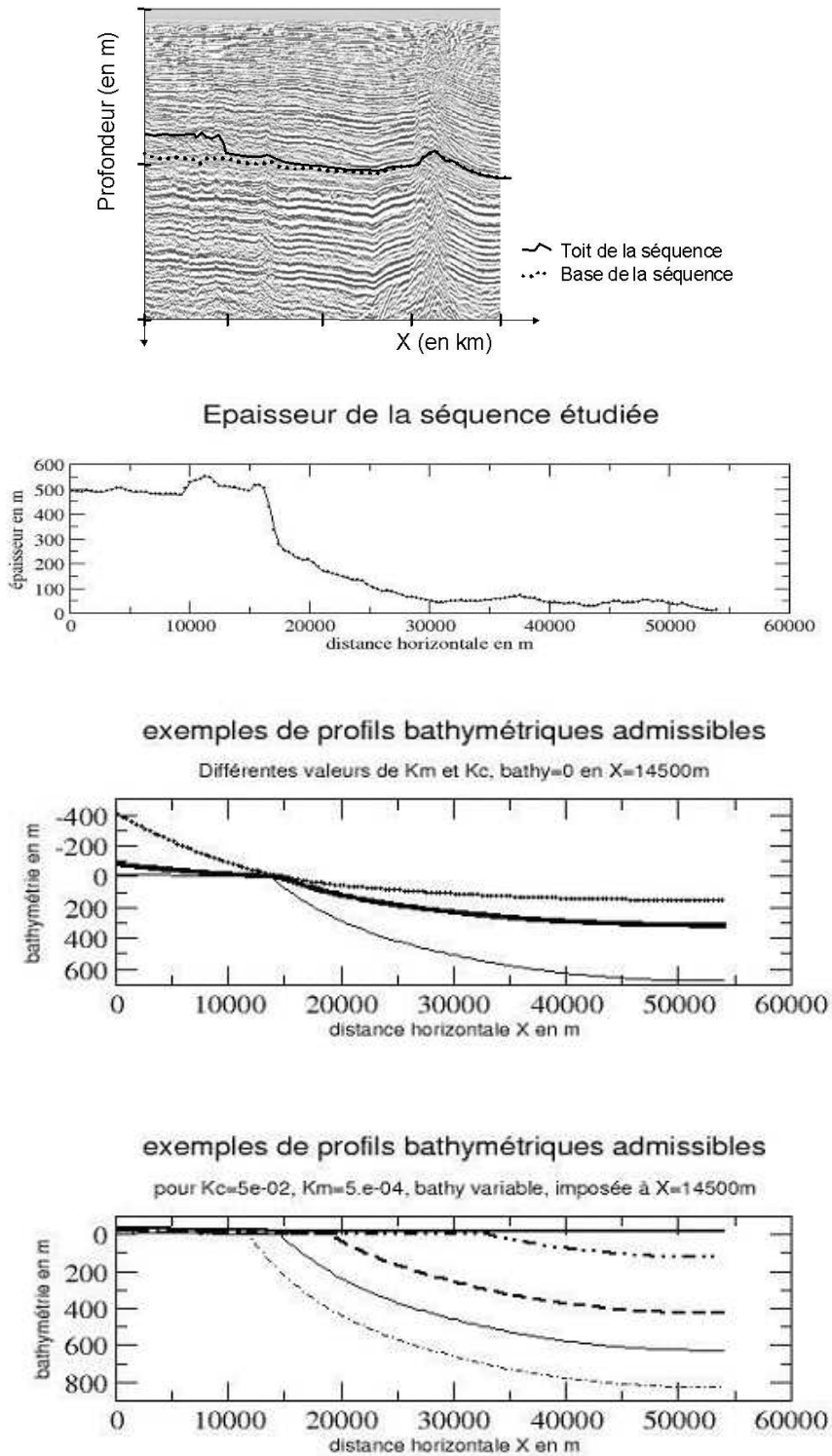


Figure 16: Exemple de profils bathymétriques obtenu par le modèle stationnaire dans le cas du bassin de BAS. (1) données sismiques et pointé de deux horizons géologiques définissant la séquence. (2) Epaisseurs de sédiments Δh^d . (3) Profil de dépôt $-b^T$ du modèle stationnaire pour différentes valeurs des coefficients de diffusion k_m , k_c et différentes valeurs de la bathymétrie de contrôle b_p en $x_p = 14500$ m.

5.1.2 Comparaison du modèle stationnaire au modèle instationnaire par analyse spectrale du modèle linéaire

Dans le cas du modèle instationnaire, c'est l'accommodation et non les épaisseurs de sédiments qui est supposée évoluer linéairement en temps sur la séquence $[0, T]$.

$$a(x, t) = A^0(x) + \frac{t}{T}(A^T(x) - A^0(x)). \quad (66)$$

avec $A^0 = b^0$ (i.e. $h^0 = 0$).

Dans le cas mono-lithologique, le problème inverse de calage des épaisseurs consiste donc à trouver l'accommodation en fin de séquence A^T telle que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t b - \Delta \psi(b) = \frac{A^T - A^0}{T} & \text{sur } \Omega \times (0, T), \\ \nabla \psi(b) \cdot n = g & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \\ a = b + h & \text{sur } \Omega \times (0, T), \\ b|_{t=0} = b^0 & \text{sur } \Omega, \\ b|_{t=T} = A^T - \Delta h^d & \text{sur } \Omega, \\ \frac{1}{|\omega_p|} \int_{\omega_p} b(x, T) dx = b_p & \end{array} \right. \quad (67)$$

sous l'hypothèse de compatibilité des données $\int_{\Omega} \frac{\Delta h^d}{T} dx + \int_{\partial\Omega} g d\sigma = 0$.

Dans le cas linéaire où $k_m = k_c = k$, on montre en se plaçant dans la base spectrale $(u_i, \omega_i)_{i \geq 0}$, $u_0 = \frac{1}{|\Omega|^{\frac{1}{2}}}$, $\omega_0 = 0$, de l'opérateur $-\Delta$ Neumann sur le domaine Ω que ce problème inverse est bien posé dans les normes H^1 et L^2 et que les coefficients dans la base spectrale sont donnés par

$$A_i = \frac{1}{1 - \alpha(k\omega_i T)} \left(\Delta h_i^d + \alpha(k\omega_i T) T g_i + (e^{-k\omega_i T} - \alpha(k\omega_i T)) b_i^0 \right), \quad i \geq 1$$

pour $i \geq 1$ où $\alpha(x) = \frac{1 - e^{-x}}{x}$, A_0 étant fixé par la bathymétrie de contrôle.

On vérifie sur cette formule que le problème est bien posé au sens où il n'y a pas d'amplification du bruit haute fréquence sur les données Δh^d . En revanche les basses fréquences ω_i de Δh^d sont amplifiées si $k\omega_i T \ll 1$ par un facteur se comportant en $\frac{2}{k\omega_i T}$. Ceci s'explique physiquement par le fait que le modèle crée des pentes importantes pour parvenir à diffuser les sédiments lorsque le domaine Ω est trop étendu ou la durée de la séquence trop courte ou lorsque le coefficient de diffusion k est trop faible.

De même, considérons le modèle stationnaire généralisé par θ -schéma dans le cas linéaire pour des coefficients de diffusion $k_m^s = k_c^s = k^s$. La solution A^s exprimée dans la base spectrale s'écrit pour $i \geq 1$

$$A_i^s = \left(1 + \frac{1}{\theta x_i^s} \right) h_i^d + \frac{T g_i}{\theta x_i^s} - \frac{1 - \theta}{\theta} b_i^0,$$

avec $x_i^s = k^s \omega_i T$ et A_0^s est fixé par la bathymétrie de contrôle.

Les limites de A_i lorsque $x_i = k\omega_i T \rightarrow 0$ et $x_i = k\omega_i T \rightarrow +\infty$ sont respectivement:

$$\limite_{x_i \rightarrow 0} A_i = (2/3 + 2/x_i) \Delta h_i^d + (-1/3 + 2/x_i) T g_i - b_i^0,$$

et

$$\limite_{x_i \rightarrow +\infty} A_i = (1 + 1/x_i)h_i^d + Tg_i/x_i - b_i^0/x_i.$$

Pour $k = k^s$, on voit donc que le modèle stationnaire avec $\theta = 1$ est une bonne approximation pour les grandes valeurs de $k\omega_1 T$ alors que le modèle stationnaire avec $\theta = 1/2$ est une bonne approximation pour les petites valeurs de $k\omega_1 T$.

En pratique dans le cas non linéaire mono-lithologique ou multi-lithologique, il est possible d'ajuster les paramètres k_m^s , k_c^s et θ de façon automatique afin de réduire l'écart entre les deux modèles (voir les cas tests du paragraphe 5.3.3).

5.2 Inversion des flux g et des coefficients de diffusion k_m , k_c par calages des données paléo-bathymétriques aux puits

Le modèle stationnaire intégrant les données en épaisseurs Δh^d de la séquence par calcul direct de l'accommodation en fin de séquence A^T , il reste, dans le cas mono-lithologique, à inverser les flux g et les coefficients de diffusion en intégrant les données paléo-bathymétriques aux puits.

L'intérêt du cas mono-lithologique stationnaire est que ce problème de calage des plages paléo-bathymétriques aux puits se ramène à un ensemble de contraintes linéaires sur les paramètres moyennant une paramétrisation ad hoc des flux.

Soit $\mathcal{G} = \{g_l, l = 1, \dots, n_g\}$ une famille libre de fonctions positives sur le bord du domaine Ω . Pour $l = 1, \dots, n_g - 1$, on note

$$\tilde{g}_l = g_l - \frac{\int_{\partial\Omega} g_l(x) d\sigma}{\int_{\partial\Omega} g_{n_g}(x) d\sigma} g_{n_g}.$$

Le sous ensemble affine des fonctions flux engendrées par la famille \mathcal{G} et satisfaisant la condition de compatibilité se décompose sous la forme

$$g = \sum_{l=1}^{n_g-1} \beta_l \tilde{g}_l - \frac{\int_{\Omega} \frac{\Delta h^d}{T} dx}{\int_{\partial\Omega} g_{n_g}(x) d\sigma} g_{n_g}.$$

Soient les fonctions $\tilde{\phi}_l$ pour $l = 1, \dots, n_g - 1$ telles que

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{\phi}_l & = 0 & \text{sur } \Omega, \\ \nabla \tilde{\phi}_l \cdot n_x & = \tilde{g}_l & \text{sur } \partial\Omega, \\ \int_{\Omega} \tilde{\phi}_l(x) dx & = 0, \end{cases}$$

et la fonction $\bar{\phi}$ telle que

$$\begin{cases} -\Delta \bar{\phi} & = \frac{\Delta h^d}{T} & \text{sur } \Omega, \\ \nabla \bar{\phi} \cdot n_x & = -\frac{\int_{\Omega} \frac{\Delta h^d}{T} dx}{\int_{\partial\Omega} g_{n_g}(x) d\sigma} g_{n_g} & \text{sur } \partial\Omega, \\ \int_{\Omega} \bar{\phi}(x) dx & = 0. \end{cases}$$

Alors l'ensemble des solutions b^T du modèle stationnaire (sans imposer de bathymétrie de contrôle) vérifie

$$\psi(b^T) = \sum_{l=1}^{n_g-1} \beta_l \tilde{\phi}_l + \bar{\phi} + \alpha$$

où α est une constante.

On considère les puits $x_p, p \in \mathcal{P}$ auxquels on associe pour la séquence considérée un faciès moyen f_p dans l'ensemble $F = \{1, \dots, n_f\}$ des faciès ordonnés par bathymétries croissantes. On notera $I_f = [c_f, d_f]$ la plage paléo-bathymétrique du faciès f . Ces plages vérifient les propriétés suivantes: (i) les bornes c_f et d_f sont des fonctions croissantes de f et (ii) si $f_1 \neq f_2$ alors $I = I_{f_1} \cap I_{f_2} \subset [0, +\infty[$ ou $I \subset]-\infty, 0]$ ou $I = \emptyset$.

Pour tout $p \in \mathcal{P}$, soit $R_p = \{q \in \mathcal{P} / f_q = f_p + 1, \text{mes}(I_{f_p} \cap I_{f_q}) \neq 0\}$, alors les contraintes paléo-bathymétriques aux puits s'écrivent

$$\text{Pour tout } p \in \mathcal{P}, b^T(x_p) \in I_{f_p} \text{ et } b^T(x_p) \leq b^T(x_q) \text{ pour tout } q \in R_p.$$

Sous les hypothèses (i) et (ii), on voit facilement qu'elles se ramènent à des contraintes linéaires sur les $n_g + 2$ paramètres $\Theta = (\beta_l, l = 1, \dots, n_g - 1, k_m, k_c, \alpha)$ auxquelles ont rajoute des contraintes de signe sur les $\beta_l, l = 1, \dots, n_g$ (flux entrants ou sortants) et les contraintes $0 \leq k_m \leq k_c$.

Ces contraintes définissent le polyèdre convexe des paramètres Θ admissibles que l'on peut explorer par des coupes. A noter que la contrainte $k_m \leq k_c$ est la seule qui couple les paramètres k_m et k_c .

Le modèle stationnaire mono-lithologique permet donc d'étudier efficacement et de façon complète l'ensemble des paramètres et des solutions admissibles vérifiant les données de puits (voir les références [FTX] et [P88] pour l'étude de domaines admissibles polyédriques convexes)

La méthode s'étend facilement à l'inversion des épaisseurs érodée en décomposant ces épaisseurs Δh^d dans une base de fonctions locales à la zone érodée.

Enfin, il est bien sûr possible de réduire le domaine admissible en rajoutant des contraintes de façon à éliminer des solutions non physiquement admissibles ou encore de sélectionner des solutions dans le domaine admissible en rajoutant des données à exploiter sous la forme de critère de minimisation.

Exemple synthétique: on reprend quelques figures des résultats du stage de Jean Marie Laigle [JML04]. On considère le bassin $(0, l_x) \times (0, l_y)$ avec deux sources sur les côtés $x = 0$ et $y = l_y$. La solution de référence admissible est obtenue pour le jeu de paramètres $\beta_1 = 0.7$, $\alpha = 0$, $k_m = 80$, $k_c = 1000$ de façon à couvrir tous les faciès définis par les plages bathymétriques suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{faciès 1 (continental)} : & [-200, -20] \\ \text{faciès 2 (plaine cotière)} : & [-22, 5] \\ \text{faciès 3 (shoreface)} : & [1, 50] \\ \text{faciès 4 (offshore)} : & [45, 80] \\ \text{faciès 1 (offshore profond)} : & [75, 400] \end{array} \right.$$

sur l'ensemble des 7 puits fixés dans ce cas test.

La recherche du domaine admissible dans l'espace des quatre paramètres $\{\beta_1, \alpha, k_m, k_c\}$ se ramène la recherche de deux polygones dans les espaces à trois paramètres $\{\beta_1, \alpha, k_m\}$ et

$\{\beta_1, \alpha, k_c\}$ en ne prenant pas en compte la contrainte $k_m \leq k_c$ qui est triviale et est la seule à coupler les paramètres k_m et k_c .

Ces deux polygones sont tracés sur les figures (17) et (18).

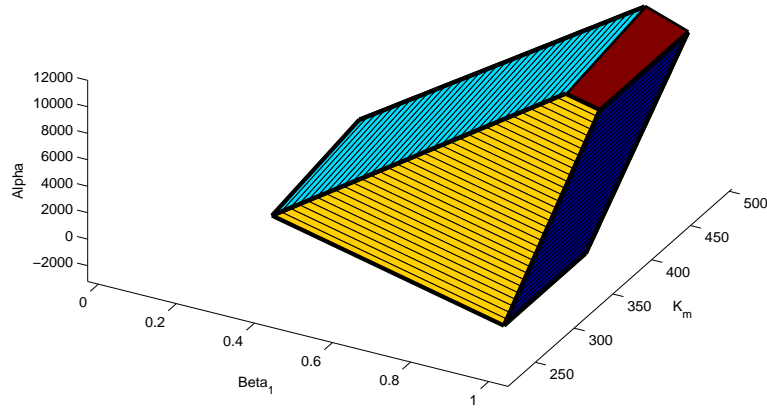


Figure 17: Ensemble admissible $\{\beta_1, k_m, \alpha\}$

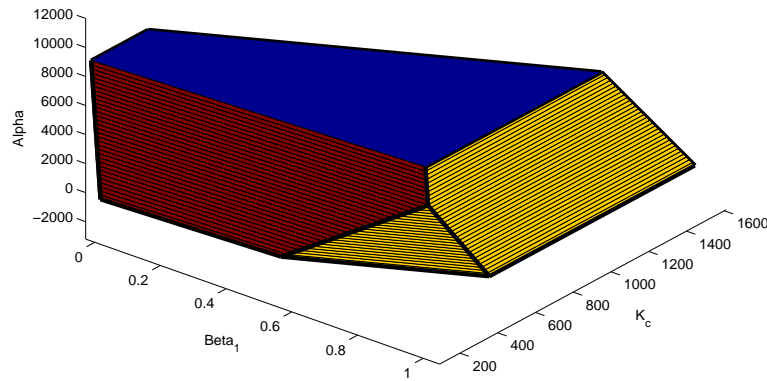


Figure 18: Ensemble admissible $\{\beta_1, k_c, \alpha\}$

La figure (19) représente les surfaces bathymétriques moyenne, maximale et minimale obtenues en effectuant un tirage aléatoire dans le domaine admissible à $\alpha = 0$ fixé.

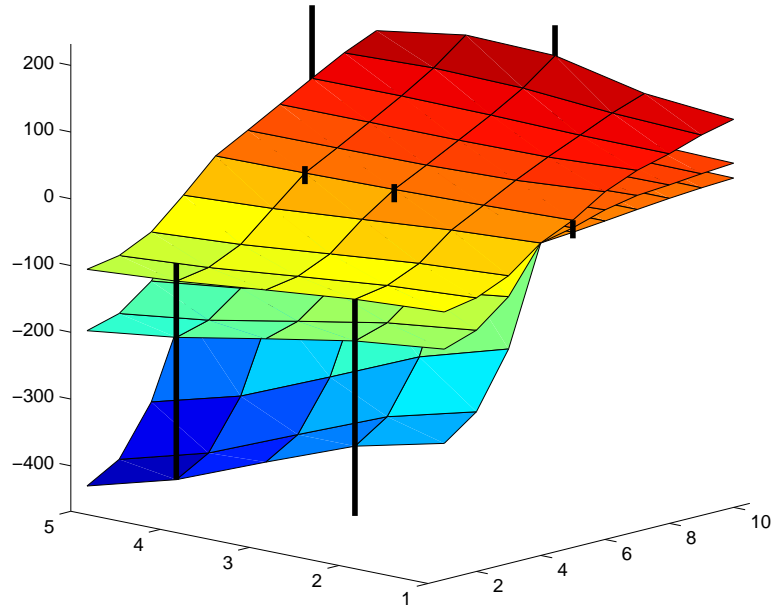


Figure 19: Bathymétrie moyenne et enveloppe des bathymétries minimale et maximale à $\alpha = 0$ fixé. Les 7 puits sont marqués par les traits verticaux.

5.3 Modèle stationnaire multi-lithologique [18], [20]

Le modèle stationnaire s'obtient en substituant l'épaisseur de sédiments h interpolée linéairement en temps (62) dans le système d'EDPs multi-lithologique (sans contrainte sur le taux d'érosion) (35).

On suppose les hypothèses suivantes vérifiées pour chaque séquence.

Hypothèse 5.1 - *Le coefficient de diffusion de chaque lithologie $i = 1, \dots, L$ est indépendant du temps sur la séquence et s'écrit sous la forme $k_i(b) = r_i k(b)$ où r_i est une constante strictement positive. On notera $\psi = \int_0^b k(s) ds$, typiquement définie par les coefficients de diffusion marin k_m et continental k_c par (63).*

- *En cas d'érosion, on suppose que l'on érode au plus l'épaisseur d'une seule des couches précédentes le long de chaque verticale et que la concentration initiale du bassin ne dépend que de x .*

- *Les flux fractionnaires μ_i^e , $i = 1, \dots, L$ et les flux totaux g ne dépendent pas du temps sur la séquence. On notera $\partial\Omega_-$ l'ensemble $\{x \in \partial\Omega / g(x) < 0\}$. Les flux totaux sont compatibles avec les épaisseurs de sédiment de la séquence au sens où*

$$\int_{\Omega} \frac{\Delta h^d}{T} dx + \int_{\partial\Omega} g d\sigma = 0.$$

Moyennant les hypothèses (5.1), on montre que le système d'EDPs (35) se résout dans les variables b et c_i^s , $i = 1, \dots, L$, que les concentrations c_i^s , $i = 1, \dots, L$ sont indépendantes du temps, et que la bathymétrie est telle que

$$\psi(b(x, t)) = \phi(x) + \alpha(t), \quad (x, t) \in \Omega \times (0, T),$$

où α est une fonction arbitraire. De plus les concentrations notées c_i , $i = 1, \dots, L$ au sommet du bassin ne dépendent pas du temps sur la séquence $(0, T)$.

Les fonctions ϕ , c_i^s , c_i , $i = 1, \dots, L$ sont solutions du système d'EDPs posé sur le domaine Ω suivant où ϕ est définie à une constante près.

Etant donnés	$\psi, g, c_i^0, r_i, \mu_i^e$, pour tout $i = 1, \dots, L$	
trouver	ϕ, c_i, c_i^s pour tout $i = 1, \dots, L$	
tels que	$ \begin{aligned} -\operatorname{div}\left(c_i^s r_i \nabla \phi\right) &= c_i \frac{\Delta h^d}{T} && \text{sur } \Omega, \\ \sum_{i=1}^L c_i^s &= 1 && \text{sur } \Omega, \\ \mu_i^s := \frac{r_i c_i^s}{\sum_{j=1}^L r_j c_j^s} &= \mu_i^e && \text{sur } \partial\Omega_-, \\ \sum_{j=1}^L c_j^s r_j \nabla \phi \cdot n_x &= g && \text{sur } \partial\Omega, \\ c_i &= \begin{cases} c_i^s & \text{si } \Delta h^d > 0 \\ c_i^0 & \text{si } \Delta h^d \leq 0 \end{cases} && \text{sur } \Omega \end{aligned} $	(68)

Dans ce système, les concentrations c_i^0 , $i = 1, \dots, L$ sont les concentrations de la couche immédiatement inférieure à la séquence étudiée, elles ne dépendent que de x d'après les hypothèses (5.1).

Comme dans le cas mono-lithologique, on ne s'intéressera en pratique qu'à la bathymétrie en fin de séquence b^T , à l'accommodation $A^T = b^T + \Delta h^d$ et aux concentrations c_i , $i = 1, \dots, L$ qui s'interprètent comme les concentrations moyennes de la couche en cas de sédimentation et les concentrations moyennes de la couche précédente en cas d'érosion. La bathymétrie et l'accommodation en fin de séquence sont définies de façon unique par l'imposition d'une bathymétrie de contrôle b_p comme dans le cas mono-lithologique.

5.3.1 Exemples de solutions en 1D

On définit le flux fractionnaires

$$\mu_i^s = \frac{r_i c_i^s}{\sum_{j=1}^L r_j c_j^s}$$

les flux partiels $f_i = c_i^s r_i \partial_x \phi$ et le flux total $f = \sum_{i=1}^L f_i = \mu_i^s f$.

On considère le domaine $\Omega = (0, L_b)$ et les flux totaux aux bords $g_0 \in \mathbb{R}$ en $x = 0$, $g_{L_b} \in \mathbb{R}$ en $x = L_b$. Si $g_0 > 0$ on se donne de plus les flux fractionnaires $\mu_{i,0} \geq 0$, $i = 1, \dots, L$ tels que $\sum_{i=1}^L \mu_{i,0} = 1$, de même si $g_{L_b} < 0$ on se donne les flux fractionnaires $\mu_{i,L_b} \geq 0$, $i = 1, \dots, L$ tels que $\sum_{i=1}^L \mu_{i,L_b} = 1$.

On notera $v = \frac{\Delta h^d}{T}$ et on supposera que $v \in C^0[0, L_b]$.

On cherche des solutions $c_i^s \in L^\infty(0, L_b)$, $\phi \in W^{1,\infty}(0, L_b)$ telles que

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dx}(\mu_i^s f) = -c_i v, \quad \text{pour } i = 1, \dots, L \\ f = \sum_{i=1}^L c_i^s r_i \frac{d\phi}{dx}, \\ \sum_{i=1}^L c_i^s = 1, \\ f|_{x=0} = g_0, \\ f|_{x=L_b} = g_{L_b}, \\ \mu_i^s|_{x=0} = \mu_{i,0} \quad \text{si } g_0 > 0, i = 1, \dots, L \\ \mu_i^s|_{x=L_b} = \mu_{i,L_b} \quad \text{si } g_{L_b} > 0, i = 1, \dots, L \end{array} \right.$$

avec

$$c_i = \begin{cases} c_i^s \text{ si } v > 0, \\ c_i^0 \geq 0, \sum_{j=1}^L c_j^0 = 1, \text{ donnée dans } L^\infty \text{ sinon} \end{cases}$$

On supposera que la condition de compatibilité $\int_0^{L_b} v(x)dx + g_{L_b} - g_0 = 0$ est vérifiée.

On déduit facilement du système d'équation que

$$f = - \int_0^x v(s)ds + g_0 \in C^1[0, L_b]$$

et que les flux partiels $f_i = \mu_i^s f$ sont dans $W^{1,\infty}(0, L_b)$ donc continus.

Le flux f étant connu, on intègre le système

$$(\mu_i^s f)' = c_i f', \quad i = 1, \dots, L,$$

compte tenu des conditions limites entrantes. On montrera ci dessous l'existence d'une unique solution positive pour c_i et $\mu_i^s f$, $i = 1, \dots, L$. Une fois ces intégrations effectuées, la fonction ϕ est donnée par l'intégrale

$$\phi(x) = \int_0^x \frac{f(y)}{\sum_{i=1}^L r_i c_i^s(y)} dy + \alpha,$$

la constante α est déterminée par la bathymétrie de contrôle b_p , et la bathymétrie en fin de séquence est donnée par

$$b^T = \psi^{-1}(\phi).$$

Exemple d'un clinoforme avec $L = 2$, $v > 0$ et $g_{L_b} = 0$, $g_0 > 0$

Dans ce cas le système se réduit à

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x) = \int_x^{L_b} v(s)ds < 0 \quad \text{sur } (0, L_b), \\ \frac{\mu'}{c(\mu) - \mu} = \frac{f'}{f} \quad \text{sur } (0, L_b), \\ \mu|_{x=0} = \mu_0, \end{array} \right.$$

avec $\mu = \mu_1^s$ et $c_1^s = c(\mu) = \frac{\frac{1}{r_1}\mu}{\frac{1}{r_1}\mu + \frac{1}{r_2}(1-\mu)}$. Si $r_1 = r_2$ alors $c_1^s = \mu_0$, et si $r_1 \neq r_2$, μ est solution de l'équation implicite

$$\frac{\mu^{r_1}}{(1-\mu)^{r_2}} = \frac{\mu_0^{r_1}}{(1-\mu_0)^{r_2}} \left(\frac{f}{f(0)} \right)^{r_2-r_1},$$

qui admet une solution unique telle que $\mu \in [0, 1]$ qui est dans $C^1([0, L_b])$.

5.3.2 Etude du cas général 1D

On découpe l'intervalle $(0, L_b)$ en intervalles ouverts notés \mathcal{O} tel que ni f ni f' ne s'annulent sur cet intervalle. L'intégration du système s'effectue dans un premier temps sur chaque intervalle \mathcal{O} où l'on montrera l'existence et l'unicité d'une solution positive $(c_i)_{i=1, \dots, L}$ dans $L^\infty(\mathcal{O})$. La solution se construit alors sur l'intervalle $(0, L_b)$ en descendant les pentes à partir des points hauts et en écrivant les conditions limites entrantes ainsi que le raccord continu de μ_i^s , $i = 1, \dots, L$ aux extrémités des intervalles \mathcal{O} où f ne s'annule pas.

Pour l'intégration du système

$$\begin{cases} (\mu_i^s f)' = c_i f' & \text{pour } i = 1, \dots, L, \\ \sum_{i=1}^L \mu_i^s = 1, \end{cases}$$

sur l'intervalle \mathcal{O} , il suffit de considérer trois cas de figure, les autres s'en déduisent par symétrie $x \rightarrow -x$.

Cas (0) $f = f' = 0$ sur \mathcal{O} : dans ce cas la solution $(\mu_i^s)_{i=1, \dots, L}$ est bien sûr indéterminée mais $c_i = c_i^0$, et $\mu_i^s f = 0$, $i = 1, \dots, L$.

Cas (1) sédimentation $f > 0$ et $v = -f' > 0$ sur \mathcal{O} ,

Cas (2) érosion $f > 0$ et $v = -f' < 0$ sur \mathcal{O} .

Cas (1): Soit $\mathcal{O} = (a_0, a_1)$, on a en $x = a_0$, $f(a_0) > 0$ et $f'(a_0) = 0$ ou $f'(a_0) < 0$ et $a_0 = 0$, et en $x = a_1$, $f'(a_1) \leq 0$ et $f(a_1) = 0$ ou $f(a_1) > 0$ et $a_1 = L_b$. Le flux total f étant non nul en $x = a_0$, les flux fractionnaires μ_i^s sont continus en ce point et on peut noter $\mu_i^s(a_0) = \mu_{i, a_0}$, $i = 1, \dots, L$.

En utilisant les invariants du système en mode sédimentation (voir la thèse de Véronique Gervais [VG04]), on montre que le système s'écrit

$$\begin{cases} \frac{d}{dx} \left[\frac{(\mu_i^s f)^{r_i \max_{l=1, \dots, L} \frac{1}{r_l}}}{\sum_{j=1}^L (\mu_j^s f)^{r_j \max_{l=1, \dots, L} \frac{1}{r_l}}} \right] = 0 & \text{pour } i = 1, \dots, L, \\ \sum_{i=1}^L \mu_i^s = 1, \\ \mu_i^s(a_0) = \mu_{i, a_0} & \text{pour } i = 1, \dots, L. \end{cases} \quad (69)$$

Soit $I_L = \{1, \dots, L\}$, on définit l'ensemble I des lithologies présentes sur l'intervalle \mathcal{O}

$$I = \{i \in I_L / \mu_{i,a_0} > 0\}.$$

D'après (69) on a alors nécessairement $\mu_i^s > 0$ sur \mathcal{O} .

Soient $r_{i_M} = \max_{i \in I} r_i$, $I_M = \{i \in I / r_i = r_{i_M}\}$, $i_M \in I_M$, alors l'intégration du système (69) conduit à $\mu_i^s = 0$ pour tout $i \in I_L/I$ et au système implicite $F(\mu^s(x), x) = 0$ sur \mathcal{O} où μ^s est le vecteur $(\mu_i^s)_{i \in I}$ et $F = (F_i)_{i \in I} : (\mathbb{R}_*^+)^{\#I} \times [a_0, a_1] \rightarrow \mathbb{R}^{\#I}$ l'application telle que $F_{i_M}(\mu^s, x) = \sum_{i \in I} \mu_i^s - 1$, et pour $i \in I/\{i_M\}$

$$F_i(\mu^s, x) = \frac{(\mu_i^s)^{\alpha_i}}{\mu_{i_M}^s} - \frac{(\mu_{i,a_0})^{\alpha_i}}{\mu_{i_M,a_0}} \left(\frac{f(x)}{f(a_0)} \right)^{1-\alpha_i},$$

où $0 < \alpha_i = \frac{r_i}{r_{i_M}} \leq 1$. On vérifie que F est C^1 et que la jacobienne $\partial_{\mu^s} F$ est non singulière quel que soit $(\mu^s, x) \in (\mathbb{R}_*^+)^{\#I} \times [a_0, a_1]$. D'autre part $F(\mu^s(a_0), a_0) = 0$, donc le théorème des fonctions implicites donne l'existence et l'unicité de la solution $\mu_i^s \in C^1([a_0, a_1])$ pour tout $i \in I_L$ du système (69).

Limite en $x = a_1$ pour $f(a_1) = 0$: μ_i^s admet la limite à gauche en $x = a_1$ égale à $\mu_i^s(a_1^-) = 0$ pour tout $i \notin I_M$ et à $\mu_i^s(a_1^-) = \frac{\mu_{i,a_0}}{\sum_{j \in I_M} \mu_{j,a_0}}$ pour tout $i \in I_M$. Il y aura donc continuité de la solution aux points bas (points tels que f s'annule en changeant de signe et en décroissant) si de part et d'autre du point bas on a le même ensemble de lithologies les plus diffusives présentes I_M avec les mêmes fractions $\frac{\mu_{i,a_0}}{\sum_{j \in I_M} \mu_{j,a_0}}$, $i \in I_M$.

Cas des lithologies ayant le même coefficient de diffusion: soit $\tilde{I} \subset I$ un ensemble de lithologies présentes ayant même coefficient de diffusion. Alors leur fraction lithologique est invariante au sens où $\frac{c_i^s(x)}{\sum_{j \in \tilde{I}} c_j^s(x)} = \frac{\mu_{i,a_0}}{\sum_{j \in \tilde{I}} \mu_{j,a_0}}$ pour $i \in \tilde{I}$ sur \mathcal{O} .

Variation des flux fractionnaires μ_i^s des lithologies I_M : on déduit facilement de $f > 0$ et $f' > 0$ et de l'équation $(f\mu_i^s)' = c_i^s f'$ que les flux fractionnaires μ_i^s sont croissants strictement sur \mathcal{O} pour tout $i \in I_M$.

Cas (2): le système $(f\mu_i^s)' = c_i^0 f'$, $i \in I_L$ sur \mathcal{O} s'intègre directement conduisant à la solution

$$\mu_i^s(x) = \frac{\int_{a_0}^x c_i^0(s) f'(s) ds + \mu_{i,0} f(a_0)}{f(x)}$$

pour tout $x \in (a_0, a_1]$ et $i \in I_L$. Elle est continue en $x = a_0$ si $f(a_0) > 0$. Dans le cas d'un point haut a_0 pour lequel $f(a_0) = 0$ et f change de signe en décroissant, la solution est continue si c_i^0 l'est aussi en $x = a_0$.

5.3.3 Comparaison au modèle instationnaire

On définit un cas test synthétique par une simulation du modèle instationnaire direct. Le système d'unité utilisé ci-dessous est 100 km pour x et y , 1 m pour z , 1 Ma pour t , $0.1 \text{ km}^2/\text{Ma}$ pour les flux g et $10 \text{ km}^2/\text{Ka}$ pour les coefficients de diffusion.

Le domaine Ω est le rectangle $(0, L_x) \times (0, L_y)$ avec $L_x = 1$, $L_y = .5$ et la durée de simulation égale à $T = 10$, L'accommodation varie linéairement en temps entre sa valeur en fin de séquence

$$A^T = 400 * (1 - \cos(\pi(x + y)))$$

et celle en début de séquence

$$A^0 = b^0 = 50 * (1 - \cos(\pi(x + y)))$$

avec par convention $h^0 = 0$.

Les apports à la frontière $\partial\Omega$ sont donnés par les flux entrants $g = -15./2$ sur le bord $y = L_y$ et $g = -15$ sur le bord $x = 0$ et des flux nuls sur les deux autres bords. On considère deux lithologies $L = 2$ avec les flux fractionnaires entrants égaux à .5 sur les deux bords entrants.

Pour deux jeux des coefficients de diffusion $k_{1,c}$, $r = \frac{k_{1,c}}{k_{1,m}} = \frac{k_{2,c}}{k_{2,m}}$, $r_{12} = \frac{k_{1,c}}{k_{2,c}} = \frac{k_{1,m}}{k_{2,m}}$, on compare ensuite la bathymétrie en fin de séquence et la concentration moyenne c_1 de la couche aux solutions obtenues par le modèle stationnaire. Les résultats sont présentés sur les figures (20) et (21). Pour ces cas tests, les paramètres du modèle stationnaire obtenus automatiquement par des heuristiques reposant sur l'analyse du cas linéaire sont les suivants:

$\theta = 0.687$, $r^s = 15.45$, $k_{1,m}^s = 4.105 \cdot 10^{-3}$, $k_{1,c}^s = 6.344 \cdot 10^{-2}$, $r_{12}^s = r_{12}$ dans le premier cas, et $\theta = 0.56437$, $r^s = 172$, $k_{1,m}^s = 4.487 \cdot 10^{-4}$, $k_{1,c}^s = 7.727 \cdot 10^{-2}$, $r_{12}^s = r_{12}$ dans le second.

Les cartes de concentrations des modèles stationnaires sont identiques quelque soit la valeur de θ dans la mesure où elles ne dépendent que du paramètre r_{12}^s pris égal à r_{12} .

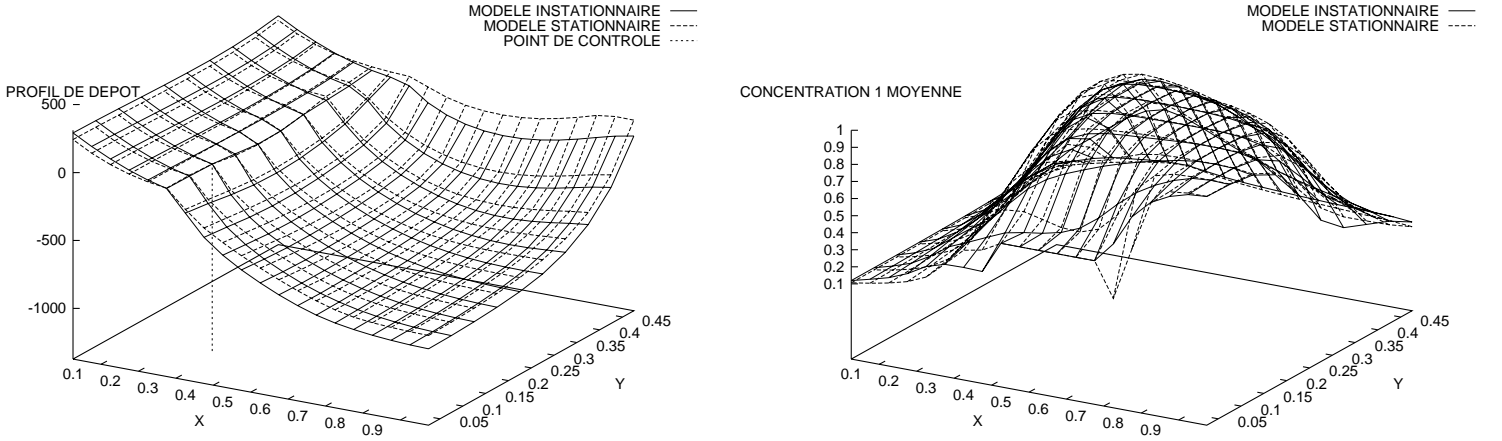


Figure 20: Cas test avec $k_{1,c} = 5. \cdot 10^{-2}$, $r = \frac{k_{1,c}}{k_{1,m}} = \frac{k_{2,c}}{k_{2,m}} = 10$, $r_{12} = \frac{k_{1,c}}{k_{2,c}} = \frac{k_{1,m}}{k_{2,m}} = .1$

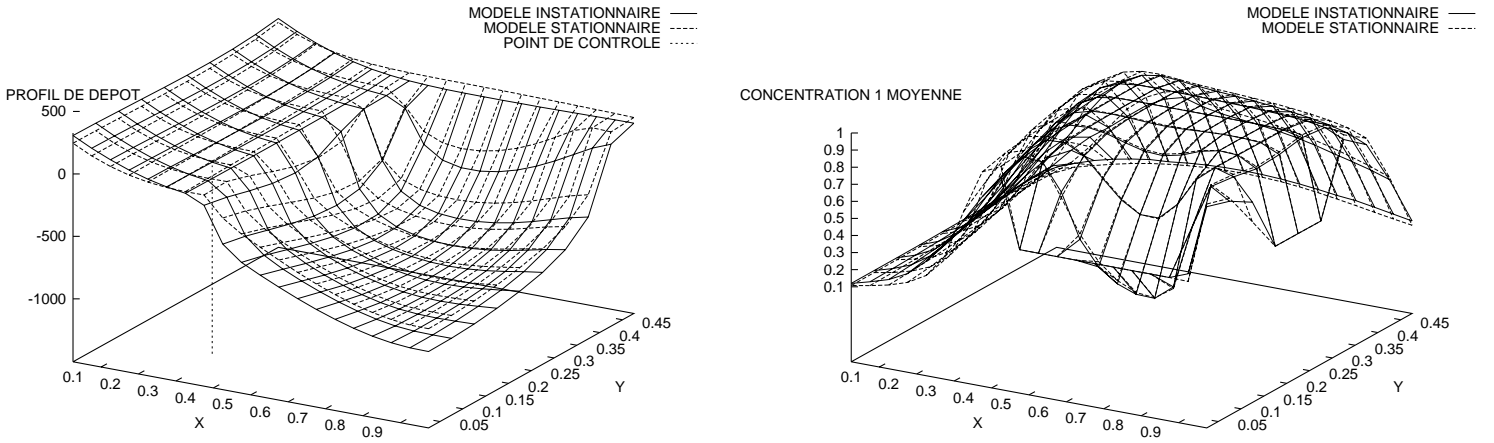


Figure 21: Cas test avec $k_{1,c} = 5 \cdot 10^{-2}$, $r = \frac{k_{1,c}}{k_{1,m}} = \frac{k_{2,c}}{k_{2,m}} = 100$, $r_{12} = \frac{k_{1,c}}{k_{2,c}} = \frac{k_{1,m}}{k_{2,m}} = .1$

5.4 Calage des épaisseurs pour le modèle multi-lithologique instationnaire [19], [2]

L'hypothèse du modèle stationnaire de profil de vitesse de sédimentation/érosion constant le long des verticales de la couche considérée est invalide dans la zone d'avancée où de recul de la ligne de côte lors des phases de pragradaion/rétrogradaion liées aux variations eustatiques.

Pour y remédier, on propose d'obtenir un modèle de vitesse de la séquence $v(x, t) = \partial_t h(x, t)$ dépendant du temps qui sera ensuite utilisé dans un modèle de type "stationnaire" enrichi. Au niveau de la discrétisation en temps cela reviendra à découper la séquence en sous séquences et à utiliser le modèle stationnaire sur chaque sous séquence.

Le modèle de vitesse $v(x, t) = \partial_t h(x, t)$ est obtenu en résolvant le problème inverse (67) écrit pour le cas mono-lithologique et qui se formule de la même façon dans le cas multi-lithologique. On note $h^T(A^T)$ la fonctionnelle calculant les épaisseurs de sédiments en fin de séquence du modèle multi-lithologique (35) sans contrainte sur le taux d'érosion connaissant l'accommodation en fin de séquence (l'ensemble des autres paramètres du modèle étant donnés).

5.4.1 Analyse dans le cas mono-lithologique

Il s'agit donc de résoudre le problème inverse non linéaire

$$\begin{cases} h^T(A^T) & = \Delta h^d, \\ \frac{1}{|\omega_p|} \int_{\omega_p} (A^T - \Delta h^d) dx & = b_p. \end{cases}$$

Dans le cas mono-lithologique linéaire, en se plaçant dans la base spectrale de l'opérateur $-\Delta$ Neumann sur le domaine Ω , on montre que ce problème est bien posé dans les normes H^1 et L^2 . Dans le cas mono-lithologique non linéaire, on peut aussi montrer l'existence d'une solution stable en norme L^2 à ce problème par un point fixe de Schauder (voir [2]). Au niveau

du problème discrétisé par le schéma volume fini du paragraphe 4.2, on constate en pratique l'existence d'une solution a priori unique dans le cas général multi-lithologique sans contrainte sans pour le moment avoir de preuve ni de l'existence ni de l'unicité dans ce cas général.

5.4.2 Algorithmes d'inversion

L'objectif de ce paragraphe est de présenter des algorithmes de résolution robuste et efficace de ce problème inverse dans le cas multi-lithologique sans contrainte. La difficulté est liée au caractère très mal conditionné du problème inverse lorsque les coefficients de diffusion sont petits (ce qui est le cas en pratique dans le domaine marin) et au caractère très non linéaire du modèle direct pour des ratios des coefficients de diffusion des lithologies et marin/continental très éloignés de la valeur 1.

La procédure classique utilisée par les géologues est un point fixe: partant d'une estimation initiale de l'accommodation A_0^T vérifiant la condition de fermeture $\frac{1}{|\omega_p|} \int_{\omega_p} (A^T - \Delta h^d) dx = b_p$, on calcule les estimations successives suivantes

$$A_{l+1}^T = A_l^T + \left(\Delta h^d - h^T(A_l^T) \right) + C$$

où la constante C est calculée de façon à vérifier la condition de fermeture à chaque itérée. Cet algorithme revient à négliger les variations de la bathymétrie en fin de séquence notée b^T en fonction de A^T et donc à corriger l'accommodation par le résidu sur l'épaisseur. L'algorithme converge bien pour les grands coefficients de diffusion, mais la convergence se dégrade très vite pour des petits coefficients de diffusion comme le montre l'analyse du taux de convergence dans le cas mono-lithologique linéaire égal à $\rho = \frac{1 - e^{-k\omega_1 T}}{k\omega_1 T}$ en normes L^2 et H^1/\mathbb{R} avec $\omega_1 \sim \frac{1}{|\Omega|}$.

Une autre approche consiste à formuler le problème comme un problème de minimisation de la fonction coût moindres carrés. La Jacobienne de $h^T(A^T)$ étant une matrice pleine très chère à calculer (en $\mathcal{O}(\#\mathcal{K}^2)$) il est naturel d'utiliser un algorithme BFGS pour minimiser cette fonctionnelle. Néanmoins, les expériences numériques montrent que cet algorithme converge très mal pour des ratios des coefficients de diffusion marin/continental inférieurs à 0.1.

L'idée que nous avons suivie est donc plutôt d'exploiter le modèle stationnaire comme inverse approché dans deux types d'algorithmes. Un algorithme de Quasi Newton utilisant le modèle stationnaire tangent comme Jacobienne inverse approchée, ou des algorithmes de type Newton Krylov (cf. [BS90], [BS94]) utilisant un solveur linéaire GMRES préconditionné par le modèle stationnaire tangent.

Du fait des mauvais conditionnements de la Jacobienne pour les très petits coefficients de diffusion, la globalisation par recherche linéaire de l'algorithme de Newton Krylov s'avère manquer de robustesse pour des ratios des coefficients de diffusion importants surtout dans le cas multi-lithologique. Pour gagner en robustesse on propose une approche de type région de confiance Dogleg combinant la direction de Newton avec celle du gradient obtenue par l'état adjoint du modèle multi-lithologique.

Algorithme de Quasi Newton

On suppose pour simplifier que g et μ_i^e sont indépendants du temps. Dans le cas contraire, il nous faudrait calculer pour le modèle stationnaire une valeur moyenne sur la séquence $(0, T)$.

On se donne des coefficients de diffusion $k_m, k_c, r_i, i = 1, \dots, L$ et la fonction

$$\psi(b) = \begin{cases} k_m b & \text{si } b > 0 \\ k_c b & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour simplifier la présentation on prendra les mêmes coefficients de diffusion pour le modèle stationnaire et le modèle instationnaire.

Initialisation: calcul de A_0^T tel que

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}\left(r_i d_i^s \nabla \phi\right) = d_i \frac{\Delta h^d(x)}{T} & \text{sur } \Omega, \\ \sum_{i=1}^L d_i^s = 1 & \text{sur } \Omega, \\ \frac{r_i d_i^s}{\sum_{j=1}^L r_j d_j^s} = \mu_i^e & \text{sur } \partial\Omega_-, \\ \sum_{j=1}^L r_j d_j^s \nabla \phi \cdot n_x = g & \text{sur } \partial\Omega, \\ d_i = \begin{cases} d_i^s & \text{si } \Delta h^d > 0 \\ \frac{1}{\Delta h^d(x)} \int_0^{\Delta h^d(x)} c_i^0(x, \zeta) d\zeta & \text{sinon} \end{cases} & \text{sur } \Omega, \\ A_0^T = \psi^{-1}(\phi) + \Delta h^d & \text{sur } \Omega, \\ \frac{1}{|\omega_p|} \int_{\omega_p} (A_0^T(x) - \Delta h^d(x)) dx = b_p. & \end{array} \right.$$

Boucle tant que $\|R_l\| \geq \epsilon$ calcul du résidu R_l tel que

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Equations sur } \Omega \times (0, T) & \\ c_i|_{\zeta=h} \partial_t h - \operatorname{div}(c_i^s r_i \nabla \psi(b)) = 0 & \text{sur } \Omega \times (0, T), \\ \sum_{j=1}^L c_j^s = 1 & \text{sur } \Omega \times (0, T), \\ \frac{r_i c_i^s}{\sum_{j=1}^L r_j c_j^s} = \mu_i^e & \text{sur } \partial\Omega_- \times (0, T), \\ \sum_{j=1}^L c_j^s r_j \nabla \psi(b) \cdot n_x = g & \text{sur } \partial\Omega \times (0, T), \\ h|_{t=0} = 0 & \text{sur } \Omega, \\ \text{Equations sur } \mathcal{B} = \{(x, \zeta, t), \zeta < h(x, t), x \in \Omega, t \in (0, T)\} & \\ \partial_t c_i = 0 & \text{sur } \mathcal{B}, \\ c_i|_{\zeta=h} = c_i^s & \text{pour } \partial_t h > 0, \\ c_i|_{t=0} = c_i^0 & \text{pour } \zeta < h^0(x), x \in \Omega, \\ \text{Relation bathymétrie-accommodation-épaisseur} & \\ b = \frac{t}{T}(A_{l-1}^T - A^0) + A^0 - h & \text{sur } \Omega \times (0, T). \end{array} \right.$$

$$\text{Epaisseurs: } \Delta h_l = h|_{t=T},$$

$$\text{Résidu: } R_l = \Delta h^d - \Delta h_l,$$

$$\text{Bathymétrie finale: } b_l^T = b|_{t=T},$$

$$\text{Concentrations de surface finales: } c_{i,l}^s = c_i^s|_{t=T},$$

$$\text{Concentrations de sommet: } c_{i,l} = \begin{cases} c_{i,l}^s & \text{si } \Delta h_l > 0, \\ \frac{1}{\Delta h_l} \int_0^{\Delta h_l(x)} c_i(x, \zeta, T) d\zeta & \text{sinon.} \end{cases}$$

Préconditionnement: calcul de δA tel que

$$\left\{ \begin{array}{ll} -\operatorname{div}\left(r_i \delta d_i^s \nabla \psi(b_l^T) + c_{i,l}^s \nabla \delta \phi\right) = \frac{R_l}{T} c_{i,l} + \frac{\Delta h_l}{T} \delta d_i & \text{sur } \Omega, \\ \sum_{j=1}^L \delta d_j^s = 0 & \text{sur } \Omega, \\ \delta\left(\frac{r_i d_i^s}{\sum_{j=1}^L r_j d_j^s}\right) = 0 & \text{sur } \partial\Omega_-, \\ \sum_{j=1}^L r_j \left(\delta d_j^s \nabla \psi(b_l^T) + c_{i,l}^s \nabla \delta \phi\right) \cdot n_x = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \sum_{j=1}^L r_j c_{i,l}^s \nabla \psi(b_l^T) = g & \text{sur } \partial\Omega, \\ \delta d_i = \begin{cases} \delta d_i^s \text{ si } \Delta h_l > 0 \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} & \text{sur } \Omega, \\ \delta A = \frac{\delta \phi}{\frac{d\psi}{db}(b_l^T)} + R_l & \text{sur } \Omega, \\ \frac{1}{|\omega_p|} \int_{\omega_p} \delta A(x) dx = 0, & \end{array} \right.$$

Incrémentation:

$$A_l^T = A_{l-1}^T + \delta A$$

Pour plus de robustesse, l'algorithme peut être relaxé ou encore globalisé par une recherche linéaire le long de la direction δA pour la fonction de mérite égale à la norme L^2 du résidu. Néanmoins, l'expérience numérique dans le cas non linéaire montre que δA n'est pas toujours une direction de descente.

Taux de convergence de l'algorithme de Quasi Newton dans le cas linéaire mono-lithologique: on considère, pour le preconditionnement, un modèle stationnaire avec coefficient de diffusion k_S et on note k le coefficient de diffusion du modèle instationnaire et $\gamma = \frac{k_S}{k}$.

On se place dans la base spectrale $(u_i, \omega_i)_{i \geq 1}$ de l'opérateur $-\Delta$ Neumann. Soient $x_i = k\omega_i T$ et $\alpha(x) = \frac{1-e^{-x}}{x}$, on obtient que pour tout $i \geq 1$

$$|A_{l,i}^T - A_i^T| \leq \left|1 - \left(1 + \frac{1}{\gamma x_i}\right)(1 - \alpha(x_i))\right|^l |A_{0,i}^T - A_i^T|.$$

Le taux de convergence dans les normes L^2 et H^1 pour une valeur optimale de γ est égal à $\tau_0 = \min_{\gamma > 0} \max_{x > 0} \left|1 - \left(1 + \frac{1}{\gamma x}\right)(1 - \alpha(x))\right|$ avec $\tau_0 < 0.1$, valeur obtenue pour $\gamma \sim 0.55$, indépendamment des paramètres du modèle (coefficient de diffusion k , domaine Ω , durée de la séquence T).

Algorithme de Newton Krylov preconditionné

L'algorithme de Quasi Newton manque de robustesse dans les cas très non linéaires pour des ratios $\frac{k_m}{k_c} < 0.01$. On améliore cette robustesse par une sous relaxation adaptative ou par une recherche linéaire simplifiée. Néanmoins, pour mettre en oeuvre une véritable recherche linéaire il nous faut garantir d'obtenir une direction de descente δA de la norme L^2 du résidu.

Pour cela on résout à chaque itération l le système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h^T}{\partial A^T}(A_{l-1}^T) \delta A = R_l, \\ \frac{1}{|\omega_p|} \int_{\omega_p} \delta A(x) dx = 0, \end{array} \right.$$

donnant la direction du Newton par un GMRES préconditionné à droite par le modèle stationnaire tangent. Les tests numériques menés ont montré une excellente convergence du GMRES préconditionné même pour des ratios $\frac{k_m}{k_c}$ de 10^{-3} , valeur physique déjà extrême pour ce paramètre. Le produit matrice vecteur est en pratique calculé par différences finies ou par différenciation automatique du code direct.

Dans le cas mono-lithologique, cet algorithme améliore nettement la robustesse de la convergence, en revanche ce n'est pas le cas dans le cas multi-lithologique où la mise en oeuvre d'une véritable recherche linéaire conduit à des pas de descente tendant vers zéro pour des valeurs faibles du ratio $\frac{k_m}{k_c} < 0.01$.

Ceci est dû au conditionnement de la Jacobienne qui se dégrade pour des petits coefficients de diffusion conduisant à des pas de Newton trop grands et quasi orthogonaux à la direction du gradient loin de la solution. Pour traiter ces cas nous proposons d'utiliser une globalisation par l'algorithme de région de confiance de type Dogleg.

Newton Krylov avec globalisation par région de confiance de type Dogleg

Cet algorithme combine la direction du Newton calculée par le GMRES préconditionné et la direction du gradient calculée par état adjoint.

L'écriture du code adjoint est décrit dans la thèse [GD05], il a la même complexité algorithmique que le code direct tant en temps calcul qu'en mémoire. La principale difficulté est d'éviter le stockage en mémoire de la solution du modèle direct à chaque pas de temps conduisant à un stockage 4D de la variable c_i alors que le stockage du modèle direct n'est en général que 3D pour les variables $(c_i|_{t=T}, c_i^s, h)$.

On note tout d'abord que les équations (42-43) ne dépendent pas de l'accommodation et donc que le stockage en mémoire de la variable adjointe associée n'est pas nécessaire. Il suffit donc de stocker en mémoire les variables adjointes associées aux équations (40-41-44) de taille d'ordre $\#\mathcal{K} \times N$ où N est le nombre de pas de temps. En ce qui concerne le stockage des variables directes, on évite celui de la variable c_i de taille d'ordre $\#\mathcal{K} \times N^2$ en recalculant en mode backward la solution de (42-43) à chaque pas de temps.

5.5 Travaux en cours et Perspectives

Inversion des épaisseurs érodées

les épaisseurs des zones érodées postérieurement au dépôt n'apparaissent bien sûr plus sur les données sismiques. Leur détermination est donc une thématique importante de recherches.

Nous explorons deux pistes. La première consiste à appliquer la méthodologie décrite au paragraphe 5.2 pour l'inversion des flux. Pour cela, on propose de décomposer les épaisseurs érodées dans une base de fonctions locales à la zone et de déterminer le domaine admissible polygonal convexe compatible avec les données de puits. Ce modèle risque de ne pas être suffisamment contraint en général et il faudra intégrer d'autres informations géologiques qui restent à définir.

Une autre stratégie possible consiste à considérer que dans ces zones érodées le géologue est plus amène de proposer un modèle d'accommodation alors que dans les zones non érodées

on souhaite toujours imposer directement un modèle d'épaisseurs de sédiments. On peut envisager deux voies pour exploiter ces données dans chaque zone. Tout d'abord, étendre les algorithmes de calage des épaisseurs du paragraphe 5.4 pour le modèle instationnaire au cas où l'accommodation et les épaisseurs sont connues dans des zones complémentaires. Une deuxième approche consisterait à coupler le modèle instationnaire dans la zone où l'accommodation est connue avec le modèle stationnaire dans la zone où les épaisseurs sont connues.

Inversion des termes sources de carbonatation

On peut facilement étendre la définition du modèle stationnaire en rajoutant un terme source de carbonatation de type $S(b)$ (cf 4.5). Ce modèle admet une solution qui n'est en général pas unique, ce qui s'explique physiquement du fait de la nature instable du couplage entre la croissance carbonatée et l'évolution de la topographie. La difficulté majeure consiste à trouver ces solutions par un algorithme numérique robuste et rapide.

Alternativement on peut contraindre d'emblée les termes sources de carbonatation à vérifier les données de puits de façon à sélectionner les bonnes solutions. Pour cela on peut décomposer les termes de carbonatation dans une base de fonctions, contraindre les coefficients de la base à vérifier les données de puits, ce qui se traduit comme dans le paragraphe 5.2 par des contraintes linéaires, puis chercher les solutions les plus proches d'une fonction de référence $S(b)$ en résolvant un problème non linéaire de minimisation sous contraintes linéaires.

Prise en compte du flux d'eau dans le modèle stationnaire

De façon à compléter la physique du modèle stationnaire, il est possible d'étendre sa définition en rajoutant le couplage avec le flux d'eau (cf 4.5). Pour le résoudre numériquement, on doit faire face à nouveau à une physique par nature instable et donc certainement à des problèmes numériques.

LISTE DES PUBLICATIONS

Revues scientifiques avec comité de lecture

- [1] V. GERVAIS, R. MASSON *Numerical Simulation of a Stratigraphic Model at geological time scales*, soumis à Computational Geosciences, 2005.
- [2] J. BLUM, G. DOBRANSZKY, R. EYMARD, R. MASSON *Inversion of a multi-lithology stratigraphic Model to fit seismic data*, soumis à Inverse Problems, 2005.
- [5] R. EYMARD, T. GALLOUËT, V. GERVAIS, R. MASSON *Convergence of a Numerical Scheme for Stratigraphic Modeling*, SIAM Journal of Numerical Analysis, vol. 43, 2, pp. 474-501, 2005.
- [3] V. GERVAIS, R. MASSON *Mathematical and Numerical Analysis of a Stratigraphic Model*, M2AN, Vol. 38, 4, pp 585-612, july/august 2004.
- [4] R. EYMARD, T. GALLOUËT, D. GRANJEON, R. MASSON, Q. H. TRAN *Multi-lithology stratigraphic models under maximum erosion rate constraint*, International Journal of Numerical Methods in Engineering, **60**, pp 527-548, 2004.
- [6] E. FLAURAUD, F. NATAF, I. FAILLE, R. MASSON *Domain Decomposition for an asymptotic geological fault modeling*, Comptes Rendus à l'académie des Sciences, Mécanique, 331, pp 849-855, 2003.
- [7] R. SCHEICHL, R. MASSON, J. WENDEBOURG *Decoupling and block preconditioning for sedimentary basin simulations*, Computational Geosciences 7, pp 295-318, 2003.
- [8] F. DAIM, R. EYMARD, D. HILHORST, M. MAINGUY, R. MASSON *A preconditioned Conjugate Gradient Based Algorithm for Coupling Geomechanical Reservoir Simulations*, Oil and Gas Science and technology, revue de l'IFP, Vol. 57, numéro 5, pp 515-524, 2002.
- [9] S. GAIFFE, R. GLOWINSKI, R. MASSON *Domain Decomposition and Splitting Methods for Mortar Mixed Approximations to Parabolic Equations*, Numerische Mathematik, 15 nov. 2001.
- [10] S. GAIFFE, R. GLOWINSKI, R. MASSON *Méthodes de décomposition de domaine et d'opérateurs pour les problèmes paraboliques*, Comptes Rendus à l'Académie des Sciences, vol. 331, 9, pp 739, 2000.
- [11] C. CANUTO, R. MASSON *Wavelet Stabilized Discretization of the Stokes Problem*, Mathematics of Computation, vol. 70, 236, pp 1397-1416, 2000.
- [12] P. JOLY, R. MASSON *Wavelet Preconditioning of the 2D Stokes Problem in ψ - ω formulation*, Numerical Algorithms, 24 pp 357-369, 2000.

- [13] A. COHEN, R. MASSON *Wavelet Adaptive Methods for 2nd Order Elliptic Problems, Domain Decomposition and Boundary Conditions*, Numerische Mathematik, vol 86, 2, pp 193-238, 2000.
- [14] A. COHEN, R. MASSON *Wavelet Adaptive Methods for 2nd Order Elliptic Problems, Preconditioning and Adaptivity*, SIAM Journal of Scientific Computing, vol. 21, 3, pp 1006-1026, 2000.
- [15] S. BERTOLUZZA, R. MASSON *Velocity Pressure Adaptive Wavelet Spaces Satisfying the Inf-Sup Condition*. Comptes Rendus à l'Académie des Sciences, t. 323, Série I, 407-412, 1996.
- [16] R. MASSON *Biorthogonal Spline Wavelets on the Interval for the Resolution of Boundary Problems*. M3AS Vol. 6, No 6, 749-791, 1996.
- [17] P. LE QUÉRÉ, R. MASSON, P. PERROT *A Chebyshev Collocation Algorithm for 2D Non-Boussinesq Convection*, Journal of Computational Physics, No 103, No 2, 1992.

Brevets

- [18] R. MASSON, M.C. CACAS, G. DOBRANSZKY *Méthode pour simuler le dépôt d'une séquence sédimentaire dans un bassin*, brevet d'invention, 2003.
- [19] R. MASSON, M.C. CACAS, G. DOBRANSZKY *Méthode pour simuler le dépôt d'une séquence sédimentaire dans un bassin respectant les épaisseurs des séquences sédimentaires*, brevet d'invention, 2004.

Actes de colloques avec comité de lecture

- [20] G. DOBRANSKY, R. MASSON, M.C. CACAS, E. ALBOUY *A 4D Stratigraphic Model fitting Seismic Data for Sedimentary Basin Infill Modelling*, in the Proceedings of the European Conference on the Mathematics of Oil Recovery, Cannes, 30 aout - 2 septembre 2004
- [21] V. GERVAIS, R. MASSON, D. GRANJEON *Development and application of a multi-lithology stratigraphic model under maximum erosion rate*, in the Proceedings of the European Conference on the Mathematics of Oil Recovery, Cannes, 30 aout - 2 septembre 2004
- [22] R. EYMARD, T. GALLOUËT, V. GERVAIS, R. MASSON *Existence and Uniqueness of a Weak Solution to a Stratigraphic Model*, in the Proceedings of ENUMATH 2003.
- [23] R. MASSON, P. QUANDALLE, S. REQUENA, R. SCHEICHL *Parallel Preconditioning for Sedimentary Basin Simulations*, in the Proceedings of SCICOM 2003.

- [24] R. EYMARD, T. GALLOUËT, V. GERVAIS, D. GRANJEON, R. MASSON, Q. H. TRAN, *Multi-lithology stratigraphic Model under maximum Erosion rate Constraint*, Finite Volumes for Complex Applications III, R. Herbin and D. Kröner editors, Hermes Penton Science, 2002.
- [25] D. BEVILLON, R. MASSON *Convergence and Stability Analysis of Partially Coupled Schemes for Geomechanical-Reservoir Simulations*, in the Proceedings of the European Conference on the Mathematics of Oil Recovery, Baveno, 2000.
- [26] I. FAILLE, S. GAIFFE, R. GLOWINSKI, P. LEMONNIER, AND R. MASSON *Domain Decomposition and Splitting Methods for Mortar Mixed Approximation to Parabolic Problems*, in the Proceedings of the Domain Decomposition Conference XII, Lyon 2000.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

- [AJP] L. ANDERSSON, N. HALL, B. JAWERTH, AND G. PETERS Wavelets on closed subsets of the real line. *Recent Advances in Wavelets Analysis*, (L.L. Schumaker and G. Webb eds), Academic Press, 1993 p1-61.
- [AH89] R. S. ANDERSON, N. F. HUMPHREY, “Interaction of Weathering and Transport Processes in the Evolution of Arid Landscapes”, in *Quantitative Dynamics Stratigraphy*, T.A. Cross, ed., Prentice Hall, pp. 349-361, 1989.
- [AC83] J. APPLEYARD AND I. CHESHIRE “Nested factorization”, in *Reservoir simulation symposium of SPE*, 12264 1983.
- [BW99] R.E. BANK AND C. WAGNER, “Multilevel ILU decomposition”, *Numer. Math.* 82, pp. 543-576, 1999.
- [Bar70] C. BARDOS “Problèmes aux limites pour les équations aux dérivées partielles du premier ordre à coefficients réels; théorèmes d’approximation; application à l’équation de transport”, *Ann. Scient. Ecole Normale Supérieure*, 4^e Série, t.3, 1971, pp. 185–233.
- [Ba99] P. BASTIAN “Numerical Computation of Multiphase Flow in Porous Media”, HDR, 1999.
- [Be82] A. BEHIE AND P.K.W. VINSOME, Block iterative methods for fully implicit reservoir simulation, *Society of Petroleum Engineers Journal* **22** (1982), pp. 658–668.
- [BV82] G. BEHIE AND P. VINSOME “Block iterative methods for fully implicit reservoir simulation”, *SPE Journal*, 658-668, 1982.
- [B] S. BERTOLUZZA, “Stabilization by multiscale decomposition”, *Appl. Math. Lett.* **6** (1998).
- [BCT] S. BERTOLUZZA, C. CANUTO, AND A. TABACCO, *Negative norm stabilization of convection-diffusion problems*, Preprint n. 98-26, Dipartimento di Matematica, Politecnico di Torino, to appear in *Appl. Math. Letters*.
- [BCR] G. BEYLKIN, R. COIFMAN, V. ROKHLIN Fast wavelet transforms and numerical algorithms I. *Comm. Pure and Appl. Math.*, 44:141-183, 1991.
- [BF] F. BREZZI, AND M. FORTIN, *Mixed and Hybrid Finite Element Methods*, Springer-Verlag, New York, 1991.
- [BS90] P. N. BROWN AND Y. SAAD “Hybrid Krylov Methods for Nonlinear Systems of Equations”, *SIAM J. Sci. Stat. Comp.*, vol 11, 3, pp. 450-481, may 1990.
- [BS94] P. N. BROWN AND Y. SAAD “Convergence Theory of Nonlinear Newton Krylov Algorithms”, *SIAM J. Opt.*, vol 4, pp. 297-330, 1994.

- [BS97] BRAUN, J. AND SAMBRIDGE, M., “Modelling landscape evolution on geological time scales : a new method based on irregular spatial discretization”, *Basin Research* 9, pp27-52, 1997.
- [CTU] C.CANUTO, A. TABACCO, K. URBAN Wavelet Element Method. Part 1: construction and analysis. Politecnico di Torino, Dip. di Matematica, rapporto interno No 13, 1997. Submitted to *Appl. Comput. Harmon. Anal.*
- [Cho68] CHORIN, A.J. ”Numerical solution of Navier-Stokes equations”, *Math. Comp.*, **22**, pp 745-762, 1968.
- [CDD] A. COHEN, W. DAHMEN, R. DEVORE Adaptive Wavelet Methods for Elliptic Operator Equations - Convergence Rates. Preprint 1998.
- [CDF] A. COHEN, I. DAUBECHIES, J. FEAUVEAU Biorthogonal bases of compactly supported Wavelets. *Comm. Pure Appl. Math.* **45**, 1992, p485-560.
- [CDV] A. COHEN, I. DAUBECHIES, P. VIAL Wavelets on the Interval and Fast Wavelet Transforms. *Appl. Comput. Harmon. Anal.* 1, 1993, p54-81.
- [Co] A. COHEN Wavelet methods in Numerical Analysis, to appear in Handbook of Numerical Analysis, Editors P.G. Ciarlet and J.L. Lions, Elsevier Science Publishers, North Holland
- [Da] W. DAHMEN Wavelet and Multiscale Methods for Operator Equations, *Acta Numerica*, Cambridge University Press, 1997, p 55-228.
- [DKU2] W. DAHMEN, A. KUNOTH, K. URBAN A Wavelet-Galerkin Method for Stokes Problem, *Computing*, **56**, p. 259-302, 1996.
- [DS] W. DAHMEN, R. SCHNEIDER Composite Wavelet Bases for Operator Equations *Publication No 133, Institut fur Geometrie und Praktische Mathematik RWTH Aachen, (1996).*
- [Dau] I. DAUBECHIES Orthonormal bases of compactly supported wavelets. *Comm. Pure Appl. Math.* **41**, 1988, p909-996.
- [GD05] G. DOBRANSZKY, Thèse de doctorat, université de Nice, en préparation pour 2005.
- [EGH00] R. EYMARD, T. GALLOUËT, R. HERBIN, “The Finite Volume Method”, Handbook of Numerical Analysis, P.G. Ciarlet, J.L. Lions editors, Elsevier, **7**, p. 715-1022, 2000.
- [FTX] K.T. FANG, G.L. TIAN, M.Y. XIE “Uniform Distribution on Convex polyhedron and its Applications”, preprint.
- [Gai00] GAIFFE, S. ”Maillages hybrides et décomposition de domaine pour la modélisation des réservoirs pétroliers”, Thèse de doctorat, Université Pierre et Marie Curie - IFP, 2000.
- [GW00] GALLANT, J.C. AND WILSON, J.P., “Primary Topographic Attributes”, in Gallant and Wilson eds. Terrain Analysis, Principles and Applications. J. Wiley & Sons, pp51-86, 2000.
- [VG04] V. GERVAIS, Thèse de doctorat, université d’Aix Marseille, 2004.

- [GLT89] GLOWINSKI, R. AND LE TALLEC, P. "Augmented Lagrangian Interpretation of the Nonoverlapping Schwarz Alternating Method", in Proc. 3rd International Symposium on Domain Decomposition Methods, T. F. Chan and R. Glowinski and J. Périaux and O. B. Widlund Editors, Philadelphia, SIAM, pp 224-231, 1989.
- [Glo88] GLOWINSKI, R. AND WHEELER, M. F. "Domain Decomposition and Mixed Finite Element Methods for Elliptic Problems", in First International Symposium on Domain Decomposition Methods for Partial Differential Equations, R. Glowinski and G. H. Golub and G. A. Meurant and J. Périaux Editors, Philadelphia, SIAM, pp 144-172, 1988.
- [G97] D. GRANJEON, "Modélisation stratigraphique déterministe; conception et applications d'un modèle diffusif 3D multilithologique", Ph. D. dissertation. Géosciences Rennes, Rennes, France, 189 p., 1997.
- [GJD98] D. GRANJEON, P. JOSEPH, B. DOLIGEZ, "Using a 3-D stratigraphic model to optimise reservoir description", *Hart's Petroleum Engineer International*, November 1998, p. 51- 58.
- [GJ99] D. GRANJEON, P. JOSEPH, "Concepts and applications of a 3D multiple lithology, diffusive model in stratigraphic modelling". In J.W. Harbaugh. and al. (eds.), *Numerical Experiments in Stratigraphy*, SEPM Sp. Publ. 62, 1999.
- [GQ98] GUERMOND, J. L. AND QUARTAPELLE, L. "On the approximation of the unsteady Navier-Stokes equations by finite element projection methods", *Numer. Math.*, **80**, pp 207-238, 1998.
- [HY02] V.E. HENSON AND U.M. YANG, BoomerAMG: A parallel algebraic multigrid solver and preconditioner, *Applied Numerical Mathematics* **41** (2002), 155–177.
- [How94] HOWARD, A.D. "A detachment limited model of drainage basin evolution", *water resources Research*, v. 30, pp2261-2285, 1994.
- [HFB] T.J.R. HUGHES, L.P. FRANCA, AND M. BALESTRA, " A new finite element formulation of computational fluid dynamics: a stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accomodating equal-order interpolations", *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **59** (1986), 85-99.
- [JF89] Jordan, T.E. and Fleming, P.B., "From geodynamic models to basin fill: a stratigraphic perspective", in T.A. Cross (ed.) *Quantitative Dynamic Stratigraphy*, Prentice Hall, 149-163.
- [JF91] Jordan, T.E. and Fleming, P.B., "Large scale architecture, eustatic variation, and unsteady tectonism: a theoretical evaluation", *J. Geophys. Res.*, B4, pp212-218.
- [KT85] KENYON, P.M. AND TURCOTTE, D.L., "Morphology od Delta Prograding by bulk sediment transport", *Geological Society of America Bulletin*, **84**, pp1457-1465.
- [Kir86] KIRKBY, M.J., "A two dimensional simulation model for slope and stream evolution", in Abrahams, A.D., ed., *Hillslope processes : Winchester, Mass., Allen and Unwin*, pp203-222, 1986.

- [KRW96] H. KLIE, M. RAMÉ, M. WHEELER “Two stage preconditioners for inexact newton methods in multi-phase reservoir simulation” Preprint CRPC-TR96641-S, Center for Research on Parallel Computation, Rice University, Houston, 1996.
- [KB94] KOOI, H. AND BEAUMONT, C., “Escarpment evolution on high-elevation rifted margins: insight derived from surface processes model that combines diffusion and reaction”, *J. of Geophysical Research*, **99**, pp12191-12209.
- [JML04] J. M. LAIGLE Stage d’apprenti de l’Ecole Nationale Supérieure Pétrole et Moteur, 2004.
- [LVW01] S. LACROIX, Y.V. VASSILEVSKI, AND M.F. WHEELER, Decoupling preconditioners in the Implicit Parallel Accurate Reservoir Simulator (IPARS), *Numerical Linear Algebra with Applications* **8** (2001) pp. 537-549.
- [LVWW02] S. LACROIX, Y.V. VASSILEVSKI, J. WHEELER, AND M.F. WHEELER, An iterative solution of linear systems in the Implicit Parallel Accurate Reservoir Simulator, to be submitted (2002).
- [LSU68] O. LADYZENSKAJA, V. SOLONNIKOV, N. URAL’CEVA Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type, Vol. 23, Translation of Mathematical Monographs, 1968.
- [Lem] P.G. LEMARIÉ Analyses multirésolutions non-orthogonales, commutation entre projecteurs et dérivation et ondelettes vecteurs à divergence nulle, *Rev. Mat. Iberoamer.* **8**, 1992, 221-236.
- [Lions89] LIONS, P.L. ”On the Scharwz Alternating Method III: A Variant for Nonoverlapping Subdomains”, in Proc. 3rd International Symposium on Domain Decomposition Methods, T. F. Chan and R. Glowinski and J. Périaux and O. B. Widlund Editors, Philadelphia, SIAM, pp 202-223, 1989.
- [MPR] Y. MADAY, V. PERRIER, J.C. RAVEL Adaptativité dynamique sur bases d’ondelettes pour l’approximaton d’équations aux dérivées partielles. *C.R. Acad. Sci. Paris Série I Math.* **I**, 1991, p405-410.
- [P88] G.F. PIEPEL Programs for generating extreme vertices and centroids of linealy constrained experimental regions, *J. of Quality technology*, **20**, pp. 125-139
- [QAD00] A. QUIQUEREZ, P. ALLEMAND, G. DROMART “DIBAFILL: a 3D two lithology diffusive model for basin infilling”, *Computer and Geosciences*, **26**, pp. 1029-1042, 2000.
- [R92] JAN C. RIVENAES, “Application of a dual lithology, depth-dependent diffusion equation in stratigraphic simulation”, *Basin Research* **4**, pp. 133-146, 1992.
- [R97] JAN C. RIVENAES, “Impact of sediment transport efficieny on large-scale sequence architecture: results from stratigraphic computer simulation”, *Basin Research* **9**, pp. 91-105, 1997.

- [RS86] J.W. RUGE AND K. STÜBEN, Algebraic Multigrid (AMG), in *Multigrid Methods* (S.F. McCormick, ed.), Frontiers in Applied Mathematics, vol. **5**, SIAM, Philadelphia, 1986.
- [Saad96] 1996Y. SAAD *Iterative Methods for Sparse Linear Systems*, PWS Publising Co., Boston, 1996.
- [SS02] 1996Y. SAAD, B. SUCHOMEL ARMS: an algebraic recursive multilevel solver for general sparse linear systems, *NLAA*, 9 pp. 359-378, 2002.
- [SS86] Y. SAAD AND M.H. SCHULTZ, GMRES: a generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems, *SIAM J. on Scientific and Statistical Computing*, Vol. 7, 3, 856-869, 1986.
- [TH89] D.M. TEZTLAFF, J.W. HARBAUGH, “Simulating Clastic Sedimentation”, Van Norstrand Reinhold, New York, 1989.
- [TS94] G. E. TUCKER, R. L. SLINGERLAND, “Erosional dynamics, flexural isostasy, and long-lived escarpments: A numerical modeling study”, *J. of Geophysical Research*, Vol **99**, B6, pp. 12,229-12,243, june 10, 1994.
- [TLGB02] TUCKER, G.E., LANCASTER S.T., GASPARINI, N.M., BRAS, R. L., “The channel hillslope integrated landscape development model (CHILD)”, in *Landscape erosion and sedimentation modelling*, editor W.W. Doe, pp349-388, 2002.
- [TB98] GREGORY E. TUCKER AND RAFAEL L. BRAS, “Hillslope Processes, Drainage Density, and Landscape Morphology”, Preprint, Department of Civil and Environmental Engineering, Water Ressources Research, 1998.
- [TBR92] TARBOTON, D.G., BRAS, R.L., AND RODRIGUEZ-ITURBE, I., “A physical basis for drainage density Geomorphology”, v.5, pp59-76, 1992.
- [Wa85] J. WALLIS “Constrained Residual Acceleration of Conjugate Residual Methods, in eight SPE symposium on reservoir simulation, SPE paper 13536, Dallas, Texas, 1985.
- [WBR90] WILLGOOSE, G.R., BRAS, R.L, AND RODRIGUEZ-ITURBE, I., “A model of river basin evolution”, *EOS Transactions American Geophysical Union*, v.71, pp1806-1807, 1990.
- [Yotov96] YOTOV, I. ”Mixed Finite Element Methods for Flow in Porous Media”, PhD Thesis, TICAM, University of Texas at Austin, 1996.