Cours 2 2026

Discrétisation VF des équations hyperboliques scalaires en dim 1

$$(E)\quad \begin{cases} \partial_t u(x,t) + \partial_x f(u(x,t)) = 0 & \text{sur } \mathbb{R}\times(0,T) \\ u(x,0) = u^0(x) & \forall x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

- $u^0 \in L^\infty(\mathbb{R})$, $I^0 = [\min_{x\in\mathbb{R}} u^0(x), \max_{x\in\mathbb{R}} u^0(x)]$
- f est supposée Lipchitz sur I^0, i.e $\exists\ \mathrm{Lip}_f$

$$|f(v_2) - f(v_1)| \leq \mathrm{Lip}_f\, |v_2 - v_1| \quad \forall (v_1, v_2) \in I_0\times I_0$$

nb : si f est continue et C^1 par morceaux sur I_0
cela se réduit à $\sup_{v\in I_0} |f'(v)| = \mathrm{Lip}_f$

prop : Il existe une solution faible entropique unique à (E) dans $L^\infty(\mathbb{R}\times(0,T))$.
De plus elle vérifie le principe du maximum
$u(x,t) \in I^0 \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R}\times(0,T]$

prop : La solution entropique est la limite lorsque $\varepsilon \to 0^+$ $(\varepsilon > 0)$ de l'équation parabolique

$$\begin{cases} \partial_t u_\varepsilon(x,t) + \partial_x f(u_\varepsilon(x,t)) \underbrace{- \varepsilon\, \partial_x^2 u(x,t)}_{\text{terme Diffusif}} = 0 \\ \quad \text{sur } \mathbb{R}\times(0,T) \\ u_\varepsilon(x,0) = u^0(x), \quad x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

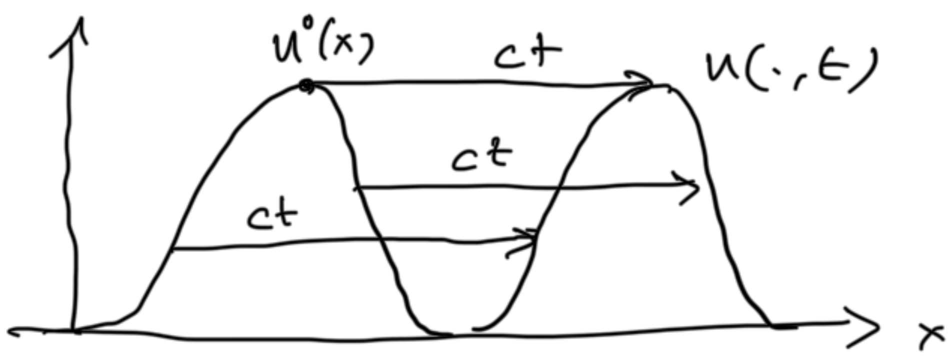
Exemple : $f(u) = cu$, $c\in\mathbb{R}$

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) + c\,\partial_x u(x,t) = 0 & (x,t)\in\mathbb{R}\times(0,T) \\ u(x,0) = u^0(x), & x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

Solution : $u(x,t) = u^0(x-ct)$
Vérifions : $\partial_t u(x,t) = (u^0)'(x-ct)\times(-c)$
$\partial_x u(x,t) = (u^0)'(x-ct)\times 1$

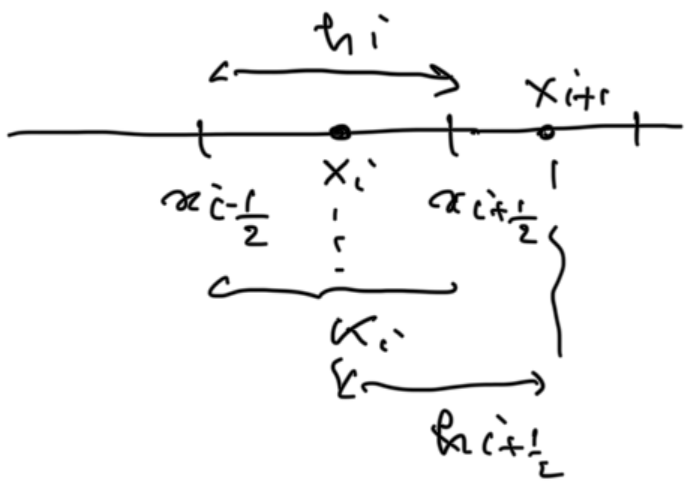
donc on a bien $\partial_t u(x,t) + c\,\partial_x u(x,t) = 0$

et $u(x,0) = u^0(x)$



Discrétisation VF

* Discrétisation du domaine



$i \in \mathbb{Z}$

$K_i =]x_{i-\frac{1}{2}}, x_{i+\frac{1}{2}}[$

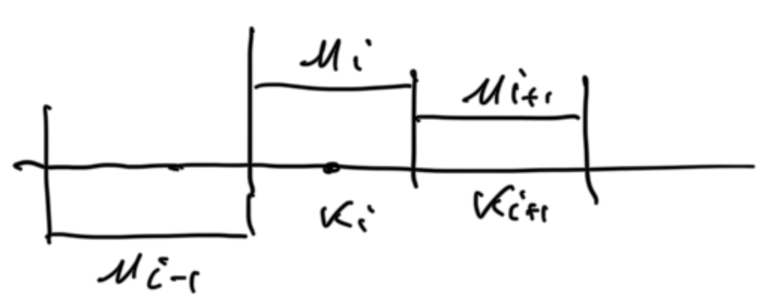
$x_i = \dfrac{x_{i-\frac{1}{2}} + x_{i+\frac{1}{2}}}{2}$

$h_i = |x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}|$

$h_{i+\frac{1}{2}}$ $(x_{i+1} - x_i)$

* Espace des solutions discrètes

$$V_h = \{ v_h \in L^\infty(\mathbb{R}),\ v_h(x) = v_i \ \forall x \in K_i,\ \forall i \in \mathbb{Z} \}$$



* Cas semi-discret, volume fini en espace, continu en temps

$u_h(t) \in V_h$

$u_h(x,t) = u_i(t) \quad \forall x \in K_i,\ \forall i \in \mathbb{Z}$

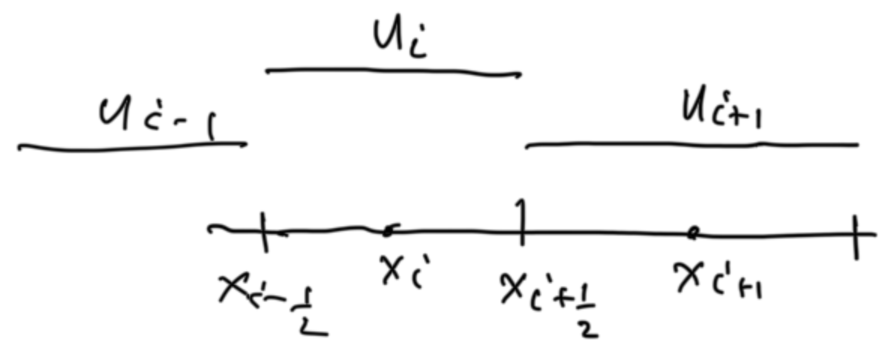
$$\underbrace{\int_{K_i} \partial_t u(x,t)\,dx}_{\approx\ h_i \frac{d}{dt} u_i(t)} + \underbrace{\int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} \partial_x f(u(x,t))\,dx}_{\underbrace{f(u(x_{i+\frac{1}{2}},t))}_{\text{flux en } x_{i+\frac{1}{2}}} - \underbrace{f(u(x_{i-\frac{1}{2}},t))}_{\text{flux en } x_{i-\frac{1}{2}}}} = 0$$

on approxime

le flux $f(u(x_{i+\frac{1}{2}},t))$ par le flux numérique $F_{i+\frac{1}{2}}(U_h(t))$

$\Rightarrow$ équation de conservation discrète dans la maille K_i

$$\begin{cases} h_i \dfrac{d}{dt} u_i(t) + F_{i+\frac{1}{2}}(U_h(t)) - F_{i-\frac{1}{2}}(U_h(t)) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z} \\ u_i(0) = \dfrac{1}{h_i} \displaystyle\int_{K_i} u^0(x)\,dx \end{cases}$$



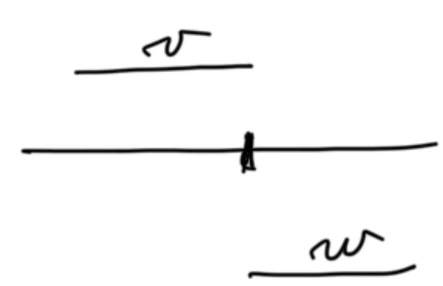
flux centré : $F^c_{i+\frac{1}{2}}(U_h) = f\left(\dfrac{u_i + u_{i+1}}{2}\right)$

(" mauvais choix car instable "

Flux monotone deux points

$F_{i+\frac{1}{2}}(v, w) = F(v, w)$

v : valeur à gauche ; w : valeur à droite



ex $F_{i-\frac{1}{2}}(U_h) = F(u_{i-1}, u_i)$

$F_{i+\frac{1}{2}}(U_h) = F(u_i, u_{i+1})$

$F(v, w)$ est un flux monotone deux points ssi il vérifie les trois propriétés suivantes :

* Consistance : $F(v,v) = f(v) \quad \forall v \in \mathbb{R}$
  " flux exact sur les fonctions constantes "

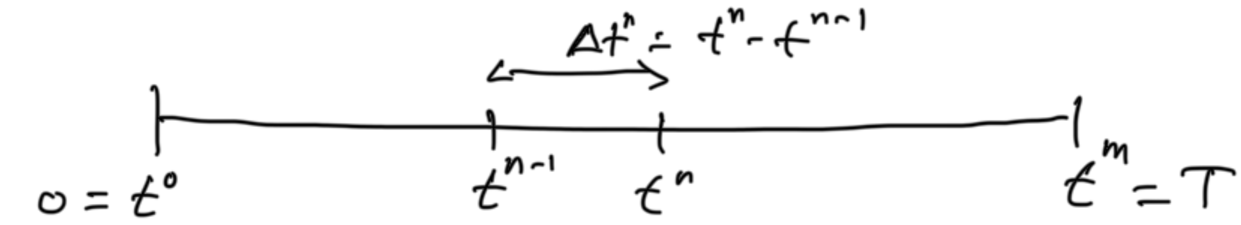
* Monotonie : $F(v^{\nearrow}, w_{\searrow})$

  $F(v,w)$ est croissante par rapport à v
  et décroissante ——— à w
  (condition de stabilité au sens ici du principe du maximum)

* $F(v,w)$ est Lipchitz par rapport à v et w $\forall (v,w) \in I_0 \times I_0$.

$$|F(v_2,w) - F(v_1,w)| \leq Lip_1 F \, |v_2 - v_1|$$
$$|F(v,w_2) - F(v,w_1)| \leq Lip_2 F \, |w_2 - w_1|$$
$$\forall\, v_1, v_2, w_1, w_2, v, w \in I_0.$$

<u>Discrétisation en temps</u> : on va prendre l'exemple des schémas d'Euler explicite et implicite



$$\left|\begin{array}{l} u_i^n = u_i(t^n) \\ u_i^* = \begin{cases} u_i^n & \text{si implicite} \\ u_i^{n-1} & \text{si explicite} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\frac{1}{\Delta t^n}\int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(h_i \frac{du_i(t)}{dt} + F(u_i(t), u_{i+1}(t)) - F(u_{i-1}(t), u_i(t)) \right) dt = 0$$

$$h_i \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t^n} + \underbrace{\frac{1}{\Delta t^n}\int_{t^{n-1}}^{t^n} \left(F(u_i(t), u_{i+1}(t)) - F(u_{i-1}(t), u_i(t)) \right) dt}_{F(u_i^*, u_{i+1}^*) - F(u_{i-1}^*, u_i^*)}$$

$$\begin{cases} h_i \dfrac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t^n} + F(u_i^*, u_{i+1}^*) - F(u_{i-1}^*, u_i^*) = 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z} \quad \forall n = 1, \dots, m \\ u_i^0 = \dfrac{1}{h_i}\displaystyle\int_{K_i} u^0(x)\,dx \quad \forall i \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

<u>Exemple du cas linéaire</u> $f(u) = cu$

Famille des flux deux points linéaires

$$F(v,w) = \alpha v + \beta w + \gamma \quad \text{avec } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}.$$

- Consistance : $F(v,v) = f(v) = cv \quad \forall v \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow (\alpha + \beta) v + \gamma = cv \quad \forall v \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = c \end{cases}$

$$F(v,w) = \alpha v + (c-\alpha) w$$

flux centré : $F^c(v,w) = \frac{c}{2}(v+w)$

$$F(v,w) = \frac{c}{2}(v+w) - \frac{c}{2}(v+w) + \alpha v + (c-\alpha) w$$

$$= \frac{c}{2}(v+w) - \frac{c}{2}(v-w) + \alpha(v-w)$$

$$= \frac{c}{2}(v+w) + \underbrace{\left(\alpha - \frac{c}{2}\right)}_{D}(v-w)$$

$\Rightarrow$ famille à un paramètre D de flux linéaire consistant pour $f(u) = cu$:

$$F(v,w) = \underbrace{\frac{c}{2}(v+w)}_{\text{flux centré}} + \underbrace{D(v-w)}_{\text{flux diffusif}}$$

On remarque que $D(v-w)$ est la discrétisation du flux diffusif $D\, h_{i+\frac{1}{2}}\left(-u'(x_{i+\frac{1}{2}})\right)$ (en $x_{i+\frac{1}{2}}$)

Monotonicité de $F(v,w)$:

$$\left.\begin{array}{lll} \frac{c}{2} + D \geq 0 & \Longleftrightarrow & D \geq -\frac{c}{2} \\ \frac{c}{2} - D \leq 0 & \Longleftrightarrow & D \geq \frac{c}{2} \end{array}\right\} \Longleftrightarrow \boxed{D \geq \frac{|c|}{2}}$$

Le meilleur flux est le moins diffusif, qui s'obtient pour $D = \frac{|c|}{2}$

$$\Rightarrow F(v,w) = \begin{cases} cv & \text{si } c \geq 0 \\ cw & \text{si } c \leq 0 \end{cases}$$

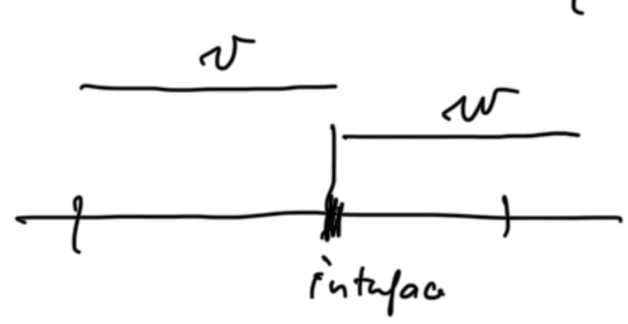


schéma | décentré amont
upwind
Godunov

Analyse de stabilité par le principe du maximum :
on va écrire que le schéma est une combinaison convexe

$$h_i \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t^n} + c\,\frac{u_i^* + u_{i+1}^*}{2} + D(u_i^* - u_{i+1}^*)$$
$$- c\,\frac{u_{i-1}^* + u_i^*}{2} - D(u_{i-1}^* - u_i^*) = 0$$

Cas implicite : $* = n$

$$\left(\frac{h_i}{\Delta t^n} + \cancel{\frac{c}{2}} + D - \cancel{\frac{c}{2}} + D\right) u_i^n = \frac{h_i}{\Delta t^n} u_i^{n-1} + \left(D - \frac{c}{2}\right) u_{i+1}^n + \left(D + \frac{c}{2}\right) u_{i-1}^n$$

$$\left.\begin{array}{l} D - \frac{c}{2} \geqslant 0 \\ D + \frac{c}{2} \geqslant 0 \end{array}\right| \Leftrightarrow D \geqslant \frac{|c|}{2}$$

Cas du schéma explicite : $* = n-1$

$$\frac{h_i}{\Delta t^n} u_i^n = \left(\frac{h_i}{\Delta t^n} - \frac{c}{2} - D + \frac{c}{2} - D\right) u_i^{n-1} + \left(D - \frac{c}{2}\right) u_{i+1}^{n-1} + \left(D + \frac{c}{2}\right) u_{i-1}^{n-1}$$

$$\begin{array}{l} D - \frac{c}{2} \geqslant 0 \\ D + \frac{c}{2} \geqslant 0 \end{array} \Leftrightarrow D \geqslant \frac{|c|}{2}$$ stabilité en espace.

$$\frac{h_i}{\Delta t^n} - 2D \geqslant 0 \quad \forall i \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \boxed{\Delta t^n \leq \min_{i \in \mathbb{Z}} \frac{h_i}{2D}}$$

Condition CFL

Bilan de l'exemple :

- Le schéma implicite est stable au sens où il vérifie le principe du maximum $\forall \Delta t^n > 0$ si $D \geqslant \frac{|c|}{2}$ qui est la condition de monotonie. $\rightarrow$ $u_i^n \in I_0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \ \forall n \geqslant 0$.
- Le schéma explicite est stable au sens où il vérifie le principe du maximum si $D \geqslant \frac{|c|}{2}$ (Monotonie du flux) et $\Delta t^n \leq \min \frac{h_i}{\dots}$ (Condition CFL)

soit $F(v,w)$ un flux monotone deux points.

On va faire l'analyse de stabilité par le principe du maximum

$$h_i \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t^n} + \underbrace{F(u_i^*, u_{i+1}^*) - F(u_i^*, u_i^*)}_{b_i^*(u_i^* - u_{i+1}^*)} \underbrace{- F(u_{i-1}^*, u_i^*) + F(u_i^*, u_i^*)}_{a_i^*(u_i^* - u_{i-1}^*)} = 0$$

$\Longrightarrow$

$$h_i \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t^n} + b_i^*(u_i^* - u_{i+1}^*) + a_i^*(u_i^* - u_{i-1}^*) = 0$$

Monotonie $\Rightarrow$

$$0 \leq b_i^* = \frac{F(u_i^*, u_{i+1}^*) - F(u_i^*, u_i^*)}{u_i^* - u_{i+1}^*} \leq \mathrm{Lip}_2 F$$

$$0 \leq a_i^* = \frac{F(u_i^*, u_i^*) - F(u_{i-1}^*, u_i^*)}{u_i^* - u_{i-1}^*} \leq \mathrm{Lip}_1 F$$

$$h_i \, \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t^n} + b_i^* (u_i^* - u_{i+1}^*) + a_i^* (u_i^* - u_{i-1}^*) = 0$$

Cas implicite :

$$\underbrace{\left(\frac{h_i}{\Delta t^n} + b_i^* + a_i^* \right)}_{> 0} u_i^n = \underbrace{\frac{u_i^{n-1}}{\Delta t^n}}_{> 0} + \underbrace{b_i^*}_{\geq 0} u_{i+1}^n + \underbrace{a_i^*}_{\geq 0} u_{i-1}^n$$

$\Longrightarrow$ on a bien une combinaison convexe et donc le principe du maximum

Cas explicite :

$$\frac{h_i}{\Delta t^n} u_i^n = \underbrace{\left(\frac{h_i}{\Delta t^n} - b_i^* - a_i^* \right)}_{} u_i^{n-1} + \underbrace{b_i^*}_{\geq 0} u_{i+1}^{n-1} + \underbrace{a_i^*}_{\geq 0} u_{i-1}^{n-1}$$

$$\Delta t^n \leq \frac{h_i}{a_i^* + b_i^*}$$

Comme $0 \leq a_i^* + b_i^* \leq \mathrm{Lip}_1 F + \mathrm{Lip}_2 F$, il suffit d'avoir la condition CFL

$$\boxed{\Delta t^n \leq \min_{i \in \mathbb{Z}} \frac{h_i}{\mathrm{Lip}_1 F + \mathrm{Lip}_2 F}}$$

Soit $F(v,w)$ un flux Monotone deux points, alors le schéma VF avec Euler implicite admet une solution unique qui vérifie le principe du maximum $U_i^n \in I_0 \quad \forall i \in \mathbb{Z}, \forall n \geq 0$.

Soit $F(v,w)$ un flux Monotone deux points, alors le schéma VF avec Euler explicite admet une solution unique qui vérifie le principe du maximum $U_i^n \in I_0 \; \forall i \in \mathbb{Z}, \forall n \geq 0$

Sous la condition CFL $\quad \Delta t^n \leq \min_{i \in \mathbb{Z}} h_i \Big/ \left(Lip_1 F + Lip_2 F \right) \quad \forall n \geq 1$

$c > 0$ $\boxed{F(v,w) := cv}$

<u>Equation équivalente</u> : elle s'obtient par $f(u) = cu$, $h_i = h \ \forall i \in \mathbb{Z}$

$\Delta t^n = \Delta t \ \forall n \geq 1$

On injecte $u_i^n = u(x_i, t^n)$ avec u fonction régulière solution de (E) et on fait des développements limités à l'ordre $h^2 + \Delta t^2 + h\Delta t$

<u>Cas implicite</u> :

$$\partial_t u + \partial_x(cu) - \underbrace{\frac{hc}{2}(1 + CFL)}\partial_x^2 u = O(h^2 + \Delta t^2 + h\Delta t)$$

CFL = nombre CFL ; $CFL = \frac{c\Delta t}{h}$

(Condition CFL : $\Delta t \leq \frac{h}{c}$)

<u>Cas explicite</u>

$$\partial_t u + \partial_x(cu) - \underbrace{\frac{hc}{2}(1 - CFL)}\partial_x^2 u = O(\text{———})$$

Exemple de flux deux points monotones pour $f(u)$

- si f est croissante : $F(\overset{\nearrow}{v}, \underset{\searrow}{w}) = f(v)$

  Consistant car $F(v,v) = f(v)$, $\forall v \in \mathbb{R}$

  Monotone car $f \nearrow$

  flux décentré amont dans le cas f croissant $\qquad \underset{\longrightarrow}{f'(u) > 0}$

- si f est décroissante : $F(\overset{\nearrow}{v}, \underset{\searrow}{w}) = f(w)$

  flux décentré amont $\qquad \longleftarrow$ "$f'(u) < 0$"

- $F(\overset{\nearrow}{v}, \underset{\searrow}{w}) = \dfrac{f(v) + f(w)}{2} + D(v - w)$ avec $D \geq \frac{1}{2} \mathrm{Lip} f$ $\left(\frac{1}{2} \max\limits_{u \in I_0} |f'(u)| \right)$

  Consistant : $F(v,v) = f(v)$

  Monotone : ok

- Cas $f(v) = \overset{\nearrow}{f_1}(v) + \overset{\searrow}{f_2}(v)$

$$F(\overset{\nearrow}{v}, \underset{\searrow}{w}) = \overset{\nearrow}{f_1}(v) + \underset{\searrow}{f_2}(w)$$ flux Monotone deux point

Consistance : $F(v, v) = f_1(v) + f_2(v) = f(v)$

Monotone : ok