

Discretisation Volume Fini des EDPs

I Discretisation VF des eqs elliptiques/parabolique en dim 1
TP/TD

II Discretisation VF des eqs hyperboliques scalaires en dim 1
TD + TP

III Extension à la dim 2, 3 du cas elliptique/parabolique
TD + TP \rightarrow Modèle statistographique, 1^{ère} partie

IV Extension à la dim 2, 3 du cas hyperbolique
TD + TP \rightarrow Modèle statistographique, 2^{ème} partie

I Discretisation VF des équations elliptiques/paraboliques en dim 1

$$(E) \begin{cases} -u''(x) = f(x), & x \in]0, L[\\ u(0) = u(L) = 0 \end{cases} \quad (\text{C.L. de Dirichlet homogène})$$

$$H_0^1(0, L) = \left\{ v \in L^2(0, L) \text{ tq } \int_0^L |v'(x)|^2 dx < +\infty, v(0) = v(L) = 0 \right\}$$
$$L^2(0, L) = \left\{ v \text{ mesurable, } \int_0^L |v(x)|^2 dx < +\infty \right\}$$

$H_0^1(0, L)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{H_0^1} = \int_0^L u(x)v(x) dx, \text{ et de la norme associée } \|v\|_{H_0^1} = \sqrt{\langle v, v \rangle_{H_0^1}} = \sqrt{\int_0^L |v'(x)|^2 dx}$$

$L^2(0, L)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{L^2} = \int_0^L u(x)v(x) dx \quad \text{et de sa norme associée} \quad \|v\|_{L^2} = \sqrt{\int_0^L |v(x)|^2 dx}$$

Inégalité de Poincaré: $\forall v \in H_0^1(0, L)$ on a $\|v\|_{L^2} \leq L \|v\|_{H_0^1}$

preuve: soit $v \in H_0^1(0, L)$

$$v(x) = \int_0^x v'(y) dy \quad \text{car } \boxed{v(0) = 0}$$

$$|v(x)| \leq \int_0^x |v'(y)| dy \leq \int_0^L |v'(y)| dy \leq$$

$$\Rightarrow |v(x)| \leq \sqrt{L} \|v\|_{H_0^1} \quad \forall x \in (0, L)$$

$$\|v\|_{L^2}^2 = \int_0^L |v(x)|^2 dx \leq L \|v\|_{H_0^1}^2 \int_0^L dy = L^2 \|v\|_{H_0^1}^2$$

$$\sqrt{L} \|v\|_{H_0^1} = \sqrt{\int_0^L 1^2 dy} \sqrt{\int_0^L |v'(y)|^2 dy}$$

Formulation variationnelle de (E)

$$v \in H_0^1(0, L)$$

formulation conservative $(-u'(x))' = f(x)$

$$\int_0^L (-u'(x))' v(x) dx = \int_0^L f(x) v(x) dx$$

IPP

$$\int_0^L ((-u'(x)v(x))' + u'(x)v'(x)) dx = \int_0^L f(x)v(x) dx$$

$$- \underbrace{u'(L)v(L)}_0 + \underbrace{u'(0)v'(0)}_0 + \int_0^L u'(x)v'(x) dx = \int_0^L f(x)v(x) dx$$

\Rightarrow (IV)

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u \in H_0^1(0, L) \text{ tq.} \\ \int_0^L u'(x)v'(x) dx = \int_0^L f(x)v(x) dx \quad \forall v \in H_0^1(0, L) \end{array} \right.$$

prop 1: (EV) admet une solution unique (LAX Milgram)

prop 2: la solution de (EV) vérifie l'estimation a priori

$$\|u\|_{H_0^1} \leq L \|f\|_{L^2}$$

preuve de 2: on pose $v = u$ dans (EV)

$$\int_0^L u'(x) u'(x) dx = \int_0^L f(x) u(x) dx$$

$$\|u\|_{H_0^1}^2 \stackrel{\text{C.S.}}{\leq} \|f\|_{L^2} \|u\|_{L^2} \stackrel{\text{Poincaré}}{\leq} \|f\|_{L^2} L \|u\|_{H_0^1}^2$$

$$\Rightarrow \|u\|_{H_0^1} \leq L \|f\|_{L^2}$$

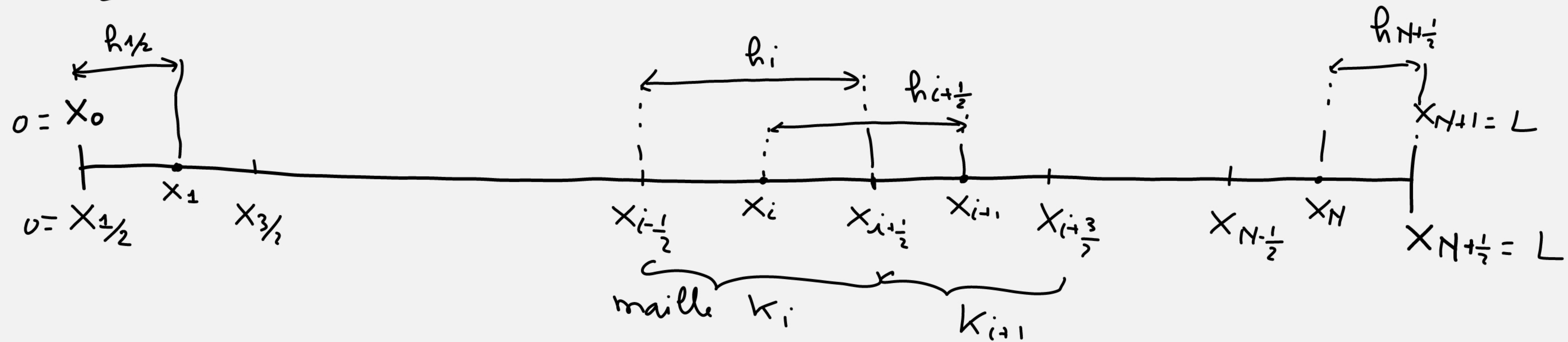
Rq: l'estimation a priori + linéarité de l'équation implique
l'unicité de la solution de (EV)

preuve: si $u^{(1)}$ et $u^{(2)}$ sont solutions de (EV)

$$\Rightarrow \int_0^L ((u^{(1)})' - (u^{(2)})') v'(x) dx = 0 \quad \forall v \in H_0^1(0, L)$$

$$\Rightarrow \|u^{(1)} - u^{(2)}\|_{H_0^1} = 0 \Rightarrow u^{(1)} = u^{(2)}$$

Discretisation du domaine $(0, L)$ (Maillage)



- On partitionne le domaine en N mailles $K_i =]x_{i-1/2}, x_{i+1/2}[$, $i = 1, \dots, N$
 $0 = x_{1/2} < x_{3/2} < \dots < x_{i-1/2} < x_{i+1/2} < \dots < x_{N+1/2} = L$

- Centres de maille $x_i = \frac{x_{i+1/2} + x_{i-1/2}}{2}$, $i = 1, \dots, N$

- $h_i = |x_{i+1/2} - x_{i-1/2}|$, $\forall i = 1, \dots, N$

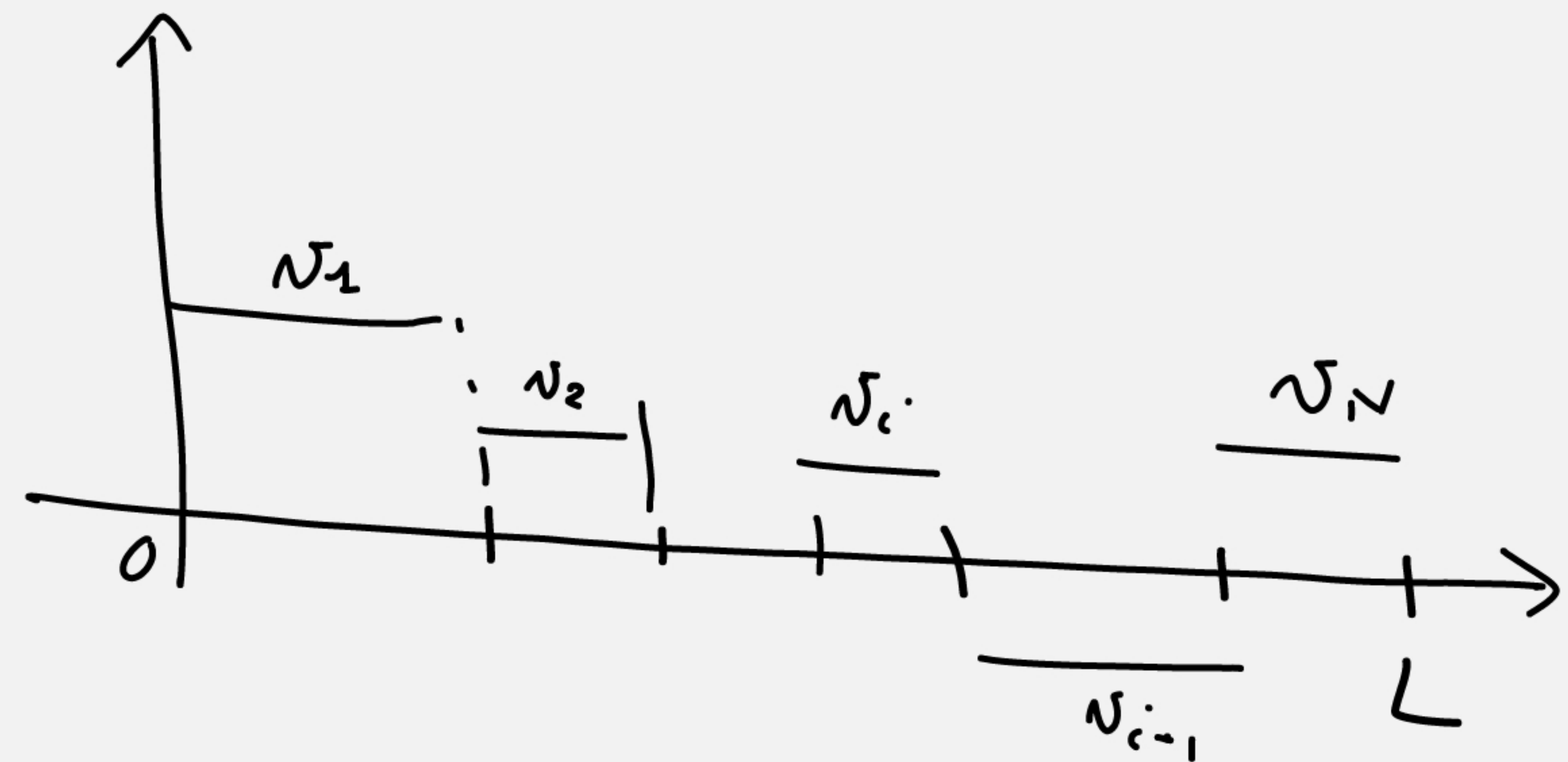
- $h_{i+1/2} = |x_{i+1} - x_i|$, $i = 0, \dots, N$

- $h = \max_{i=1, \dots, N} h_i$

On pose $x_0 = 0$; $x_{N+1} = L$

Discretisation de l'espace des solutions

$$V_h = \left\{ v_h \in L^2(0, L) \text{ tq } v_h|_{K_i} = \nu_i \in \mathbb{R} \quad \forall i = 1, \dots, N \right\}$$



$$V_h \not\subset H_0^1(0, L)$$

on dit que la discretisation est non conforme

$$\dim V_h = N \quad \left(V_h \text{ est un espace vectoriel de dimension } N \right)$$

Discretisation de l'équation : 1 équation par maille

• équation sous forme conservative $(-u'(x))' = f(x)$

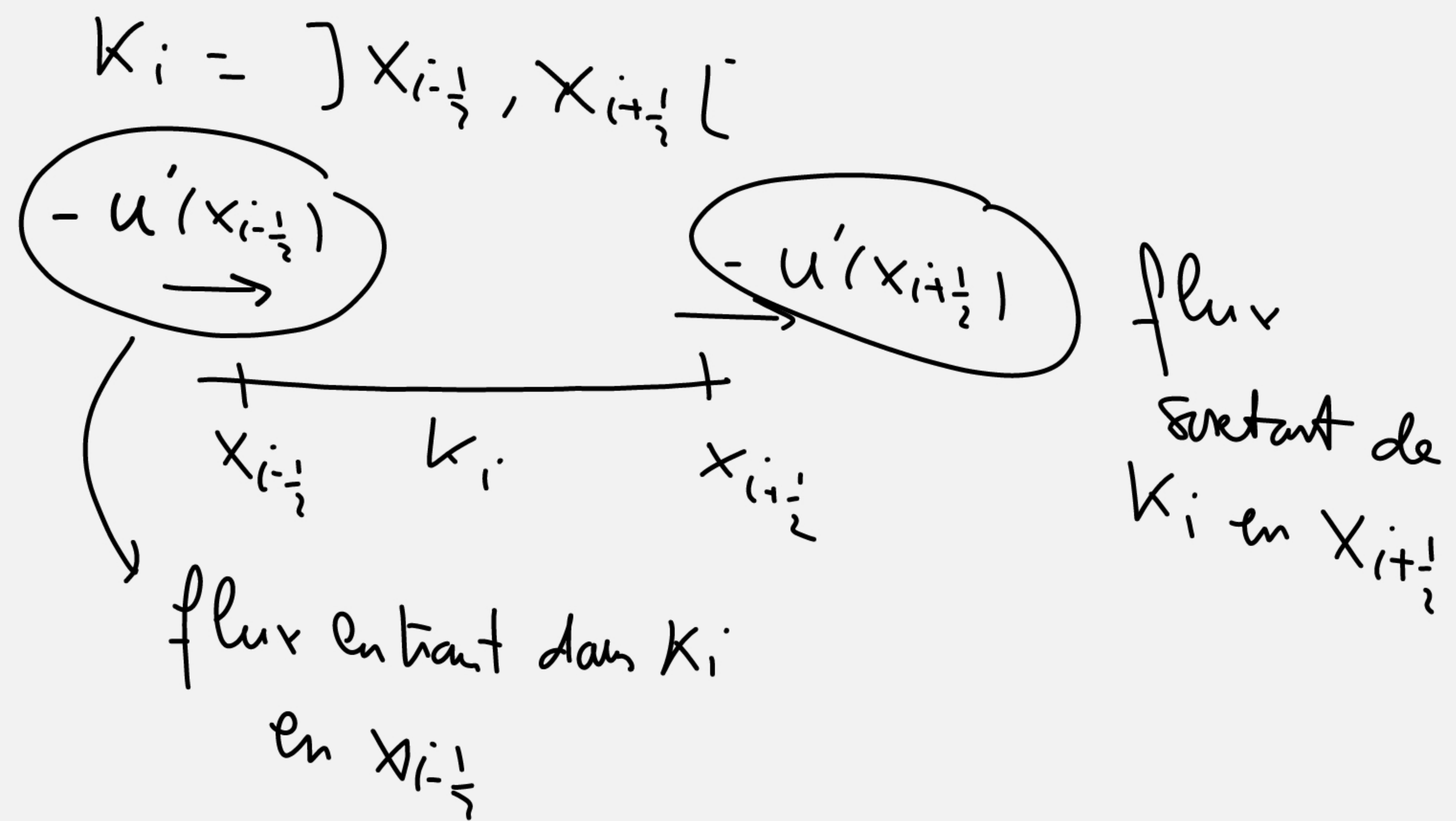
• on intègre l'éq. conservative sur chaque maille $K_i, i=1, \dots, N$

$$\int_{K_i} (-u'(x))' dx = \int_{K_i} f(x)$$

• on passe à l'intégrale de bord

$$-u'(x_{i+\frac{1}{2}}) - (-u'(x_{i-\frac{1}{2}})) = \int_{K_i} f(x)$$

Eq de conservation dans la maille K_i

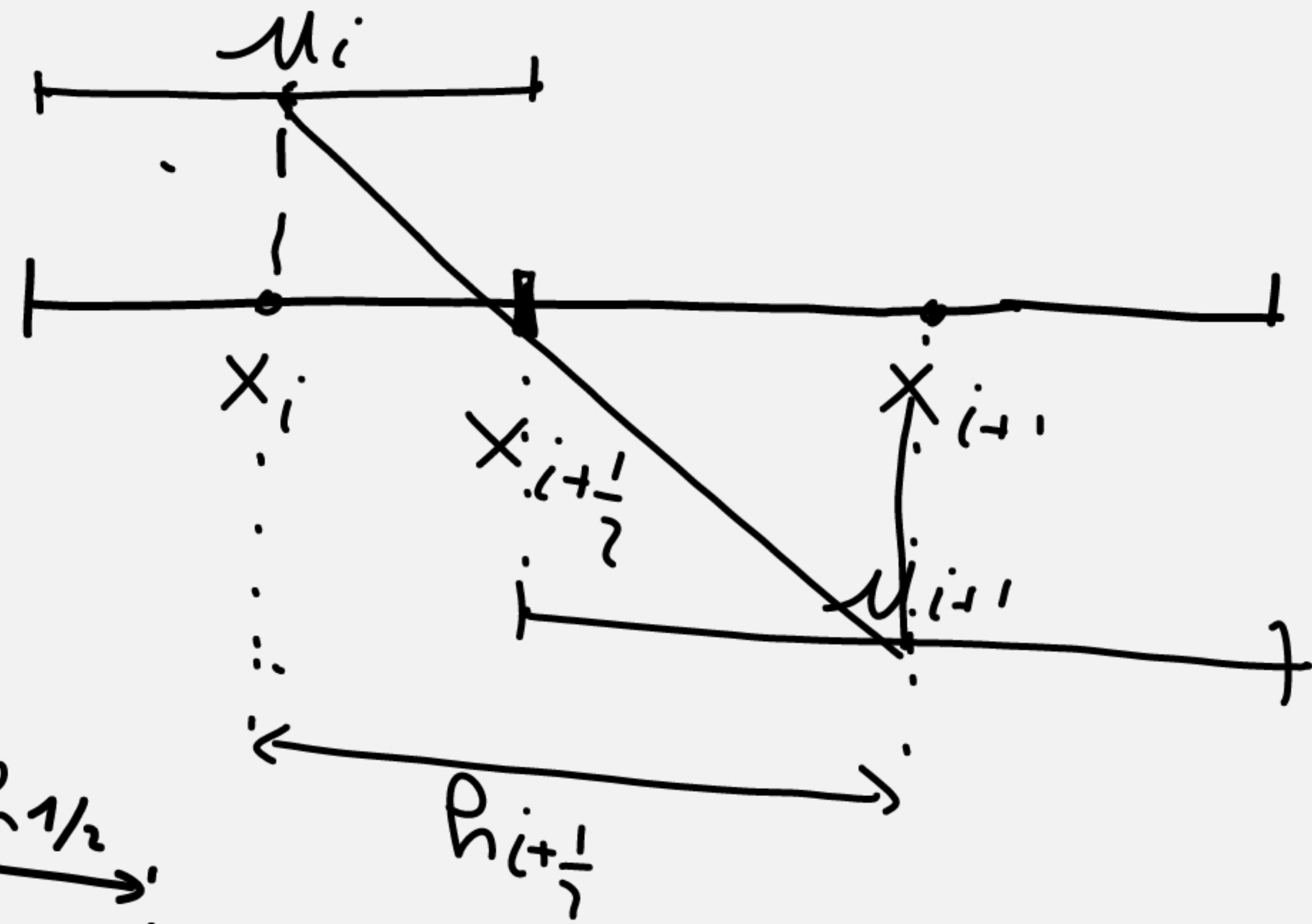


• Approximation de flux $-u'(x_{i+\frac{1}{2}}) = \overline{F}_{i+\frac{1}{2}}(u)$ (flux continu)
par un flux numérique $F_{i+\frac{1}{2}}(u_h)$

$$\Rightarrow \boxed{\overline{F}_{i+\frac{1}{2}}(u_h) - F_{i-\frac{1}{2}}(u_h) = \int_{K_i} f(x) dx \quad \forall i = 1, \dots, N}$$

Equation de conservation discrète dans chaque maille K_i :

Construction de flux numérique $\overline{F}_{i+\frac{1}{2}}(u_h)$, $u_h \in V_h$ qui approxime $-u'(x_{i+\frac{1}{2}})$



flux numérique "interieur"

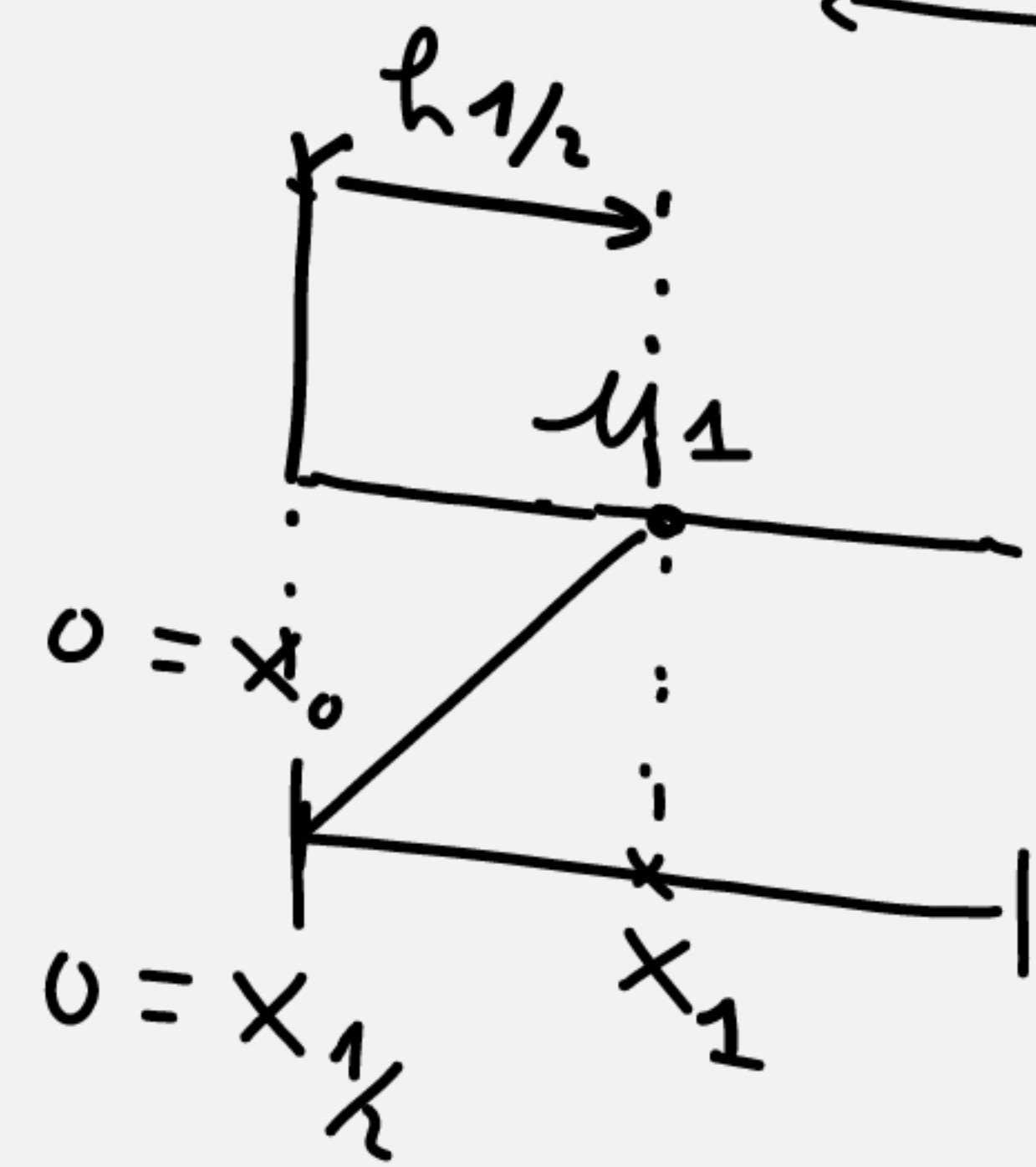
$$\overline{F}_{i+\frac{1}{2}}(u_h) = \frac{u_i - u_{i+1}}{h_{i+\frac{1}{2}}}, \quad \forall i = 1, \dots, N-1$$

" on interprete u_i comme la valeur de u_h en x_i et u_{i+1} comme la valeur de u_h en x_{i+1}

flux numériques de bord

$$\overline{F}_{1/2}(u_h) = \frac{u_0 - u_1}{h_{1/2}} = \frac{0 - u_1}{h_{1/2}}$$

$$\overline{F}_{N+1/2}(u_h) = \frac{u_N - u_{N+1}}{h_{N+1/2}} = \frac{u_N - 0}{h_{N+1/2}}$$



on utilise la valeur au bord $u_0 = 0$

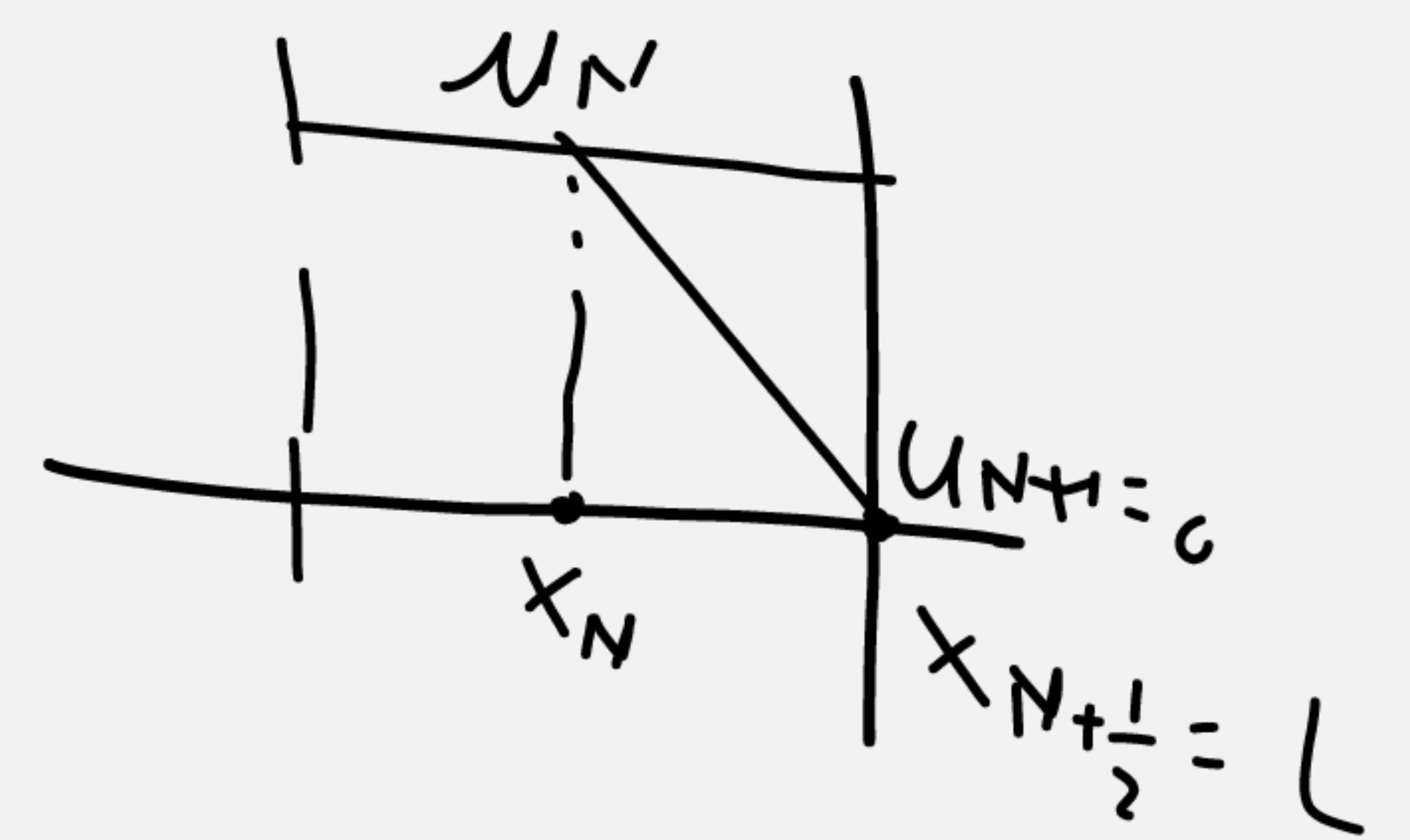


Schéma VF :

$$(E_h) \left[\begin{array}{l} \frac{u_i - u_{i+1}}{h_{i+\frac{1}{2}}} - \frac{u_{i-1} - u_i}{h_{i-\frac{1}{2}}} = \int_{k_i} f(x) dx \quad \forall i = 1, \dots, N \\ \text{avec les C.L. de Dirichlet} \\ u_0 = 0 \\ u_{N+1} = 0 \end{array} \right.$$

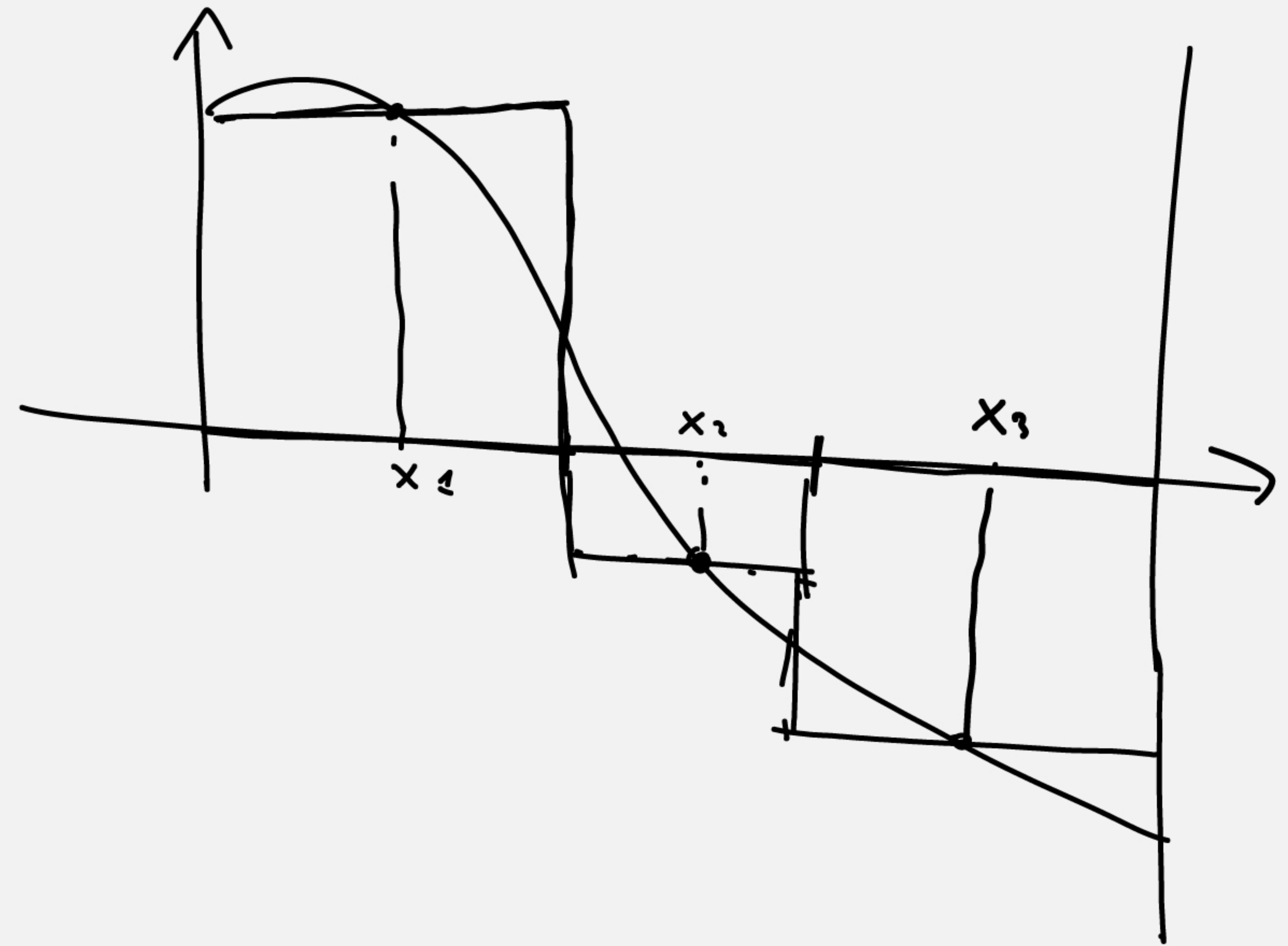
$$\mathbb{R}^N \ni U_h = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix} \quad | \quad A_h U_h = F_h = \begin{pmatrix} \int_{k_1} f dx \\ \vdots \\ \int_{k_n} f dx \end{pmatrix}$$

A_h est une matrice carrée de taille N
Unicité de $U_h \Rightarrow A_h$ est injective
Comme A_h est carré $\Rightarrow A_h$ est inversible
 \Rightarrow problème bien posé
(existence et unicité)

Consistance des flux

Interpolant: soit $u \in C^0([0, L])$

$$\begin{cases} I_h : C^0([0, L]) \rightarrow V_h \\ I_h u \in V_h \quad (I_h u)_i = \underline{u(x_i)} \end{cases}$$



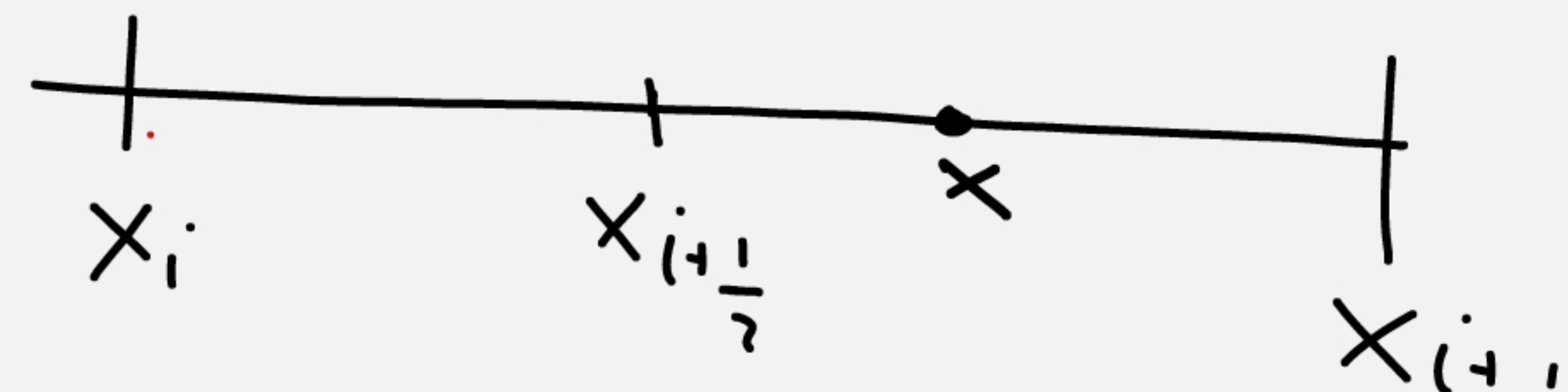
Erreur de consistance des flux:
$$\begin{aligned} \pi_{i+\frac{1}{2}}(u) &= -u'(x_{i+\frac{1}{2}}) - F_{i+\frac{1}{2}}(I_h u) \\ &= -u'(x_{i+\frac{1}{2}}) - \frac{u(x_i) - u(x_{i+1})}{h_{i+\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

$$u \in C^2[0, L]$$

$$\tau_{i+\frac{1}{2}}(u) = -u'(x_{i+\frac{1}{2}}) - \frac{u(x_i) - u(x_{i+1}))}{h_{i+\frac{1}{2}}} = \frac{1}{h_{i+\frac{1}{2}}} \int_{x_i}^{x_{i+1}} (-u'(x_{i+\frac{1}{2}}) + u'(x)) dx$$

$$|u'(x) - u'(x_{i+\frac{1}{2}})| \leq \sup_{y \in [0, L]} |u''(y)| h_{i+\frac{1}{2}}$$

$$|\tau_{i+\frac{1}{2}}(u)| \leq \sup_{y \in [0, L]} |u''(y)| h_{i+\frac{1}{2}} \left(\int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{h_{i+\frac{1}{2}}} dx \right)$$



$$|\tau_{i+\frac{1}{2}}(u)| \leq \sup_{y \in [0, L]} |u''(y)| h_{i+\frac{1}{2}}$$

$\forall i = 0, \dots, N$

$$\leq C(u) h^{\textcircled{1}}$$

Erreur de Consistance à P'ordre 1

Formulation variationnelle directe

$v_h \in V_h$ fonction test. Je pose $\boxed{v_0 = 0}$
 $\boxed{v_{N+1} = 0}$

$$\sum_{i=1}^N v_i \left(\underbrace{F_{i+\frac{1}{2}}(u_h)}_{i=j+1} - \underbrace{F_{i-\frac{1}{2}}(u_h)}_{i=j+1} \right) = \sum_{i=1}^N v_i \int_{K_i} f(x) dx = \sum_{i=1}^N \int_{K_i} v_h(x) f(x) dx = \int_0^L f(x) v_h(x) dx$$

$$\sum_{i=1}^N v_i F_{i+\frac{1}{2}}(u_h) - \sum_{j=0}^{N-1} v_{j+1} F_{j+\frac{1}{2}}(u_h) = \sum_{i=0}^N (v_i - v_{i+1}) F_{i+\frac{1}{2}}(u_h) = \sum_{i=0}^N \frac{(u_i - u_{i+1})(v_i - v_{i+1})}{h_{i+\frac{1}{2}}}$$

(EVR) :

\Updownarrow
(ER)

Trouver $u_h \in V_h$ t.q.

$$\sum_{i=0}^N \frac{(u_i - u_{i+1})(v_i - v_{i+1})}{h_{i+\frac{1}{2}}} = \int_0^L f v_h(x) dx \quad \forall v_h \in V_h \text{ avec } v_0 = v_{N+1} = 0$$

avec b.c. $u_0 = u_{N+1} = 0$

Norme H_0^1 discrète:

$$\|v_h\|_{1,h} = \left(\sum_{i=0}^N \frac{(u_i - u_{i+1})^2}{h_{i+\frac{1}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}}$$

ici on a posé
 $u_0 = u_{N+1} = 0$

Prop: Inégalité de Poincaré discrète:

$$\forall v_h \in V_h, \text{ on a } \|v_h\|_{L^2} \leq L \|v_h\|_{1,h}$$

Preuve:

$$v_i = \sum_{j=0}^{i-1} v_{j+1} - v_j \quad \text{car } v_0 = 0$$

$$|v_i| \leq \sum_{j=0}^{i-1} |v_{j+1} - v_j| \leq \sum_{j=0}^{i-1} \left(\frac{|v_{j+1} - v_j| \sqrt{h_{j+\frac{1}{2}}}}{\sqrt{h_{j+\frac{1}{2}}}} \right) \leq \overbrace{\left\| \sum_{j=0}^{i-1} \frac{(v_{j+1} - v_j)^2}{h_{j+\frac{1}{2}}} \right\|}^{\|v_h\|_{1,h}^2} \overbrace{\left\| \sum_{j=0}^{i-1} h_{j+\frac{1}{2}} \right\|}^{\sqrt{L}}$$

$\forall i=1, \dots, N$

$$|v_i| \leq \sqrt{L} \|v_h\|_{1,h}$$

$$\|v_h\|_{L^2}^2 = \int_0^L |v_h(x)|^2 dx = \sum_{i=1}^N \int_{x_i} |v_h(x)|^2 dx = \sum_{i=1}^N R_i v_i^2 \leq \sum_{i=1}^N L \|v_h\|_{1,h}^2 R_i \leq L^2 \|v_h\|_{1,h}^2$$

Prop Estimation a priori: Soit u_h une solution de E_h (ou EVE)
 alors on a $\|u_h\|_{1,h} \leq L \|f\|_{L^2}$

preuve: on pose $v_h = u_h$ dans EVE

$$\Rightarrow \|u_h\|_{1,h}^2 = \int_0^L f u_h(x) dx \stackrel{\text{C.S.}}{\leq} \|f\|_{L^2} \|u_h\|_{L^2}$$

$\stackrel{\text{Inégalité de Poincaré discret}}{\leq} \|f\|_{L^2} L \|u_h\|_{1,h}$

$$\Rightarrow \|u_h\|_{1,h} \leq L \|f\|_{L^2}$$

Rq: | l'estimation a priori + linéarité de l'équation $E_h \Rightarrow$ unicité de la solution

$$A_h U_h = F_h$$

$$\langle A_h U_h, V_h \rangle = \sum_{i=0}^N \frac{(u_i - u_{i+1})(v_i - v_{i+1})}{h_{i+\frac{1}{2}}}$$

$$V_h = U_h$$

$$U_h = \begin{pmatrix} u_2 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}$$

$$\langle A_h U_h, U_h \rangle = \|U_h\|_{1,h}^2 \geq 0 \quad \forall U_h \in \mathbb{R}^N$$

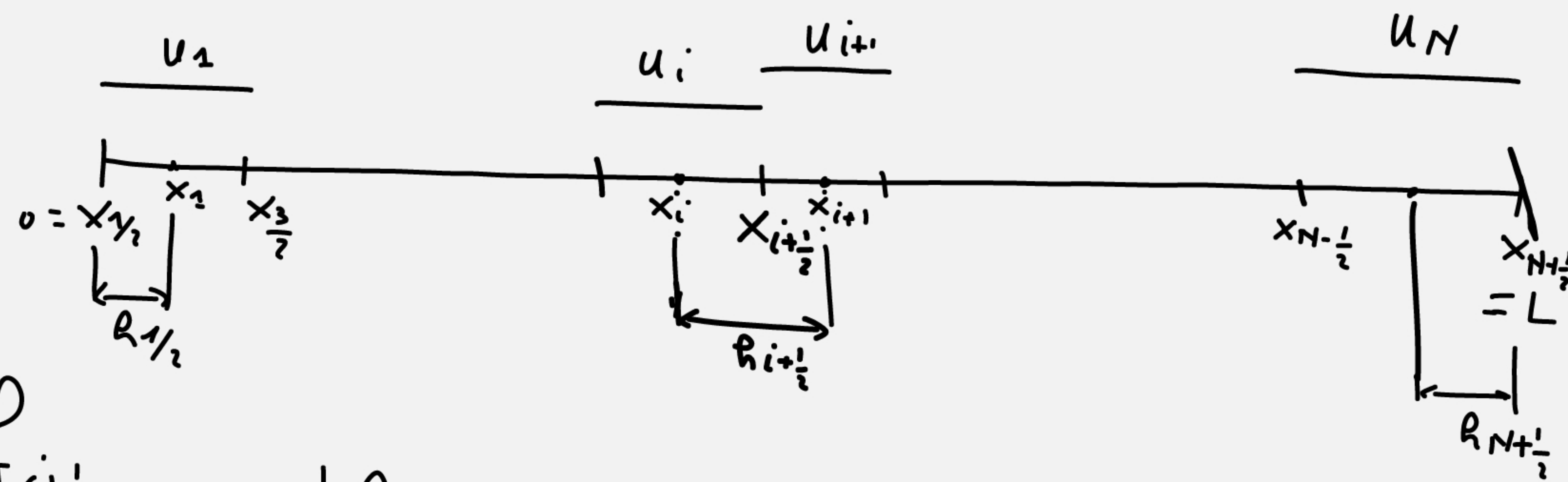
$$\langle A_h U_h, U_h \rangle = 0 \Rightarrow \|U_h\|_{1,h}^2 = 0 \Rightarrow U_h = 0 \Rightarrow U_h = 0$$

$$\langle A_h U_h, V_h \rangle = \langle U_h, A_h V_h \rangle \quad \forall (U_h, V_h) \in \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^N$$

$\Rightarrow A_h$ est symétrique, définie positive (SDP) donc inversible.

TP-TD : Laplacien 1D avec C.L. mixte Dirichlet - Neumann non homogène

$$(P) \begin{cases} -u''(x) = f(x) & \text{sur } (0, L) \\ u(0) = u_D \in \mathbb{R} \\ -u'(L) = g \in \mathbb{R} \end{cases}$$



① Définir les flux numériques $F_{i+1/2}(u_h) = f_{i+1/2}$
 En déduire le schéma VF pour (P),

Le flux continu est $-u'(x_{i+1/2})$
 Pour $i=0, \dots, N$

$$-u'(x_{N+1/2}) = -u'(L) = g$$

$$\begin{aligned} F_{i+1/2}(u_h) &= \frac{u_i - u_{i+1}}{h_{i+1/2}} & i=1, \dots, N-1 \\ F_{1/2}(u_h) &= \frac{u_D - u_1}{h_{1/2}} \\ F_{N+1/2}(u_h) &= g \end{aligned}$$

$$F_{i+1/2}(u_h) - F_{i-1/2}(u_h) = \int_{K_i} f(x) dx \quad \forall i=1, \dots, N$$

Equation parabolique 1D

$$\left[\begin{array}{l} \partial_t u(x,t) - \partial_x^2 u(x,t) = f(x,t) \quad \text{sur } (0,L) \times (0,T) \\ u(0,t) = 0 \quad t \in (0,T) \\ u(L,t) = 0 \quad t \in (0,T) \\ u(x,0) = u^0(x) \quad x \in (0,L) \end{array} \right.$$

Semi-discrétisation en espace

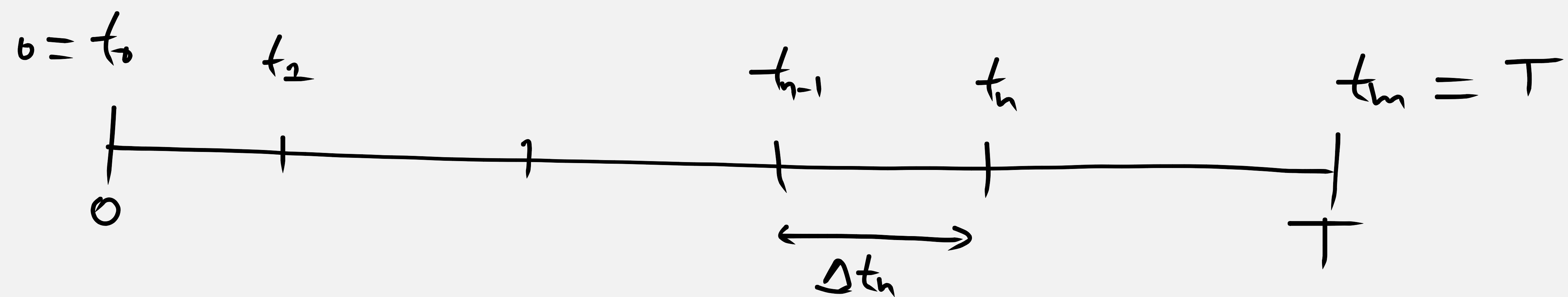
$$\left\{ \begin{array}{l} u_R(t) \in V_R \quad \forall t \in (0,T) \\ u_R(x,t) = u_i(t) \quad \forall x \in K_i, \forall t \in (0,T) \\ \quad \quad \quad \forall i=1, \dots, N \end{array} \right.$$

$$\int_{K_i} \partial_t u(x,t) dx + \int_{x_{i-\frac{1}{2}}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} -\partial_x^2 u(x,t) dx = \int_{K_i} f(x,t) dx$$

$$\frac{d}{dt} \int_{K_i} u(x,t) dx - \partial_x u(x_{i+\frac{1}{2}}, t) - (-\partial_x u(x_{i-\frac{1}{2}}, t)) = \int_{K_i} f(x,t) dx$$

Discretisation v f :

$$\left\{ \begin{array}{l} h_i \frac{d}{dt} u_i(t) + F_{i+\frac{1}{2}}(u_i(t)) - F_{i-\frac{1}{2}}(u_i(t)) = \int_{K_i} f(x,t) dx \\ u_0(t) = u_{N+1}(t) = 0 \quad \forall t \in (0, T) \\ u_i(0) = \frac{1}{h_i} \int_{K_i} u^0(x) dx \quad i = 1, \dots, N \end{array} \right.$$



$$0 = t_0 < t_1 \dots < t_{n-1} < t_n < \dots < t_n = T$$

$$y(t) : (0, T) \rightarrow \mathbb{R}^N$$

$$H(y, t) : \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^N$$

$$\frac{dy(t)}{dt} = H(y(t), t)$$

$$y(t_n) = y_n$$

$$\underbrace{\frac{1}{\Delta t_n} \int_{t_{n-1}}^{t_n} \frac{dy(t)}{dt} dt}_{y(t_n) - y(t_{n-1})} = \frac{1}{\Delta t_n} \int_{t_{n-1}}^{t_n} H(y(t), t) dt$$

$$\frac{y(t_n) - y(t_{n-1})}{\Delta t_n} = \begin{cases} H(y(t_n), t_n) & \text{Euler implizite} \\ H(y(t_{n-1}), t_{n-1}) & \text{--- explizite} \end{cases}$$

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta t_n} = \begin{cases} H(y_n, t_n) & \text{Euler implicite} \\ H(y_{n-1}, t_{n-1}) & \text{Euler explicite} \end{cases}$$

notation :

$$y_* = \begin{cases} y_n & \text{si implicite} \\ y_{n-1} & \text{si explicite} \end{cases} \quad t_* = \begin{cases} t_n & \text{si implicite} \\ t_{n-1} & \text{si explicite} \end{cases}$$

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta t_n} = H(y_*, t_*)$$

Application à la semi-discretisation VF du pb parabolique :

$$\begin{cases} u_i^n = u_i(t_n) \\ u_2^n = u_2(t_n) \end{cases}$$

$$\left. \begin{aligned}
 h_i \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t_n} + F_{i+\frac{1}{2}}(u_n^*) - F_{i-\frac{1}{2}}(u_n^*) &= \int_{K_i} f(x, t^+) dx & \forall i=1, \dots, N \\
 u_0^* = u_{N+1}^* &= 0 \\
 u_i^0 &= \frac{1}{h_i} \int_{K_i} u^0(x) dx & i=1, \dots, N
 \end{aligned} \right\}$$

Crank Nicholson

$$\frac{y_n - y_{n-1}}{\Delta t_n} = H\left(\frac{y_n + y_{n-1}}{2}, \frac{t_n + t_{n-1}}{2}\right)$$

$$\hookrightarrow h_i \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t_n} + F_{i+\frac{1}{2}}\left(\frac{u_n^n + u_n^{n-1}}{2}\right) - F_{i-\frac{1}{2}}\left(\frac{u_n^n + u_n^{n-1}}{2}\right) = \int_{K_i} f(x, \frac{t_n + t_{n-1}}{2})$$

$$U_h^n = \begin{pmatrix} U_2^n \\ \vdots \\ U_M^n \end{pmatrix}$$

$$S_h^n = \begin{pmatrix} \int_{x_2} f(x, t^n) dx \\ \vdots \\ \int_{x_M} f(x, t^n) dx \end{pmatrix}$$

$$D_h = \begin{pmatrix} h_2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & h_M \end{pmatrix}$$

$$D_h \frac{U_h^n - U_h^{n-1}}{\Delta t_n} + A_h U_h^* = S_h^*$$

Cas Evb implicite :

$$(D_h + \Delta t_n A_h) U_h^n = D_h U_h^{n-1} + \Delta t_n S_h^n$$

Cas Evb explicite :

$$D_h U_h^n = D_h U_h^{n-1} - \Delta t_n A_h U_h^{n-1} + \Delta t S_h^{n-1}$$

$$\min (u_j^0, j=1, \dots, N, \bar{u}_0, \bar{u}_{N+1}) \leq u_i^n \leq \max (u_j^0, j=1, \dots, N, \bar{u}_0, \bar{u}_{N+1}) \quad \forall i, n$$

Application au pb parabolique

① Cas Euler implicite :

$$h_i \frac{u_i^n - u_i^{n-1}}{\Delta t_n} + \frac{u_i^n - u_{i+1}^n}{h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h_{i-\frac{1}{2}}} = 0$$

$$\left(\frac{h_i}{\Delta t_n} + \frac{1}{h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{1}{h_{i-\frac{1}{2}}} \right) u_i^n = \frac{h_i}{\Delta t_n} u_i^{n-1} + \frac{1}{h_{i+\frac{1}{2}}} u_{i+1}^n + \frac{1}{h_{i-\frac{1}{2}}} u_{i-1}^n$$

\Rightarrow le schéma le principe du maximum quelque soit le pas de temps $\Delta t_n \Rightarrow$ schéma inconditionnellement stable

Cas Euler explicite

$D > 0$

$$h_i \frac{U_i^n - U_i^{n-1}}{\Delta t_n} + D \frac{U_i^{n-1} - U_{i+1}^{n-1}}{h_{i+\frac{1}{2}}} + D \frac{U_i^{n-1} - U_{i-1}^{n-1}}{h_{i-\frac{1}{2}}} = 0$$

$$\frac{h_i}{\Delta t_n} U_i^n = \left(\frac{h_i}{\Delta t_n} - \frac{D}{h_{i+\frac{1}{2}}} - \frac{D}{h_{i-\frac{1}{2}}} \right) U_i^{n-1} + \frac{D}{h_{i+\frac{1}{2}}} U_{i+1}^{n-1} + \frac{D}{h_{i-\frac{1}{2}}} U_{i-1}^{n-1}$$

Condition suffisant par le principe du maximum :

$$\frac{h_i}{\Delta t_n} > \frac{D}{h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{D}{h_{i-\frac{1}{2}}} \iff \Delta t_n < \frac{h_i}{\frac{D}{h_{i+\frac{1}{2}}} + \frac{D}{h_{i-\frac{1}{2}}}}$$

Schéma conditionnellement stable